

МЕХАНИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 2. С. 209–221

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 2, pp. 209–221

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-209-221>

EDN: WILEKW

Научная статья
УДК 539.3

Об одном новом подходе к идентификации неоднородных механических свойств упругих тел

А. О. Ватульян¹, В. О. Юров²✉

¹Южный федеральный университет, Россия, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, д. 8а

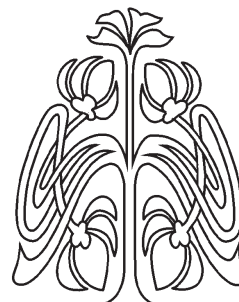
²Южный математический институт — филиал Владикавказского научного центра, Россия, 362025, г. Владикавказ, ул. Ватутина, д. 53

Ватульян Александр Ованесович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории упругости, aovatulyan@sfedu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0444-4496>, AuthorID: 3469

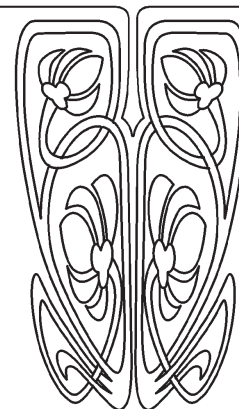
Юров Виктор Олегович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений, vuurov@sfedu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4689-4068>, AuthorID: 936484

Аннотация. Представлен новый подход к решению задачи об идентификации переменных характеристик неоднородного упругого изотропного тела. Приведены наиболее употребительные постановки задач об определении переменных механических характеристик (параметры Ламе и плотность — функции координат). Обратная задача идентификации свойств в силу своей существенной нелинейности обычно решается итерационным образом, причем каждая итерация требует решения прямой задачи для некоторого начального приближения и системы интегральных уравнений Фредгольма первого рода с гладкими ядрами для нахождения поправок. Такой подход, в свою очередь, требует задания поля перемещений в области, в которой осуществляется нагружение. Предложен подход, на базе которого возможно осуществлять реконструкцию при съеме дополнительной информации о поле смещений в области, отличной от области нагружения, в более узком пространстве поиска. Представлен пример такой реконструкции в задаче о продольных колебаниях неоднородного стержня, где амплитудно-частотная характеристика задана во внутренней точке стержня, а нагружение реализовано на торце. Приведены результаты вычислительных экспериментов по реконструкции модуля упругости и плотности в виде двух функций продольной координаты.

Ключевые слова: обратная задача, неоднородные свойства, колебания, амплитудно-частотные характеристики



Научный
отдел





Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-11-00265, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/>) в Южном федеральном университете.

Для цитирования: Ватulyян А. О., Юров В. О. Об одном новом подходе к идентификации неоднородных механических свойств упругих тел // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 2. С. 209–221. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-209-221>, EDN: WILEKW

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

On a new approach to identifying inhomogeneous mechanical properties of elastic bodies

A. O. Vatulyan¹, V. O. Yurov²✉

¹Southern Federal University, 8a Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia

²Southern Mathematical Institute — the Affiliate of Vladikavkaz Scientific Centre of Russian Academy of Sciences, 53 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia

Alexander O. Vatulyan, aovatulyan@sfnu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0444-4496>, AuthorID: 3469

Victor O. Yurov, vyurov@sfnu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4689-4068>, AuthorID: 936484

Abstract. A new approach to solving the problem of identifying the variable characteristics of an inhomogeneous elastic isotropic body is presented. The most common formulations of problems on determining variable mechanical characteristics (the Lamé parameters and density are functions of coordinates) are presented. The inverse problem of identifying properties, due to its significant nonlinearity, is usually solved iteratively, with each iteration requiring the solution of a direct problem for some initial approximation and a system of the Fredholm integral equations of the first kind with smooth kernels to find corrections. This approach, in turn, requires specifying the displacement field in the area in which the loading occurs. An approach is proposed on the basis of which it is possible to carry out reconstruction by obtaining additional information about the displacement field in an area other than the loading area in a narrower search space. An example of such a reconstruction is presented in the problem of longitudinal vibrations of an inhomogeneous rod, where the amplitude-frequency response is specified at the internal point of the rod, and the loading is implemented at the end. The results of computational experiments on the reconstruction of the elasticity modulus and density in the form of two functions of the longitudinal coordinate are presented.

Keywords: inverse problem, inhomogeneous properties, oscillations, amplitude-frequency characteristics

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-11-00265, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/>) in Southern Federal University.

For citation: Vatulyan A. O., Yurov V. O. On a new approach to identifying inhomogeneous mechanical properties of elastic bodies. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 2, pp. 209–221 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-209-221>, EDN: WILEKW

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Аналитические и численные методы решения коэффициентных обратных задач механики (КОЗ) — интенсивно развивающаяся область, находящаяся на стыке классической механики сплошной среды с переменными свойствами, математической теории некорректных задач и вычислительной математики. В обратных задачах такого типа требуется восстановить (или оценить степень изменчивости) физические характеристики по дополнительной информации,



получаемой при зондировании объекта исследования некоторой нагрузкой, меняющейся во времени. Дополнительная информация для моделей теории упругости при стационарном воздействии обычно задается в виде значений резонансных частот и мод колебаний или информации о полях смещений. Искомые физические характеристики могут быть постоянными или зависящими от координат функциями, и задача их определения относится к некорректным задачам, для которых характерны возможная неединственность и сильная зависимость реконструкции от малых возмущений измеренных полей или частот [1]. Отметим, что теория обратных коэффициентных задач берет свое начало с обратной задачи рассеяния, в которой по бесконечному спектру восстанавливается потенциал. Этой проблеме и ее математическим аспектам посвящено достаточное количество исследований, продолжающихся и по сей день [2, 3]. В настоящее время имеется много научных работ и монографий, посвященных различным аспектам постановок, методам решения и их реализациям для КОЗ, возникающих в разных разделах математической физики. Среди множества исследований отечественных и зарубежных авторов в этом направлении отметим [4–12], посвященные математическим аспектам постановок и анализу задач, доказательству теорем существования и единственности, в первую очередь использующие принцип сжимающих отображений, и [13–15], в которых обсуждены различные аспекты численной реализации для широкого класса задач, возникающих в задачах теплофизики, теории упругости и в механике связанных полей [16].

В научной литературе существует разделение на конечномерные КОЗ (в них коэффициенты моделей постоянны) и бесконечномерные, в которых отыскивается решение КОЗ в некоторых положительных конусах, вложенных в достаточно хорошо изученные пространства функций (непрерывных, суммируемых). В большинстве публикаций для конечномерных КОЗ используется минимизация как функционала невязки, так и функционала Тихонова. Овражистый характер этих функционалов далеко не всегда позволяет использовать градиентные процедуры минимизации; в последнее время часто при реализации используются нейросети и эволюционные алгоритмы [17].

В случае зависимости искомых параметров-функций от координат операторные уравнения, связывающие заданные и искомые функции, в общем случае неоднородности в явном виде не могут быть построены; решения прямых задач в этом случае могут быть построены лишь с помощью каких-либо численных методов: конечных элементов, конечно-разностных или прямых типа Галеркина или Рунге. При этом на предварительном этапе исследований требуется определять функции, характеризующие свойства материала объекта, что невозможно без достаточно точного решения прямых задач. Таким образом, прямая и обратная задачи оказываются неразрывно связанными.

Отметим, что на современном этапе развития науки и технологий при исследовании ряда проблем деформирования и прочности твердых тел в новых областях (механика композитов и функционально-градиентных структур, геофизика и горная механика, биомеханика) [18–25] модель однородной среды далеко не всегда может быть использована для адекватного описания деформирования элементов природных и искусственных конструкций.

Для анализа колебаний и использования модели неоднородной теории упругости необходимо знать в самом простом случае непрерывно-неоднородного (или кусочно-однородного) изотропного тела три функции (модули Ламе и плотность среды). При этом физические характеристики задаются с помощью функциональных зависимостей, которые должны быть предварительно определены из некоторых экспериментов или наблюдений, как правило, связанных с измерением граничных или внутренних полей смещений при возбуждении колебаний некоторой нагрузкой. Чаще всего такие зависимости предполагаются одномерными (особенно при использовании моделей стержней, слоя, полупространства или слоистого полупространства), а наиболее распространенный способ их определения — анализ отклика исследуемого объекта при возможном варьировании способа нагружения. При этом задача определения нескольких функций [26–29] приводит к исследованию довольно сложных нели-



нейных обратных задач для эллиптических и гиперболических операторов (или операторов смешанного типа). Отметим, что довольно часто принимаемый кусочно-постоянный характер изменения искомых характеристик в ряде ситуаций оправдан, поскольку это предположение существенно сужает область поиска и значительно упрощает исследование обратных задач (сводя их к конечномерным), однако может привести к существенному искажению результатов идентификации и, как следствие, к ошибкам при анализе динамического отклика или при прогнозировании ресурса конструкции.

1. Общая постановка задач для модели неоднородной изотропной теории упругости

Определение переменных механических характеристик неоднородных трехмерных упругих тел, таких как параметры Ламе и плотность, является важной задачей, в рамках которой можно исследовать различные новые задачи. К числу наиболее важных отнесем задачи горной механики, биомеханики тканей и биомеханических конструкций, задачи мониторинга при производстве новых функционально-градиентных материалов, а также при осуществлении неразрушающего контроля для давно введенных в эксплуатацию конструкций.

Такие задачи обычно решаются путем зондирования (возбуждение установившихся колебаний и измерение амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) на части свободной поверхности). Методики решения существенно нелинейных обратных задач такого типа опираются на достаточно сложный математический алгоритм, основанный на операторном методе Ньютона, который требует реализации итеративных схем с контролем невязки, решением прямых задач и систем интегральных уравнений Фредгольма (ИУФ) первого рода с гладкими ядрами относительно поправок [15].

Важно развитие упрощенных алгоритмов реконструкции переменных свойств (возможно, с сужением пространства поиска и потерей точности), которые бы не требовали решения некорректных задач и также обеспечивали высокую скорость вычислений. Для случая, когда системы ИУФ для нахождения поправок не могут быть построены по классической схеме [15], предлагается алгоритм итерационного поиска поправок в классе полиномиальных функций. Опишем основные этапы этого подхода.

1.1. Прямая задача

Рассмотрим установившиеся колебания неоднородного упругого тела с частотой ω . Пусть тело занимает ограниченную область V с границей $S = S_u \cup S_f \cup S_\sigma$. Классическая постановка задачи содержит уравнения колебаний

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

определяющие соотношения для изотропной среды

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2)$$

и граничные условия:

$$u_i|_{S_u} = 0, \quad \sigma_{ij} n_j|_{S_f} = 0, \quad \sigma_{ij} n_j|_{S_\sigma} = p_i, \quad (3)$$

где u_i — компоненты вектора перемещений, σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, n_j , p_i — соответственно компоненты единичного вектора внешней нормали к S и компоненты вектора внешней нагрузки. Будем рассматривать m различных вариантов нагружения, считая, что $p_i = p_i^{(m)}$ (далее соответствующий индекс m у смещений и напряжений опускаем). Область S_u — закреплена, S_f — свободна от нагружения, на S_σ задана внешняя нагрузка. Пусть λ , μ , ρ являются кусочно-непрерывными положительными функциями координат (λ , μ — параметры Ламе, ρ — плотность среды).

Решая задачу (1)–(3), определяем компоненты вектора перемещений как функции координат и частоты колебаний.



1.2. Обратная задача

В рамках представленной выше модели линейной теории упругости рассмотрим задачу о нахождении трех функций λ , μ , ρ по дополнительной информации о поле перемещений u_i , задаваемой в общем случае в виде функций координат и частоты колебаний. В зависимости от типа дополнительной информации будем выделять следующие три постановки обратной задачи:

- 1) компоненты u_i заданы внутри всей области V при некотором фиксированном значении частоты ω ;
- 2) компоненты u_i заданы в области S_σ (т. е. на части границы области V , где задается нагружение) как функции координат и частоты $\omega \in [\omega_-, \omega_+]$;
- 3) компоненты u_i заданы на части внешней границы, свободной от нагружения в области $S_{f0} \subset S_f$ в виде функций координат и частоты $\omega \in [\omega_-, \omega_+]$.

Отметим, что решено большое количество задач в первой и второй постановках [26–29]. Задача в первой постановке может быть реализована применительно к тонкостенным конструкциям или таким мягким тканям, в которых возможно измерение внутренних перемещений. Задача во второй постановке решается при помощи итерационного процесса ньютоновского типа. Суть метода заключается в определении начального приближения и последовательном его уточнении путем нахождения поправок. Для нахождения поправок используется условие разрешимости неоднородной задачи, возникающей в процессе линеаризации. Условие разрешимости приводит к системе интегральных уравнений Фредгольма первого рода с гладкими ядрами. Таким образом, решены обратные задачи для стержней и цилиндров [26–29].

Рассмотрим безразмерную постановку задачи (1)–(3), сформулированную в терминах безразмерных компонент вектора перемещений и тензора напряжений

$$\begin{aligned} t_{ij,j} + g_3 \kappa^2 U_i &= 0, & t_{ij} &= g_1 U_{k,k} \delta_{ij} + g_2 (U_{i,j} + U_{j,i}), & i &= 1, 2, 3; \\ U_i|_{S_u} &= 0, & t_{ij} n_j|_{S_f} &= 0, & t_{ij} n_j|_{S_\sigma} &= P_i, & i &= 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (4)$$

где $g_1 = \lambda \mu_0^{-1}$, $g_2 = \mu \mu_0^{-1}$, $g_3 = \rho \rho_0^{-1}$, $\kappa^2 = \rho_0 \omega^2 d^2 \mu_0^{-1}$, $P_i = p_i \mu_0^{-1}$, $t_{ij} = \sigma_{ij} \mu_0^{-1}$, $U_i = u_i d^{-1}$, μ_0 , ρ_0 – характерные значения модуля упругости и плотности, d – характерный размер области. Заметим, что для реконструкции трех функций нужно использовать дополнительную информацию, полученную как минимум из трех экспериментов по зондированию нагрузками различных типов.

При решении обратной задачи во второй и третьей постановках осуществляется линеаризация задачи в окрестности найденного начального приближения. Выполним разложение по формальному малому параметру ε :

$$U_i = U_i^{(0)} + \varepsilon U_i^{(1)} + O(\varepsilon^2), \quad g_i = g_i^{(0)} + \varepsilon g_i^{(1)} + O(\varepsilon^2). \quad (5)$$

Вводя обозначение $t_{ij}^{(m)} = \left(g_1^{(0)} U_{k,k}^{(m)} \delta_{ij} + g_2^{(0)} (U_{i,j}^{(m)} + U_{j,i}^{(m)}) \right)$, выпишем задачу при нулевой степени формального малого параметра:

$$\begin{aligned} t_{ij,j}^{(0)} + g_3^{(0)} \kappa^2 U_i^{(0)} &= 0, & i &= 1, 2, 3. \\ U_i^{(0)}|_{S_u} &= 0, & t_{ij}^{(0)} n_j|_{S_f} &= 0, & t_{ij}^{(0)} n_j|_{S_\sigma} &= P_i^{(m)}, & i &= 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (6)$$

Задача при первой степени ε примет вид

$$\begin{aligned} t_{ij,j}^{(1)} + g_3^{(0)} \kappa^2 U_i^{(1)} &= - \left[\left(g_1^{(1)} U_{k,k}^{(0)} \delta_{ij} + g_2^{(1)} (U_{i,j}^{(0)} + U_{j,i}^{(0)}) \right)_{,j} + g_3^{(1)} \kappa^2 U_i^{(0)} \right], \\ U_i^{(1)}|_{S_u} &= 0, & t_{ij}^{(1)} n_j|_{S_f \cup S_\sigma} &= - \left(g_1^{(1)} U_{k,k}^{(0)} \delta_{ij} + g_2^{(1)} (U_{i,j}^{(0)} + U_{j,i}^{(0)}) \right) n_j|_{S_f \cup S_\sigma}, & i &= 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (7)$$

Задача (6) может быть решена как при помощи метода пристрелки (для одномерных моделей), так и при помощи метода конечных элементов. Задача (7) содержит неизвестные поправки в правой части и поэтому прямым численным методом решена быть не может. При решении обратной задачи во второй постановке удастся избежать решения задачи (7) путем исключения смещений первого приближения и использования условия разрешимости. В этом случае для нахождения поправок используется система интегральных уравнений следующего вида [30]:

$$\int_V g_1^{(1)} (U_{k,k}^{(0)})^2 dV + \frac{1}{2} \int_V g_2^{(1)} (U_{i,j}^{(0)} + U_{j,i}^{(0)}) (U_{i,j}^{(0)} + U_{j,i}^{(0)}) dV - \kappa^2 \int_V g_3^{(1)} U_i^{(0)} U_i^{(0)} dV + \int_{S_\sigma} P_i^{(s)} (f_i - U_i^{(0)}) dS = 0, \quad \kappa \in [\kappa_-, \kappa_+], \quad s = 1, 2, 3. \quad (8)$$

Решение систем ИУФ осуществляется численно при помощи метода регуляризации А. Н. Тихонова. Для задачи в третьей постановке не удастся записать подобные соотношения, так как для применения условия разрешимости требуется задание поля перемещений в области нагружения. Поэтому для нахождения поправок применяется другой подход. Используется сужение множества поиска поправок искомым функциям до линейной комбинации некоторых известных функций, например полиномов. При использовании такой аппроксимации поправок можно строить решение (7) в виде аналогичной линейной комбинации, что уже позволяет строить решение каждой из таких задач с помощью МКЭ.

Рассмотрим задачу третьего типа. Дополнительные условия имеют вид

$$U_i|_{S_{f_0}} = f_i(x, \kappa), \quad \kappa \in [\kappa_1, \kappa_2]. \quad (9)$$

Неизвестные поправки в правой части (7) разложим по системе линейно независимых функций $\{\varphi_s\}$:

$$g_k^{(1)} = \sum_{s=0}^N c_{ks} \varphi_s, \quad k = 1, 2, 3. \quad (10)$$

В качестве $\{\varphi_s\}$ будем использовать систему полиномов невысокого порядка, например $\{1, x_1, x_2, x_3, x_1^2, x_2^2, x_1x_2, \dots\}$. Заметим, что закон неоднородности в трехмерном теле может быть двумерным или, что чаще, одномерным. Информация о направлении, в котором происходит изменение свойств, может быть эффективно использована при выборе системы функций, что существенно снизит размерность получаемой алгебраической системы. Решение (7) будем искать в виде суммы

$$U_i^{(1)} = \sum_{k=1}^3 \sum_{s=0}^N c_{ks} U_i^{(ks)}, \quad (11)$$

где $U_i^{(ks)}$ — решение (7) при $g_m^{(1)} = \delta_{km} \varphi_s$, $m = 1, 2, 3$.

Система для нахождения коэффициентов c_{ks} строится на основе (9) и приближенного равенства $U_i \approx U_i^{(0)} + \varepsilon U_i^{(1)}$, которое получается при удержании только линейных членов в разложении (5).

$$\sum_{k=1}^3 \sum_{s=0}^N c_{ks} U_i^{(ks)} \Big|_{S_{f_0}} = f_i(x, \kappa) - U_i^{(0)} \Big|_{S_{f_0}}, \quad \kappa \in [\kappa_1, \kappa_2]. \quad (12)$$

Соотношение (12) должно приближенно (с точностью до $O(\varepsilon^2)$) выполняться для всех $\kappa \in [\kappa_1, \kappa_2]$. На отрезке $[\kappa_1, \kappa_2]$ можно выбрать произвольное число точек M и таким образом получить из (12) СЛАУ относительно коэффициентов c_{ks} , $k = 1, 2, 3$, $s = \overline{0, N}$. Выбирая $M = 3(N + 1)$, получаем СЛАУ с квадратной матрицей. Заметим, что СЛАУ может



получиться как переобусловленной $M > 3(N + 1)$, так и недообусловленной $M < 3(N + 1)$. В таком случае необходимо использовать процедуры построения регуляризованного решения, например, с помощью метода А. Н. Тихонова.

Решая систему (12), находим коэффициенты c_{ks} , $k = 1, 2, 3$, $s = \overline{0, N}$. На основе (10) находим поправки $g_1^{(1)}$, $g_2^{(1)}$, $g_3^{(1)}$, которые позволяют записать решение обратной задачи в виде $g_1 = g_1^{(0)} + \varepsilon g_1^{(1)}$, $g_2 = g_2^{(0)} + \varepsilon g_2^{(1)}$, $g_3 = g_3^{(0)} + \varepsilon g_3^{(1)}$. Однако решение обратной задачи не ограничивается однократным нахождением поправок, а применяется итерационная схема решения: найденное на первой итерации решение принимается в качестве нового начального приближения и повторяются все ранее сделанные шаги. Итерационный процесс завершается по достижении невязки в АЧХ заданного значения или когда очередная получаемая поправка становится пренебрежимо мала. Скорость сходимости можно контролировать при помощи параметра ε . Обычно выбираем $\varepsilon = 1$, а при необходимости можно уменьшить этот параметр с учетом нормы поправки и невязки в АЧХ.

Дальнейшую реализацию алгоритма рассмотрим на примере одномерной задачи о продольных колебаниях стержня.

2. Пример. Обратная задача для стержня

Рассмотрим краевую задачу об установившихся колебаниях неоднородного упругого стержня. Безразмерная форма уравнения установившихся колебаний и граничных условий имеет вид [29]:

$$(u'g_1)' + \kappa^2 g_2 u = 0, \quad u(0) = 0, \quad u'(1)g_1(1) = 1, \quad (13)$$

где g_1 , g_2 , κ — безразмерные модуль упругости, плотность и частота колебаний.

В качестве дополнительной информации задается амплитуда колебаний в точке $\xi_0 \in (0, 1)$. Так как $\xi_0 \neq 1$, получаем обратную задачу третьего типа

$$u(x, \kappa)|_{x=\xi_0} = f(\kappa), \quad \kappa \in [\kappa_1, \kappa_2]. \quad (14)$$

Выполним линеаризацию задачи (13) в соответствии с (5)–(7).

При ε^0 получаем задачу

$$(u'_0 g_1^{(0)})' + \kappa^2 g_2^{(0)} u_0 = 0, \quad u_0(0) = 0, \quad u'_0(1) g_1^{(0)}(1) = 1. \quad (15)$$

Задача при ε^1 будет иметь вид

$$\begin{aligned} (u'_1 g_1^{(0)})' + \kappa^2 g_2^{(0)} u_1 &= - (u'_0 g_1^{(1)})' - \kappa^2 g_2^{(1)} u_0, \\ u_1(0) = 0, \quad u'_1(1) g_1^{(0)}(1) &= -u'_0(1) g_1^{(1)}(1). \end{aligned} \quad (16)$$

Будем строить решение задачи (16), отыскивая поправки в виде следующих линейных комбинаций:

$$g_1^{(1)} = \sum_{s=0}^N a_s \varphi_s(x), \quad g_2^{(1)} = \sum_{s=0}^N b_s \varphi_s(x) \quad (17)$$

и получая простые краевые задачи для коэффициентов разложений.

Задачи типа (15) и (16)–(17) решим при помощи метода пристрелки, осуществляя сведение задач к каноническим системам. При решении (16) и необходимости находить производные от смещений начального приближения использована сплайн-аппроксимация численно найденной из (15) функции u_0 .

Задача (16) линейно зависит от правой части $F = - (u'_0 g_1^{(1)})' - \kappa^2 g_2^{(1)} u_0$, и ее решение будем искать в виде

$$u_1 = \sum_{s=0}^N a_s u_{1s} + \sum_{s=0}^N b_s u_{2s}, \quad (18)$$

где u_{1s} — решение (16) при $g_1^{(1)} = \varphi_s(x)$, $g_2^{(1)} = 0$, а u_{2s} — решение (16), где $g_1^{(1)} = 0$, $g_2^{(1)} = \varphi_s(x)$.

При проведении вычислительных экспериментов будем использовать следующую систему функций $\varphi_s(x)$:

$$\varphi_s(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq s}}^N (x_k - x) / \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq s}}^N (x_k - x_s), \tag{19}$$

где в качестве точек коллокаций выбраны точки $x_k = k/N$.

При выборе аппроксимации поправок интерес будут представлять наиболее простые случаи $N = 1$, $N = 2$, дающие линейную и квадратичную аппроксимации для поправок. Конструкция функций (19) такова, что $\varphi_s(x_k) = \delta_{sk}$ и, следовательно, коэффициенты a_s , b_s — узловые значения функций поправок $g_1^{(1)}$, $g_2^{(1)}$ в точках $x_s = s/N$.

На основе соотношения $u_1(\xi_0) \approx f - u_0(\xi_0)$ составляется алгебраическая система для нахождения неизвестных коэффициентов a_s , b_s , $s = 0..N$

$$\sum_{s=0}^N a_s u_{1s}(\xi_0, \kappa_j) + \sum_{s=0}^N b_s u_{2s}(\xi_0, \kappa_j) = f(\kappa_j) - u_0(\xi_0, \kappa_j), \quad j = \overline{1, M}. \tag{20}$$

Система (20) имеет M строк и $2(N + 1)$ столбцов, $\kappa_j \in [\kappa_1, \kappa_2]$.

3. Результаты вычислительных экспериментов

Проведен ряд вычислительных экспериментов для разных законов неоднородности. Представим результаты некоторых из них.

Пусть $\xi_0 = 0.79$, функция g_2 задана и не требует восстановления ($g_2^{(1)} = 0$). Реализован итерационный алгоритм реконструкции функции g в классе квадратичных функций. Дополнительная информация задана в точках $\kappa_0 = 0$, $\kappa_1 = 0.65$, $\kappa_2 = 1.05$, $\kappa_3 = 1.45$. Уравнение (15) интегрируется явно при $\kappa = 0$, позволяя выписать решение в виде $u(x) = \int_0^x g_1^{-1}(x) dx$. Исходя из этого, находим начальное приближение по формуле $g_1^{(0)}(x) = \xi_0/f(0)$. На следующем этапе осуществляется поиск поправки в классе линейных функций ($N = 1$). Используя дополнительную информацию, заданную в точках κ_1 , κ_2 , получаем алгебраическую систему вида (20), решая которую, находим значения коэффициентов разложения a_0 , a_1 . Найденная поправка добавляется к начальному приближению и позволяет найти новое начальное приближение; при этом процесс продолжается до тех пор, пока очередная линейная поправка не будет по норме меньше 0.01. Затем начинается итерационный поиск поправок в классе квадратичных функций (третий этап), который также заканчивается по достижению нормы очередной поправки заданной погрешности. Здесь при формировании СЛАУ используется дополнительная информация об АЧХ, задаваемая в точках κ_1 , κ_2 , κ_3 .

На рис. 1 приведены результаты реконструкции монотонных функций $g_1 = 0.6 + e^x$ (рис. 1, а) и $g_1 = 3.2 - e^{0.8x}$ (рис. 1, б). Здесь и всюду далее использованы единые обозначения для искомой функции, начального приближения и результатов реконструкции.

Рассмотрим функцию $r(x) = 1.4 - 0.4 \sin(\pi x/2)$. На рис. 2 приведены результаты реконструкции монотонных функций $g_1(x) = r(x)$ (рис. 2, а) и $g_1(x) = r(1 - x)$ (рис. 2, б). Погрешность реконструкции функций в классе квадратичных, приведенных на рис. 1, 2, не превышает 2%, что можно трактовать как очень хороший результат восстановления.

На рис. 3 приведены результаты реконструкции немонотонных функций $g_1 = 1 + 0.8 \sin(\pi x)$ (рис. 3, а) и $g_1 = 1.8 - 0.8 \sin(\pi x)$ (рис. 3, б). Погрешность реконструкции функций в классе квадратичных, приведенных на рис. 3, не превышает 6% на концах интервала. Определенный интерес вызывает тот факт, что обе функции являются симметричными относительно середины интервала ($x = 0.5$), а результаты восстановления в классе линейных функций представлены возрастающей (рис. 3, а) и убывающей (рис. 3, б) функциями.

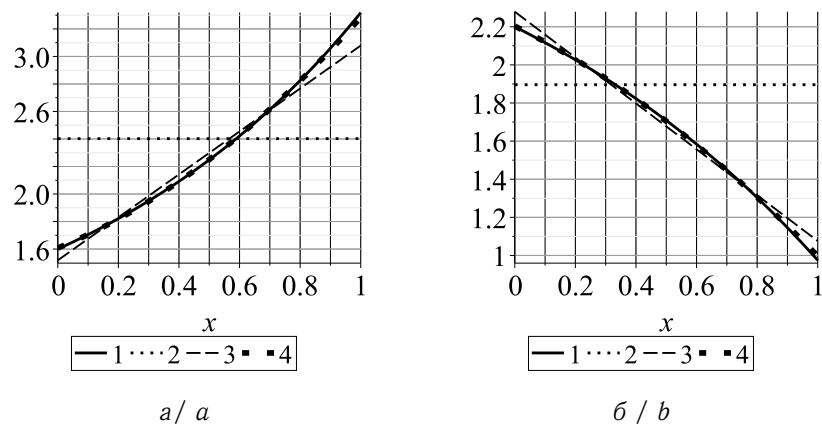


Рис. 1. Результаты реконструкции $g_1 = 0.6 + e^x$ (а) и $g_1 = 3.2 - e^{0.8x}$ (б): 1 – искомая функция; 2 – начальное приближение; 3, 4 – результаты реконструкции в классе линейных и квадратичных функций соответственно

Fig. 1. Reconstruction results $g_1 = 0.6 + e^x$ (a) and $g_1 = 3.2 - e^{0.8x}$ (b): 1 – required function; 2 – initial approximation; 3, 4 – reconstruction results in the class of linear and quadratic functions respectively

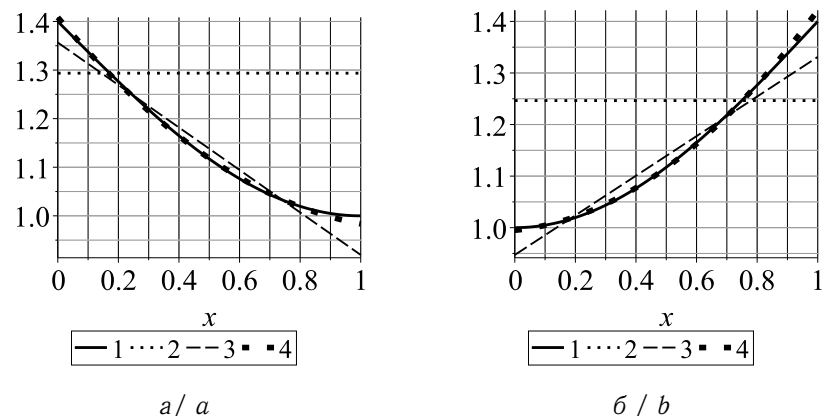


Рис. 2. Результаты реконструкции $g_1 = 1.4 - 0.4 \sin(\pi x/2)$ (а) и $g_1 = 1.4 - 0.4 \sin(\pi(1-x)/2)$ (б)

Fig. 2. Reconstruction results $g_1 = 1.4 - 0.4 \sin(\pi x/2)$ (a) and $g_1 = 1.4 - 0.4 \sin(\pi(1-x)/2)$ (b)

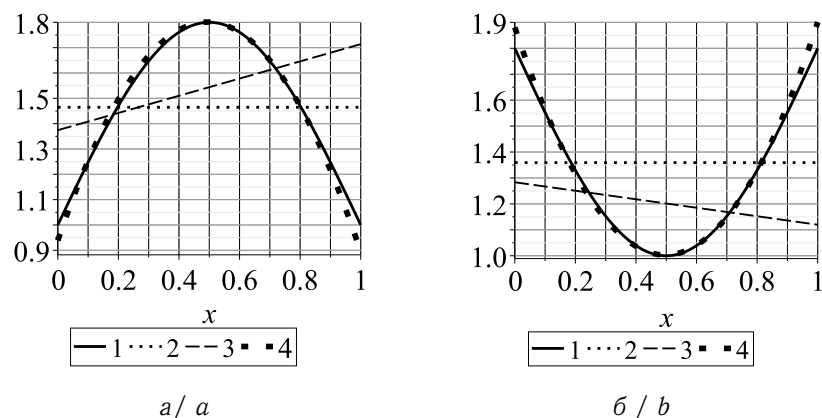


Рис. 3. Результаты реконструкции немонотонных функций $g_1 = 1 + 0.8 \sin(\pi x)$ (а) и $g_1 = 1.8 - 0.8 \sin(\pi x)$ (б)

Fig. 3. Results of reconstruction of non-monotonic functions $g_1 = 1 + 0.8 \sin(\pi x)$ (a) and $g_1 = 1.8 - 0.8 \sin(\pi x)$ (b)



Для завершения процесса реконструкции нужны дополнительные точки на АЧХ, чтобы можно было вычислить невязку на более широком частотном диапазоне. Так, для вышеприведенных случаев точное АЧХ и АЧХ, отвечающее решению обратной задачи в классе квадратичных функций, практически совпадают в промежутке от нуля до четвертого резонанса.

Аналогичным образом выполнена реконструкция функции $g_2(x)$ при заданной функции $g_1(x)$. Проведена серия вычислительных экспериментов по реконструкции возрастающих, убывающих и немонотонных функций. Принципиальных отличий в качестве реконструкции отмечено не было. Результаты вычислительного эксперимента приведены для случая двух немонотонных функций.

На рис. 4 приведены результаты реконструкции немонотонных функций $g_2 = 0.66 + 0.53 \sin(\pi x)$ (рис. 4, а) и $g_2 = 1.39 - 0.62 \sin(\pi x)$ (рис. 4, б). Дополнительная информация об АЧХ бралась в точках $\kappa_0 = 0, \kappa_1 = 0.65, \kappa_2 = 1.05, \kappa_3 = 1.45$ при $\xi = 0.89$. Результаты восстановления в классе линейных функций представлены убывающей (рис. 4, а) и возрастающей (рис. 4, б) функциями аналогично тому, как было при реконструкции функции $g_1(x)$ (см. рис. 3).

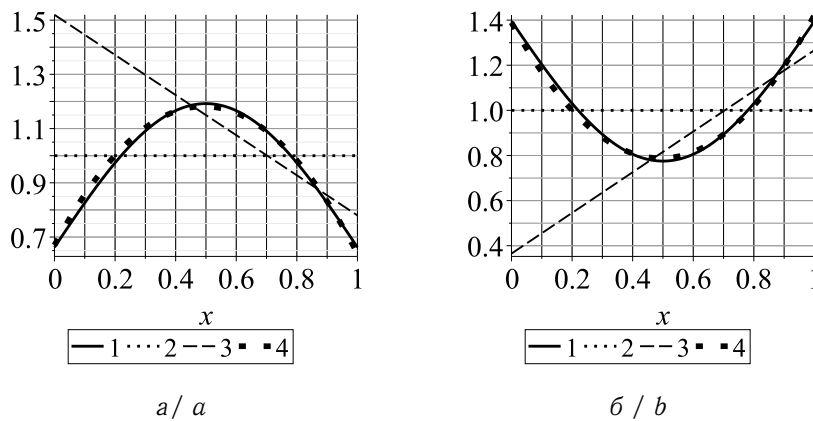


Рис. 4. Результаты реконструкции $g_2 = 0.66 + 0.53 \sin(\pi x)$ (а) и $g_2 = 1.39 - 0.62 \sin(\pi x)$ (б)

Fig. 4. Reconstruction results $g_2 = 0.66 + 0.53 \sin(\pi x)$ (a) and $g_2 = 1.39 - 0.62 \sin(\pi x)$ (b)

Результаты вычислительных экспериментов показали, что малая линейная поправка находится с высокой точностью за одну итерацию, точность реконструкции повышается при $\xi_0 \rightarrow 1$, а при $\xi_0 < 0.5$ схема практически перестает работать. По отношению к задачам о восстановлении одной функции выявлено, что, пропуская второй этап ($N = 1$) и сразу переходя к поиску поправки в классе квадратичных функций ($N = 2$), получаем систему, требующую регуляризации при решении. Причиной этой ситуации является недостаточно близкое к искомому решению начальное приближение.

Отметим, что применение регуляризации дает приемлемые результаты реконструкции в случае достаточной близости точки съема информации к точке нагружения.

Заключение

Представлен способ построения решения обратных задач в классе полиномиальных функций в случае, когда область задания дополнительной информации не совпадает с областью нагружения. Выполнена отдельная реконструкция двух функций в классе квадратичных функций.



Список литературы

1. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. Москва : Наука, 1986. 288 с.
2. Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма – Лиувилля и их приложения. Москва : Наука, 1984. 240 с.
3. *Kravchenko V. V.* Direct and Inverse Sturm – Liouville Problems. A Method of Solution. Cham : Birkhäuser, 2020. 154 p. (Frontiers in Mathematics). <https://doi.org/10.1007/978-3-030-47849-0>
4. Романов В. Г. Обратные задачи математической физики. Москва : Наука, 1984. 262 с.
5. Яхно В. Г. Обратные коэффициентные задачи для дифференциальных уравнений упругости. Новосибирск : Наука, 1990. 304 с.
6. *Vui H. D.* Inverse Problems in the Mechanics of Materials: An Introduction. Boca Raton, FL : CRC Press, 1994. 224 p.
7. *Isakov V.* Inverse Problems for Partial Differential Equations. Cham : Springer, 2017. 406 p. (Applied Mathematical Sciences, vol. 127). <https://doi.org/10.1007/978-3-319-51658-5>
8. *Bonnet M., Constantinescu A.* Inverse problems in elasticity // Inverse Problem. 2005. Vol. 21. P. 1–50. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/21/2/R01>
9. Юрко В. А. Введение в теорию обратных спектральных задач. Москва : Физматлит, 2007. 384 с.
10. *Bal G.* Introduction to Inverse Problems. New York : Columbia University, 2012. 205 p.
11. *Neto F. D. M., Neto A. J. S.* An Introduction to Inverse Problems with Applications. Berlin : Springer, 2013. 255 p.
12. *Кабанихин С. И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск : Изд-во Сибирского отд. РАН, 2018. 512 с.
13. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Численные методы решения некорректных задач. Москва : Наука, 1990. 230 с.
14. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. Москва : Едиториал УРСС, 2004. 480 с.
15. Ватульян А. О. Коэффициентные обратные задачи механики. Москва : Физматлит, 2019. 272 с.
16. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Коэффициентные обратные задачи термомеханики. Ростов-на-Дону ; Таганрог : Изд-во Южного федерального ун-та, 2022. 176 с.
17. Бондаренко А. Н., Бугуева Т. В., Дедок В. А. Нейросетевой подход к решению обратных задач теории аномальной диффузии // Сибирский журнал индустриальной математики. 2016. Т. 19, № 3 (67). С. 3–14. <https://doi.org/10.17377/sibjim.2016.19.301>, EDN: WHKNXJ
18. Богачев И. В., Ватульян А. О., Дударев В. В. Об одном методе идентификации свойств многослойных мягких биологических тканей // Российский журнал биомеханики. 2013. Т. 17, № 3. С. 37–48. EDN: RDMLID
19. *Sinkus R., Lorenzen J., Schrader D., Lorenzen M., Dargatz M., Holz D.* High-resolution tensor MR elastography for breast tumour detection // Physics in Medicine & Biology. 2000. Vol. 45, iss. 6. P. 1649–1664. <https://doi.org/10.1088/0031-9155/45/6/317>
20. *Manduca A., Oliphant T. E., Dresner M. A., Mahowald J. L., Kruse S. A., Amromin E., Felmlee J. P., Greenleaf J. F., Ehman R. L.* Magnetic resonance elastography: Non-invasive mapping of tissue elasticity // Medical Image Analysis. 2001. Vol. 5, iss. 4. P. 237–254. [https://doi.org/10.1016/S1361-8415\(00\)00039-6](https://doi.org/10.1016/S1361-8415(00)00039-6)
21. Сарвазян А. П. Низкочастотные акустические характеристики биологических тканей // Механика полимеров. 1975. № 4. С. 691–695.
22. *Sarvazyan A., Goukassian D., Maevsky G.* Elasticity imaging as a new modality of medical imaging for cancer detection // Proceedings of an International Workshop on Interaction of Ultrasound with Biological Media. Valenciennes, France, 1994. P. 69–81.
23. *Sarvazyan A. P., Rudenko O. V., Swanson S. D., Fowlkes J. B., Emelianov S. Y.* Shear wave elasticity imaging: A new ultrasonic technology of medical diagnostics // Ultrasound in Medicine & Biology. 1998. Vol. 24, iss. 9. P. 1419–1435. [https://doi.org/10.1016/S0301-5629\(98\)00110-0](https://doi.org/10.1016/S0301-5629(98)00110-0), EDN: LFDAJV
24. *Arani A., Manduca A., Ehman R. L., Huston III J.* Harnessing brain waves: A review of brain magnetic resonance elastography for clinicians and scientists entering the field // The British Journal of Radiology. 2021. Vol. 94. Art. 20200265. <https://doi.org/10.1259/bjr.20200265>
25. *Perkowski Z., Czabak M.* Description of behaviour of timber-concrete composite beams including interlayer slip, uplift, and long-term effects: Formulation of the model and coefficient inverse problem // Engineering Structures. 2019. Vol. 194. P. 230–250. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.05.058>
26. *Dudarev V. V., Vatulyan A. O., Mnukhin R. M., Nedin R. D.* Concerning an approach to identifying



- MR elastography for breast tumour detection. *Physics in Medicine & Biology*, 2000, vol. 45, iss. 6, pp. 1649–1664. <https://doi.org/10.1088/0031-9155/45/6/317>
20. Manduca A., Oliphant T. E., Dresner M. A., Mahowald J. L., Kruse S. A., Amromin E., Felmlee J. P., Greenleaf J. F., Ehman R. L. Magnetic resonance elastography: Non-invasive mapping of tissue elasticity. *Medical Image Analysis*, 2001, vol. 5, iss. 4, pp. 237–254. [https://doi.org/10.1016/S1361-8415\(00\)00039-6](https://doi.org/10.1016/S1361-8415(00)00039-6)
 21. Sarvazyan A. P. Low-frequency acoustic characteristics of biological tissues. *Mekhanika polimerov* [Polymer Mechanics], 1975, iss. 4, pp. 691–695. (in Russian).
 22. Sarvazyan A., Goukassian D., Maevsky G. Elasticity imaging as a new modality of medical imaging for cancer detection. In: *Proceedings of an International Workshop on Interaction of Ultrasound with Biological Media*. Valenciennes, France, 1994, pp. 69–81.
 23. Sarvazyan A. P., Rudenko O. V., Swanson S. D., Fowlkes J. B., Emelianov S. Y. Shear wave elasticity imaging: A new ultrasonic technology of medical diagnostics. *Ultrasound in Medicine & Biology*, 1998, vol. 24, iss. 9, pp. 1419–1435. [https://doi.org/10.1016/S0301-5629\(98\)00110-0](https://doi.org/10.1016/S0301-5629(98)00110-0), EDN: LFD AJV
 24. Arani A., Manduca A., Ehman R. L., Huston III J. Harnessing brain waves: A review of brain magnetic resonance elastography for clinicians and scientists entering the field. *The British Journal of Radiology*, 2021, vol. 94, art. 20200265. <https://doi.org/10.1259/bjr.20200265>
 25. Perkowski Z., Czabak M. Description of behaviour of timber-concrete composite beams including interlayer slip, uplift, and long-term effects: Formulation of the model and coefficient inverse problem. *Engineering Structures*, 2019, vol. 194, pp. 230–250. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.05.058>
 26. Dudarev V. V., Vatulyan A. O., Mnukhin R. M., Nedin R. D. Concerning an approach to identifying the Lamé parameters of an elastic functionally graded cylinder. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2020, vol. 43, iss. 11, pp. 6861–6870. <https://doi.org/10.1002/mma.6428>
 27. Vatulyan A. O., Dudarev V. V., Mnukhin R. M. Identification of characteristics of a functionally graded isotropic cylinder. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 2021, vol. 17, iss. 2, pp. 321–332. <https://doi.org/10.1007/s10999-020-09527-5>
 28. Vatulyan A. O., Yurov V. O. On the reconstruction of material properties of a radially inhomogeneous cylindrical waveguide. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2021, vol. 44, iss. 6, pp. 4756–4769. <https://doi.org/10.1002/mma.7067>
 29. Vatulyan A. O., Yurov V. O. On the determination of the mechanical characteristics of rod elements made of functionally graded materials. *Mechanics of Solids*, 2020, vol. 55, iss. 6, pp. 907–917. <https://doi.org/10.3103/S0025654420660036>, EDN: FRQJDG
 30. Vatulyan A. O. *Obratnye zadachi v mekhanike deformiruemogo tverdogo tela* [Inverse Problems in the Mechanics of Deformable Solids]. Moscow, Fizmatlit, 2007. 223 p. (in Russian). EDN: UGLKIJ

Поступила в редакцию / Received 26.11.2023

Принята к публикации / Accepted 28.12.2023

Опубликована / Published 31.05.2024