$$\sigma_{\alpha\alpha} = \frac{a_{22}}{\Delta_0}\epsilon_{\alpha\alpha} - \frac{a_{12}}{\Delta_0}\epsilon_{\beta\beta} - \left[\frac{\alpha_\alpha a_{22} - \alpha_\beta a_{12}}{\Delta_0}\right]\Theta\sigma_{\beta\beta} =$$
$$= -\frac{a_{12}}{\Delta_0}\epsilon_{\alpha\alpha} - \frac{a_{12}}{\Delta_0}\epsilon_{\beta\beta} - \left[\frac{\alpha_\beta a_{11} - \alpha_\alpha a_{12}}{\Delta_0}\right]\Theta\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{a_{45}+a_{44}}\epsilon_{\alpha\beta},$$
$$\sigma_{\alpha z} = \frac{1}{a_{67}+a_{66}}\epsilon_{\alpha z}, \quad \sigma_{\beta z} = \frac{1}{a_{89}+a_{99}}\epsilon_{\beta z},$$
$$m_{\alpha\alpha} = \frac{b_{11}\left(b_{11}b_{33} - b_{23}^2\right)}{\Delta}\chi_{\alpha\alpha} - \frac{b_{12}\left(b_{12}b_{33} - b_{13}b_{23}\right)}{\Delta}\chi_{\beta\beta} + \frac{b_{13}\left(b_{12}b_{23} - b_{13}b_{22}\right)}{\Delta}\chi_{zz}, \tag{7}$$
$$m_{\beta\beta} = -\frac{b_{12}\left(b_{12}b_{33} - b_{23}b_{13}\right)}{\Delta}\chi_{\alpha\alpha} + \frac{b_{22}\left(b_{11}b_{33} - b_{13}^2\right)}{\Delta}\chi_{\beta\beta} - \frac{b_{23}\left(b_{11}b_{22} - b_{13}b_{12}\right)}{\Delta}\chi_{zz},$$
$$m_{zz} = \frac{b_{13}\left(b_{12}b_{32} - b_{22}b_{13}\right)}{\Delta}\chi_{\alpha\alpha} - \frac{b_{23}\left(b_{11}b_{23} - b_{12}b_{13}\right)}{\Delta}\chi_{\beta\beta} - \frac{b_{33}\left(b_{11}b_{22} - b_{12}^2\right)}{\Delta}\chi_{zz},$$
$$m_{\alpha\beta} = \frac{1}{b_{45}+b_{44}}\chi_{\alpha\beta}, \quad m_{\alpha z} = \frac{1}{b_{67}+b_{66}}\chi_{\alpha z}, \quad m_{\beta z} = \frac{1}{b_{89}+b_{99}}\chi_{\beta z},$$

где $\Delta_0 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$, $\Delta = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{vmatrix}$, $\Theta = \Theta(\alpha, \beta, z)$ — известная функция абсолютной температуры оболочки α_α, α_β — коэффициенты теплового расширения материала в соответствующих направлениях.

Введем обозначения силовых и моментных усилий и моментов:

$$\{N_{\alpha\alpha}, M_{\alpha\alpha}\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha\alpha} z^{\{0,1\}}\, dz, \quad Q_{z\alpha} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{z\alpha} k_s\, dz, \quad \{Y_{\alpha\alpha}, J_{\alpha\alpha}\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} m_{\alpha\alpha} z^{\{0,1\}}\, dz,$$
$$\{Y_{z\alpha}, J_{z\alpha}\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} m_{z\alpha} k_s z^{\{0,1\}}\, dz, \quad \{T, H\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha\beta} z^{\{0,1\}} dz, \quad Y_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} m_{\alpha\beta}\, dz, \tag{8}$$
$$Y_{zz} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} m_{zz}\, dz, \quad \alpha \leftrightarrows \beta.$$

Коэффициент k_s характеризует распределение касательных напряжений по толщине оболочки (в настоящей работе принято $k_s = 8/9$ [24]).

Уравнения движения сплошной микрополярной орртортопной цилиндрической оболочки с учетом температурных воздействий, граничные и начальные условия получим из вариационного принципа Гамильтона – Остроградского [25, 26]:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta K - \delta U + \delta W_\epsilon + \delta W_q)\, dt = 0, \tag{9}$$

здесь K — кинетическая энергия, U — потенциальная энергия, W — работа внешних сил, связанная с распределенными силами (W_q) и диссипацией энергии (W_ϵ). С учетом моментной теории [27] потенциальная энергия U для бесконечно малых деформаций представима в виде

$$U = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\sigma_{ij}\epsilon_{ij} + m_{ij}\chi_{ij}\right)\, d\Omega.$$

Кинетическая энергия:

$$K = \frac{1}{2}\rho \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right] d\Omega,$$

вариация работы внешних сил:

$$\delta W_q = \int_0^{2\pi}\int_0^b q(\alpha,\beta,t)\delta w\, d\alpha\, d\beta, \quad \delta W_\epsilon = \int_\Omega \rho\epsilon \frac{\partial w}{\partial t}\delta w\, d\Omega,$$

ϵ — коэффициент диссипации, ρ — плотность материала оболочки, $q(\alpha,\beta,t)$ — внешняя нормальная нагрузка.

Осуществляя варьирование, собирая коэффициенты при одинаковых вариациях, получим уравнения движения гладкой ортотропной микрополярной цилиндрической оболочки с учетом температурных воздействий:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial N_{\alpha\alpha}}{\partial\alpha} + \frac{1}{R}\frac{\partial T}{\partial\beta} + \frac{1}{2R^2}\left(\frac{\partial Y_{zz}}{\partial\beta} + \frac{\partial^2 Y_{z\beta}}{\partial\beta^2} - \frac{\partial Y_{\beta\beta}}{\partial\beta}\right) + \frac{1}{2R}\frac{\partial^2 Y_{z\alpha}}{\partial\alpha\partial\beta} = \rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2};\\
\frac{1}{R}\frac{\partial N_{\beta\beta}}{\partial\beta} + \frac{\partial T}{\partial\alpha} + \frac{Q_{z\beta}}{2R} - \frac{1}{2R}\frac{\partial Y_{\alpha\alpha}}{\partial\alpha} + \frac{1}{2R}\frac{\partial Y_{\beta\beta}}{\partial\alpha} -\\
-\frac{1}{2R^2}\frac{\partial Y_{\alpha\beta}}{\partial\beta} - \frac{Y_{z\alpha}}{2R^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Y_{z\alpha}}{\partial\alpha^2} - \frac{1}{2R}\frac{\partial^2 Y_{z\beta}}{\partial\alpha\partial\beta} = \rho h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2};\\
\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(N_{\alpha\alpha}\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right) + \frac{2}{R}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(T\frac{\partial w}{\partial\beta}\right) + \frac{2}{R}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(T\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(N_{\beta\beta}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right) - \frac{1}{R}N_{\beta\beta} +\\
+\frac{\partial Q_{z\alpha}}{\partial\alpha} + \frac{1}{R}\frac{\partial Q_{z\beta}}{\partial\beta} - \frac{1}{2R}\frac{\partial^2 Y_{\alpha\alpha}}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{1}{2R}\frac{\partial^2 Y_{\beta\beta}}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Y_{\alpha\beta}}{\partial\alpha^2} - \frac{1}{2R^2}\frac{\partial^2 Y_{\alpha\beta}}{\partial\beta^2} -\\
-\frac{1}{2R^2}\frac{\partial Y_{z\alpha}}{\partial\beta} + \frac{1}{2R}\frac{\partial Y_{z\beta}}{\partial\alpha} + q = \rho h\epsilon\frac{\partial w}{\partial t} + \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2};\\
\frac{\partial M_{\alpha\alpha}}{\partial\alpha} + \frac{1}{R}\frac{\partial H}{\partial\beta} - Q_{z\alpha} + \frac{1}{2R}\frac{\partial Y_{\beta\beta}}{\partial\beta} + \frac{1}{2}\frac{\partial Y_{\alpha\beta}}{\partial\alpha} + \frac{1}{2R}\frac{\partial^2 J_{z\alpha}}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{1}{2R^2}\frac{\partial^2 J_{z\beta}}{\partial\beta^2} -\\
-\frac{1}{2R}\frac{\partial Y_{zz}}{\partial\beta} + \frac{Y_{z\beta}}{2R} = \frac{\rho h^3}{12}\frac{\partial^2\gamma_\alpha}{\partial t^2};\\
\frac{\partial H}{\partial\alpha} + \frac{1}{R}\frac{\partial M_{\beta\beta}}{\partial\beta} - Q_{z\beta} - \frac{1}{2}\frac{\partial Y_{\alpha\alpha}}{\partial\alpha} + \frac{1}{2R}\frac{\partial J_{\beta\beta}}{\partial\alpha} - \frac{1}{2R}\frac{\partial Y_{\alpha\beta}}{\partial\beta} + \frac{Y_{z\alpha}}{2R} +\\
+\frac{1}{2}\frac{\partial Y_{zz}}{\partial\alpha} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 J_{z\alpha}}{\partial\alpha^2} - \frac{1}{2R}\frac{\partial^2 J_{z\beta}}{\partial\alpha\partial\beta} = \frac{\rho h^3}{12}\frac{\partial^2\gamma_\beta}{\partial t^2},
\end{gathered}$$

и граничные условия:

$$\begin{gathered}
\delta u = 0 \quad \text{или} \quad \left\{N_{\alpha\alpha} + \frac{1}{2R}\frac{\partial Y_{z\alpha}}{\partial\beta}\right\}_{\Gamma_\alpha} = 0,\ \left\{-T + \frac{Y_{\beta\beta}}{2R} - \frac{1}{2R}\frac{\partial Y_{z\beta}}{\partial\beta} - \frac{1}{2R}\frac{\partial Y_{z\alpha}}{\partial\alpha} - \frac{Y_{zz}}{2}\right\}_{\Gamma_\beta} = 0;\\
\frac{\partial\delta u}{\partial\alpha} = 0 \quad \text{или} \quad \{Y_{z\alpha}\}_{\Gamma_\beta} = 0; \quad \frac{\partial\delta u}{\partial\beta} = 0 \quad \text{или} \quad \{Y_{z\alpha}\}_{\Gamma_\alpha} = 0,\ \{Y_{z\beta}\}_{\Gamma_\beta} = 0;\\
\delta v = 0 \quad \text{или} \quad \left\{\frac{Y_{z\alpha}}{2R} - \frac{Y_{\beta\beta}}{2R} - T + \frac{1}{2}\frac{\partial Y_{z\alpha}}{\partial\alpha} + \frac{1}{2R}\frac{\partial Y_{z\beta}}{\partial\beta}\right\}_{\Gamma_\alpha} = 0,\ \left\{N_{\beta\beta} - \frac{Y_{\alpha\beta}}{2R} - \frac{1}{2}\frac{\partial Y_{z\beta}}{\partial\alpha}\right\}_{\Gamma_\beta} = 0;\\
\frac{\partial\delta v}{\partial\alpha} = 0 \quad \text{или} \quad \left\{Y_{z\alpha} + \frac{1}{2}Y_{z\beta}\right\}_{\Gamma_\alpha} = 0,\ \{Y_{z\beta}\}_{\Gamma_\beta} = 0;\\
\delta\gamma_\alpha = 0 \text{ или } \left\{M_{\alpha\alpha} + Y_{\alpha\beta} + \frac{1}{2R}\frac{\partial J_{z\alpha}}{\partial\beta}\right\}_{\Gamma_\alpha} = 0,\ \left\{\frac{H}{R} - \frac{Y_{\beta\beta}}{2R} - \frac{1}{2R}\frac{\partial J_{z\alpha}}{\partial\alpha} - \frac{1}{2}\frac{\partial J_{z\beta}}{\partial\beta} + \frac{Y_{zz}}{2R}\right\}_{\Gamma_\beta} = 0;\\
\frac{\partial\delta\gamma_\alpha}{\partial\beta} = 0 \quad \text{или} \quad \{J_{z\alpha}\}_{\Gamma_\beta} = 0; \quad \frac{\partial\delta\gamma_\alpha}{\partial\beta} = 0 \quad \text{или} \quad \{J_{z\alpha}\}_{\Gamma_\alpha} = 0,\ \{J_{z\beta}\}_{\Gamma_\beta} = 0;\\
\delta\gamma_\beta = 0 \quad \text{или} \quad \left\{H - \frac{Y_{\beta\beta}}{2} - J_{\beta\beta} - \frac{Y_{zz}}{2} + \frac{1}{2}\frac{\partial J_{zz}}{\partial\alpha} - \frac{1}{2R}\frac{\partial J_{z\beta}}{\partial\beta}\right\}_{\Gamma_\alpha} = 0,
\end{gathered}$$

$$\left\{ M_{\beta\beta} - Y_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\frac{\partial J_{z\beta}}{\partial \alpha} \right\}_{\Gamma_\beta} = 0; \tag{10}$$

$$\frac{\partial \delta\gamma_\beta}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{или} \quad \{J_{z\alpha}\}_{\Gamma_\alpha} = 0,\ \{J_{z\beta}\}_{\Gamma_\beta} = 0; \quad \frac{\partial \delta\gamma_\beta}{\partial \beta} = 0 \quad \text{или} \quad \{J_{z\beta}\}_{\Gamma_\beta} = 0;$$

$$\delta w = 0 \quad \text{или} \quad \left\{ -N_{\alpha\alpha}\frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{2T}{R}\frac{\partial w}{\partial \beta} - Q_{z\alpha} + \frac{1}{2R}\frac{\partial Y_{\alpha\alpha}}{\partial \beta} - \frac{1}{2R}\frac{\partial Y_{\beta\beta}}{\partial \beta} - \frac{1}{2}\frac{\partial Y_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} - \frac{Y_{z\beta}}{2R} \right\}_{\Gamma_\alpha} = 0,$$

$$\left\{ -N_{\beta\beta}\frac{\partial w}{\partial \alpha} - 2T\frac{\partial w}{\partial \alpha} - Q_{z\alpha} + \frac{1}{2}\frac{\partial Y_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} - \frac{1}{2}\frac{\partial Y_{\beta\beta}}{\partial \alpha} - \frac{1}{2R}\frac{\partial Y_{\alpha\beta}}{\partial \beta} - \frac{Y_{z\alpha}}{2R} \right\}_{\Gamma_\beta} = 0;$$

$$\frac{\partial \delta w}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{или} \quad \{Y_{\alpha\beta}\}_{\Gamma_\alpha} = 0, \quad \{-Y_{\alpha\alpha} + Y_{\beta\beta}\}_{\Gamma_\beta} = 0;$$

$$\frac{\partial \delta w}{\partial \beta} = 0 \quad \text{или} \quad \{-Y_{\alpha\alpha} + Y_{\beta\beta}\}_{\Gamma_\alpha} = 0, \quad \{Y_{\alpha\beta}\}_{\Gamma_\beta} = 0.$$

Для построения математической модели колебаний ортотропных сетчатых микрополярных цилиндрических оболочек в условиях температурных воздействий к уравнениям движения присоединим стационарное трехмерное уравнение теплопроводности

$$\lambda_\alpha \left(\frac{1}{R}\frac{\partial \Theta}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \alpha^2} \right) + \lambda_\beta \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \beta^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = 0,$$

где λ_α, λ_β, λ_z — компоненты тензора коэффициентов теплопроводности.

К уравнению теплопроводности присоединим граничные условия первого рода

$$\Theta_\Pi(\alpha, \beta, z) = F_\Pi(\alpha, \beta, z).$$

3. Математическая модель колебаний сетчатой микрополярной оболочки в условиях температурных воздействий

Предположим, что рассматриваемая оболочка состоит из n семейств густо расположенных ребер δ_j, a_j, φ_j — расстояние между ребрами, ширина ребер, угол между осью α и осью ребер j-го семейства соответственно (рис. 2). Опираясь на континуальную модель Г. И. Пшеничного [28], заменим регулярную систему ребер сплошным слоем.

Деформация оси какого-либо ребра равна деформации линии, совпадающей с осью этого стержня в расчетной модели. Будем считать, что одна из главных центральных осей поперечных сечений ребер оболочки совпадает с направлением нормали к срединной поверхности оболочки. В таком случае напряжения, возникающие в эквивалентной гладкой оболочке, связанные с напряжениями в ребрах, составляющих углы φ_j с осью α, будут иметь вид (1), (2). Данные соотношения получаются из условий равенства сил, действующих на одинаковых площадках оболочки, состоящей из системы ребер, и эквивалентной ей гладкой оболочки:

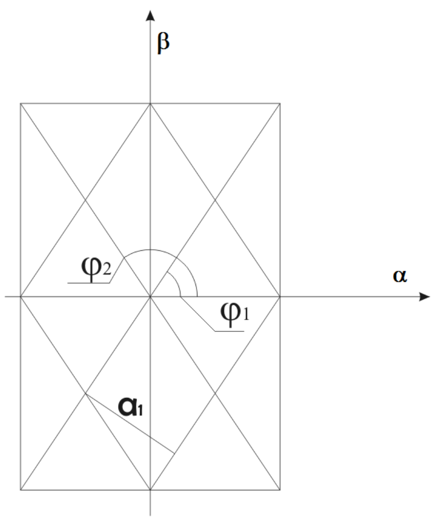

Рис. 2. Структура сетки цилиндрической оболочки
Fig. 2. Cylindrical shell mesh structure

$$\{\sigma_{\alpha\alpha}, m_{\alpha\alpha}\} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\{\sigma^j, m^j\}\delta_j \cos^2\varphi_j}{a_j}, \quad \{\sigma_{\beta\beta}, m_{\beta\beta}\} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\{\sigma^j, m^j\}\delta_j \sin^2\varphi_j}{a_j},$$

$$\{\sigma_{\alpha\beta}, m_{\alpha\beta}\} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\{\sigma^j, m^j\}\delta_j \cos\varphi_j \sin\varphi_j}{a_j}, \quad m_{zz} = \sum_{j=1}^{n} \frac{m_z^j \delta_j}{a_j},$$
$$\{\sigma_{z\alpha}, m_{z\alpha}\} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\{\sigma_z^j, m_z^j\}\delta_j \cos\varphi_j}{a_j}, \quad \{\sigma_{z\beta}, m_{z\beta}\} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\{\sigma_z^j, m_z^j\}\delta_j \sin\varphi_j}{a_j}. \tag{11}$$

Дополнительные условия статической эквивалентности исходной сетчатой оболочки и эквивалентной ей сплошной:

$$\sigma^j = \sigma_{\alpha\alpha}\cos^2\varphi_j + \sigma_{\beta\beta}\sin^2\varphi_j + \sigma_{\alpha\beta}\cos\varphi_j\sin\varphi_j, \quad \sigma_z^j = \sigma_{z\alpha}\cos\varphi_j + \sigma_{z\beta}\sin\varphi_j,$$
$$m^j = m_{\alpha\alpha}\cos^2\varphi_j + m_{\beta\beta}\sin^2\varphi_j + m_{\alpha\beta}\cos\varphi_j\sin\varphi_j, m_z^j = m_{z\alpha}\cos\varphi_j + m_{z\beta}\sin\varphi_j + m_{zz}, \tag{12}$$

получим с помощью метода множителей Лагранжа из условия достижения функционалом стационарного значения. При построении функционала используется выражение для потенциальной энергии деформации, выраженной через напряжения и моменты высших порядков.

Введем следующие обозначения:

$$A_{sk} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta_j \cos^s\varphi_j \sin^k\varphi_j}{a_j} \quad s,k = \overline{0,4}, \quad C1 = \frac{a_{22}}{\Delta_0}, \quad C_2 = -\frac{a_{12}}{\Delta_0},$$
$$C_3 = -\frac{a_{12}}{\Delta_0}, \quad C_4 = \frac{1}{a_{45}+a_{44}}, \quad C_5 = \frac{1}{a_{67}+a_{66}}, \quad C_6 = \frac{1}{a_{89}+a_{99}},$$
$$B_1 = \frac{b_{11}\left(b_{11}b_{33} - b_{23}^2\right)}{\Delta}, \quad B_2 = -\frac{b_{12}\left(b_{12}b_{33} - b_{13}b_{23}\right)}{\Delta}, \quad B_3 = \frac{b_{13}\left(b_{12}b_{23} - b_{13}b_{22}\right)}{\Delta},$$
$$B_4 = \frac{b_{22}\left(b_{11}b_{33} - b_{13}^2\right)}{\Delta}, \quad B_5 = -\frac{b_{23}\left(b_{11}b_{22} - b_{13}b_{12}\right)}{\Delta}, \quad B_6 = -\frac{b_{33}\left(b_{11}b_{22} - b_{12}^2\right)}{\Delta},$$
$$B_7 = \frac{1}{b_{45}+b_{44}}, \quad B_8 = \frac{1}{b_{67}+b_{66}}, \quad B_9 = \frac{1}{b_{89}+b_{99}}.$$

Жесткость стержней на изгиб в плоскости, касательной к срединной поверхности оболочки, не учитывается, поэтому порядки систем дифференциальных уравнений, описывающих поведение сетчатых и сплошных оболочек, совпадают. При этом совпадают и формулировки граничных условий соответствующих краевых задач [28].

Учитывая обозначения и (3)–(9), (11), (12), можно записать выражения для классических усилий и моментов, а также усилий, вызванных моментными напряжениями, для цилиндрической гладкой оболочки, эквивалентной исходной сетчатой (отметим, что в свойствах гомогенизированной оболочки температурный фактор не учитывается):

$$N_{\alpha\alpha}^s = \frac{h}{2}\left[\frac{2(A_{22}C_3 + A_{40}C_2)}{R}\left(-w + \frac{\partial v}{\partial\beta} + \frac{1}{2R}\left(\frac{\partial w}{\partial\beta}\right)^2\right) + A_{31}C_4\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial\beta} + \frac{\partial v}{\partial\alpha} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{2}{R}\frac{\partial w}{\partial\alpha}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right) + (A_{40}C_1 + A_{22}C_2)\left(2\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \left(\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)^2\right)\right];$$
$$M_{\alpha\alpha}^s = \frac{h^3}{24}\left[A_{31}C_4\left(\frac{1}{R}\frac{\partial\gamma_\alpha}{\partial\beta} + \frac{\partial\gamma_\beta}{\partial\alpha}\right) + 2(A_{40}C_2 + A_{22}C_3)\left(\frac{1}{R}\frac{\partial\gamma_\beta}{\partial\beta} - \frac{\partial\gamma_\alpha}{\partial\alpha}\right)\right];$$
$$N_{\beta\beta}^s = N_{\alpha\alpha}^s; \quad M_{\beta\beta}^s = M_{\alpha\alpha}^s \quad \text{с заменой} \quad A_{40} \to A_{22}, \quad A_{22} \to A_{04}, \quad A_{31} \to A_{13};$$
$$T^s = N_{\alpha\alpha}^s; \quad H^s = M_{\alpha\alpha}^s \quad \text{с заменой} \quad A_{40} \to A_{31}, \quad A_{22} \to A_{13}, \quad A_{31} \to A_{22};$$
$$Q_{z\alpha}^s = \frac{hk_s}{2}\left[A_{20}C_5\left(\gamma_\alpha + \frac{\partial w}{\partial\alpha}\right) + A_{11}C_6\left(\gamma_\beta - \frac{v}{2R} + \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right)\right], \quad Q_{z\beta}^s = Q_{z\alpha}^s$$
$$\text{с заменой} \quad A_{20} \to A_{11}, \quad A_{11} \to A_{02};$$

$$Y^s_{\alpha\alpha} = \frac{h}{4}\left[\frac{2(A_{40}(B_2 - B_3) + A_{22}(B_4 - B_5))}{R}\frac{\partial\gamma_\alpha}{\partial\beta} + 2A_{40}(B_3 - B_1)\frac{\partial\gamma_\beta}{\partial\alpha} + \right.$$
$$+2A_{22}(B_5 - B_2)\frac{\partial\gamma_\beta}{\partial\alpha} + A_{31}B_7\left(-\frac{1}{R}\frac{\partial\gamma_\beta}{\partial\beta} - \frac{1}{R^2}\frac{\partial v}{\partial\beta} + \frac{\partial\gamma_\alpha}{\partial\alpha} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}\right) -$$
$$-\frac{2(A_{40}(B_1 - B_2) + A_{22}(B_2 - B_4))}{R}\frac{\partial v}{\partial\alpha} + \frac{2\,(A_{40}(B_2 - B_3) + A22(B_4 - B_5))}{R^2}\frac{\partial u}{\partial\beta} +$$
$$\left. + \frac{2(A_{40}(B_1 - B_2) + A_{22}(B_2 - B_4))}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta\partial\alpha}\right];$$
$$Y^s_{\beta\beta} = Y^s_{\alpha\alpha}, \quad \text{с заменой} \quad A_{40} \to A_{22}, \quad A_{22} \to A_{04}, \quad A_{31} \to A_{13};$$
$$Y^s_{\alpha\beta} = Y^s_{\alpha\alpha}, \quad \text{с заменой} \quad A_{40} \to A_{31}, \quad A_{22} \to A_{13}, \quad A_{31} \to A_{22};$$
$$Y^s_{z\alpha} = \frac{h}{4}\left[\frac{A_{11}B_9}{R}\left(-\gamma_\alpha - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{\partial w}{\partial\alpha}\right) + \frac{2A_{10}(B_3) - B_5}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta} + \right.$$
$$+\frac{2A_{10}(B_5 - B_6)}{R}\left(\frac{\partial\gamma_\alpha}{\partial\beta} - \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial\beta}\right) + 2A_{10}(B_3 - B_6)\frac{\partial\gamma_\beta}{\partial\alpha} + \frac{2A_{10}(B_3) + B_5}{R}\frac{\partial v}{\partial\beta} +$$
$$\left. + A_{20}B_8\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2} - \frac{1}{R^2}\frac{\partial w}{\partial\beta} - \frac{\gamma_\beta}{R} + \frac{v}{R^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}\right)\right];$$
$$Y^s_{z\beta} = Y^s_{z\alpha} \quad \text{с заменой} \quad A_{11} \to A_{02}, \quad A_{02} \to A_{11}, \quad A_{10} \to A_{01};$$
$$Y^s_{zz} = Y^s_{z\alpha} \quad \text{с заменой} \quad A_{11} \to A_{01}, \quad A_{02} \to A_{10}, \quad A_{10} \to A_{00};$$
$$J^s_{\beta\beta} = \frac{h^3(A_{22}B_2 + A_{04}B_4)}{24R}\frac{\partial\gamma_\beta}{\partial\alpha};$$
$$J^s_{z\alpha} = \frac{h^3}{48}\left[-\frac{A_{11}B_9}{R}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial^2\gamma_\alpha}{\partial\beta^2} - \frac{\partial^2\gamma_\beta}{\partial\alpha\partial\beta}\right) - \frac{A_{20}B_8}{R}\left(\frac{\partial^2\gamma_\alpha}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{\partial^2\gamma_\beta}{\partial\alpha^2}\right) + \frac{2A_{10}B_5}{R}\frac{\partial\gamma_\beta}{\partial\alpha}\right];$$
$$J^s_{z\beta} = J^s_{z\alpha} \quad \text{с заменой} \quad A_{11} \to A_{02}, \quad A_{20} \to A_{11}, \quad A_{10} \to A_{01}.$$

Подставляя полученные выражения в уравнения движения элемента гладкой оболочки, получим разрешающую систему уравнений движения микрополярной ортотропной цилиндрической оболочки модели С. П. Тимошенко, эквивалентной исходной сетчатой оболочке, с учетом температурных воздействий в перемещениях.

4. Численный эксперимент

Методом установления [29] исследуется поведение цилиндрической микрополярной оболочки, состоящей из двух семейств взаимоперпендикулярных ребер под действием статической нормальной распределенной нагрузки в стационарном температурном поле. Торцы оболочки считаем шарнирно опертыми. Граничные условия на основании обобщенных граничных условий (10) в таком случае будут иметь вид

$$N_{\alpha\alpha} + \frac{1}{2R}\frac{\partial Y_{z\alpha}}{\partial\beta} = 0; \quad M_{\alpha\alpha} + Y_{\alpha\beta} + \frac{1}{2R}\frac{\partial J_{z\alpha}}{\partial\beta} = 0; \quad Y_{\alpha z} = Y_{\alpha_\beta} = J_{\alpha z} = 0;$$
$$\frac{\partial u(\alpha,\beta)}{\partial\alpha} = \frac{\partial v(\alpha,\beta)}{\partial\beta} = \frac{\partial w(\alpha,\beta)}{\partial\beta} = \frac{\partial\gamma_\alpha(\alpha,\beta)}{\partial\alpha} = \frac{\partial\gamma_\beta(\alpha,\beta)}{\partial\beta} = 0;$$
$$v(\alpha,\beta) = w(\alpha,\beta) = \gamma_\beta(\alpha,\beta) = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = 0,\ \alpha = b.$$

Рассматриваются нулевые начальные условия.

Температурное поле находится из стационарного уравнения теплопроводности с граничными условиями первого рода. Далее находятся температурные усилия и моменты, которые подставляются в качестве нагрузки в систему уравнений движения элемента оболочки. Дифференциальная задача в частных производных, описывающая движение элемента оболочки, сводится к задаче Коши методом Бубнова – Галеркина в высших приближениях.

Для удовлетворения граничных условий компоненты вектора перемещений и углы поворота выбираются в следующем виде:

$$u(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}A_{ij}\cos\left(\frac{i\pi\alpha}{b}\right)\sin\left(\frac{j\beta}{2}\right),\quad v(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}B_{ij}\sin\left(\frac{i\pi\alpha}{b}\right)\cos\left(\frac{j\beta}{2}\right);$$

$$w(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}C_{ij}\sin\left(\frac{i\pi\alpha}{b}\right)\sin\left(\frac{j\beta}{2}\right),\quad \gamma_\alpha(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}D_{ij}\cos\left(\frac{i\pi\alpha}{b}\right)\sin\left(\frac{j\beta}{2}\right);$$

$$\gamma_\beta(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}K_{ij}\sin\left(\frac{i\pi\alpha}{b}\right)\cos\left(\frac{j\beta}{2}\right). \tag{13}$$

Следуя процедуре метода установления, было выбрано значение коэффициента диссипации $\epsilon=0,5$. Далее для ряда значений параметра нормальной постоянной во времени нагрузки q_i была получена последовательность прогибов w_i для выбранной точки оболочки $(\frac{b}{2},\pi)$ при соответствующих значениях температуры. На основе этих данных строились зависимости $w(q)$.

Параметры численного эксперимента: $h=0.002$ мкм, $R=0.02$ мкм, $b=1$ мкм, $\delta_1=\delta_2=0.002$ мкм, $a_1=a_2=0.002$ мкм, $\varphi_1=45^o$, $\varphi_1=135^o$, $\nu=0.36$, $E=1$ ТПа (материал оболочки — графен).

Сходимость решения, полученного по методу Бубнова – Галеркина, приведена в таблице.

Сходимость решения ($l=0.002$ мкм, $q=0.2$ Па, без учета температуры в точке $\left(\frac{b}{2},\pi\right)$)

Table. Convergence of the solution ($l=0.002$ mkm, $q=0.2$ Pa, excluding temperature at point $\left(\frac{b}{2},\pi\right)$)

$n=m$	1	3	5	7
$w(\frac{b}{2},\pi)$, мкм	0.001309800	0.000405923	0.000449531	0.000436341
$n=m$	9	11	13	15
$w(\frac{b}{2},\pi)$, мкм	0.000437318	0.000435868	0.000436013	0.000435907

Для получения численных результатов в представлениях функций (13) брались $n=m=11$.

Следует отметить, что результаты, полученные на основании гипотез Кирхгофа – Лява и С. П. Тимошенко, при $l=0.002$ мкм и значениях нагрузки $q\in[2;5]$ Па отличаются на 3%. В данном диапазоне нагрузок прогиб оболочки в точке $(\frac{b}{2},\pi)$ равен примерно толщине оболочки.

Результаты численного эксперимента показывают, что учет моментных напряжений вносит существенный вклад в результаты расчета прогибов оболочки. С ростом дополнительного независимого параметра l, связанного с учетом в математической модели микрополярной теории, растет изгибная жесткость оболочки (рис. 3). Графики получены при температуре $\Theta=293K$, параметр $l\in 0, 0.003, 0.005$ мкм, значение нагрузки менялось в диапазоне $q\in[0,1]$ Па.

На рис. 4 приведены эпюры прогиба углеродной нанотрубки $w(\alpha,\pi)$ при $q=1$ Па, $l=0.002$ мкм, без учета тепловых расширений и с двумя вариантами равномерного нагрева $\Theta=400\,K$, $\Theta=600\,K$ ($\alpha_T=0.000004\,K^{-1}$). Коэффициент теплового расширения графена (α_T) в диапазоне температур $\Theta\in[400,1300]$ имеет значение $\alpha_T=0.000004\,K^{-1}$ [30]. На графиках видно, что нагрев увеличивает прогиб оболочки. Так, при $\Theta=600K$ прогиб превышает две толщины оболочки.

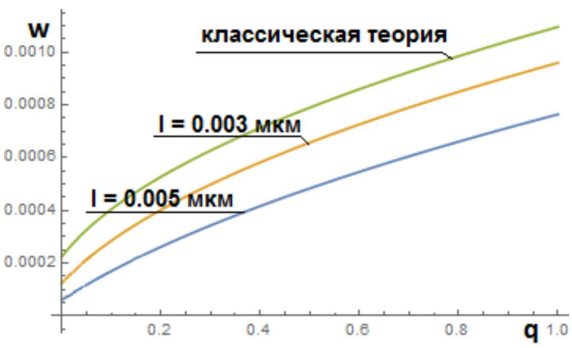

Рис. 3. График $w(q)$ в зависимости от значения l (цвет онлайн)

Fig. 3. Graph of $w(q)$ depending on the value of l (color online)

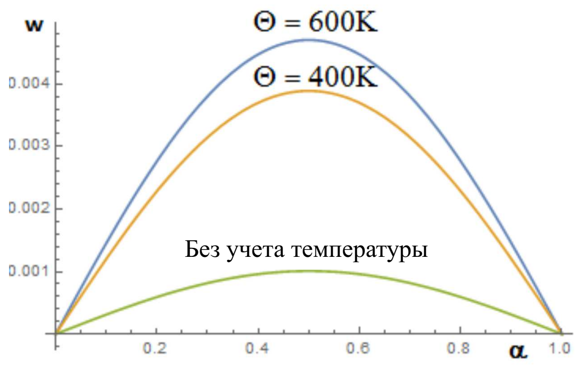

Рис. 4. График $w(\alpha, \pi)$ в зависимости от температуры (цвет онлайн)

Fig. 4. Graph of $w(\alpha, \pi)$ depending on temperature (color online)

Заключение

В работе построена математическая модель колебаний ортотропных сетчатых цилиндрических оболочек с учетом сдвига, под действием температурных, статических и вибрационных нагрузок. Модель дает возможность исследовать оболочки с различной геометрией сетки, что может быть полезным при проектировании конструкционных элементов НЭМС и МЭМС. На основании полученной модели проведен анализ статики изотропной углеродной нанотрубки вследствие температурных воздействий и стационарной нагрузки.

Список литературы

1. *Peddieson J., Buchanan R., McNitt R. P.* Application of nonlocal continuum models to nanotechnology // International Journal of Engineering Science. 2003. Vol. 41. P. 595–609. https://doi.org/10.1016/S0020-7225(02)00210-0
2. *Bazehhour B. G., Mousavi S. M., Farshidianfar A.* Free vibration of high-speed rotating Timoshenko shaft with various boundary conditions: effect of centrifugally induced axial force // Archive of Applied Mechanics. 2014. Vol. 84, iss. 12. P. 1691–1700. https://doi.org/10.1007/s00419-013-0762-5
3. *Karlicic D., Kozic P., Pavlovic R.* Flexural vibration and buckling analysis of single-walled carbon nanotubes using different gradient elasticity theories based on Reddy and Huu-Tai formulations // Journal of Theoretical and Applied Mechanics. 2015. Vol. 53, iss. 1. P. 217–233. https://doi.org/10.15632/jtam-pl.53.1.217
4. *Иванова Е. А., Морозов Н. Ф., Семенов Б. Н., Фирсова А. Д.* Об определении упругих модулей наноструктур: теоретические расчеты и методика экспериментов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2005. № 4. С. 75–85. EDN: OOYYQR
5. *Daneshmand F., Rafiei M., Mohebpour S. R., Heshmati M.* Stress and strain-inertia gradient elasticity in free vibration analysis of single walled carbon nanotubes with first order shear deformation shell theory // Applied Mathematical Modelling. 2013. Vol. 37, iss. 16–17. P. 7983–8003. https://doi.org/10.1016/j.apm.2013.01.052
6. *Саркисян С. О., Фарманян А. Ж.* Математическая модель микрополярных анизотропных (ортотропных) упругих тонких оболочек // Вестник Пермского государственного технического университета. Механика. 2011. № 3. С. 128–145. EDN: OFUQLD
7. *Taliercio A., Veber D.* Torsion of elastic anisotropic micropolar cylindrical bars // European Journal of Mechanics – A/Solids. 2016. Vol. 55. P. 45–56. https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2015.08.006
8. *X. Zhou, L. Wang* Vibration and stability of micro-scale cylindrical shells conveying fluid based on modified couple stress theory // Micro and Nano Letters. 2012. Vol. 7, iss. 7. P. 679–684. https://doi.org/10.1049/mnl.2012.0184
9. *Safarpour H., Mohammadi K., Ghadiri M.* Temperature-dependent vibration analysis of a FG viscoelastic cylindrical microshell under various thermal distribution via modified length scale parameter: A numerical solution // Journal of the Mechanical Behavior of Materials. 2017. Vol. 26, iss. 1–2. P. 9–24. https://doi.org/10.1515/jmbm-2017-0010
10. *Sahmani S., Ansari R., Gholami R., Darvizeh A.* Dynamic stability analysis of functionally graded

higher-order shear deformable microshells based on the modified couple stress elasticity theory // Composites: Part B. 2013. Vol. 51. P. 44–53 https://10.1016/j.compositesb.2013.02.037

11. *Krylova E. Yu., Papkova I. V., Sinichkina A. O., Yakovleva T. B., Krysko-yang V. A.* Mathematical model of flexible dimension-dependent mesh plates // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1210. Art. 012073. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1210/1/012073, EDN: VVUQIS
12. *Scheible D. V., Erbe A., Blick R. H.* Evidence of a nanomechanical resonator being driven into chaotic response via the Ruelle – Takens route // Applied Physics Letters. 2002. Vol. 81. P. 1884–1886. https://doi.org/10.1063/1.1506790
13. *Еремеев В. А.* Об одной нелинейной модели сетчатой оболочки // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2018. № 4. С. 127–133. https://doi.org/10.31857/S057232990000704-4, EDN: YOCSWL
14. *Крылова Е. Ю., Папкова И. В., Салтыкова О. А., Крысько В. А.* Особенности сложных колебаний гибких микрополярных сетчатых панелей // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 48–59. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-48-59, EDN: MYYGLY
15. *Sedighi H. M., Malikan M., Valipour A., Zur K. K.* Nonlocal vibration of carbon/boron-nitride nano-hetero-structure in thermal and magnetic fields by means of nonlinear finite element method // Journal of Computational Design and Engineering. 2020. Vol. 7, iss. 5. P. 591–602. https://doi.org/10.1093/jcde/qwaa041
16. *Sedighi H. M.* Divergence and flutter instability of magneto-thermo-elastic C-BN hetero-nanotubes conveying fluid // Acta Mechanica Sinica/Lixue Xuebao. 2020. Vol. 36, iss. 2. P. 381–396. https://doi.org/10.1007/s10409-019-00924-4
17. *Панин В. Е.* Основы физической мезомеханики // Физическая мезомеханика. 1998. Т. 1, № 1. С. 5–22. EDN: KWPHTL
18. *Глухова О. Е., Кириллова И. В., Коссович Е. Л., Фадеев А. А.* Исследование механических свойств графеновых листов различных размеров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 4. С. 63–66. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2012-12-4-63-66, EDN: STJIYV
19. *Имран М., Хуссейн Ф., Халил Р. М. А., Саттар М. А., Мехбооб Х., Явид М. А., Рана А. М., Ахмад С. А.* Анизотропия тепловых и механических свойств графена: молекулярное моделирование // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2019. Т. 155, вып. 2. С. 295–305. https://doi.org/10.1134/S0044451019020093, EDN: YVYMEH
20. *Саркисян С. О., Фарманян А. Ж.* Термоупругость микрополярных ортотропных тонких оболочек // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2013. № 3. С. 222–237. https://doi.org/10.15593/perm.mech/2013.3.222-237, EDN: RDKNJH
21. *Шереметьев М. П., Пелех Б. Л.* К построению уточненной теории пластин // Инженерный журнал. 1964. Т. 3, вып. 3. С. 34–41.
22. *Kármán T. V.* Festigkeitsprobleme im Maschinenbau // Mechanik / ed. by : F. Klein, C. Müller. Wiesbaden : Vieweg+Teubner Verlag, 1907. P. 311–385. https://doi.org/10.1007/978-3-663-16028-1_5
23. *Ерофеев В. И.* Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. Москва : Изд-во Московского ун-та, 1999. 328 с.
24. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластин и оболочек. Москва : Наука, 1972. 432 с.
25. *Hamilton W.* Report of the Fourth Meeting // British Association for the Advancement of Science. London, 1835. P. 513–518.
26. *Ostrogradsky M.* Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St.-Pétersbourg. St.-Pétersbourg : L'Impr. de l'Académie impériale des sciences, 1850, vol. 8, iss. 3. P. 33–48.
27. *Sun C. T., Zhang Y.* Size-dependent elastic moduli of platelike nanomaterials // Journal of Applied Physics. 2003. Vol. 93, iss. 2. P. 1212–1218. https://doi.org/10.1063/1.1530365
28. *Пшеничнов Г. И.* Теория тонких упругих сетчатых оболочек и пластинок. Москва : Наука, 1982. 352 с.
29. *Krysko V. A., Awrejcewicz J., Komarov S. A.* Nonlinear deformations of spherical panels subjected to transversal load action // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2005. Vol. 194, iss. 27–29. P. 3108–3126. https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.08.005
30. *Schelling P. K., Keblinski P.* Thermal expansion of carbon structures // Physical Review B. 2003. Vol. 68, iss. 3. Art. 035425. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.68.035425

References

1. Peddieson J., Buchanan R., McNitt R. P. Application of nonlocal continuum models to nanotechnology. *International Journal of Engineering Science*, 2003, vol. 41, pp. 595–609. https://doi.org/10.1016/S0020-7225(02)00210-0
2. Bazehhour B. G., Mousavi S. M., Farshidianfar A. Free vibration of high-speed rotating Timoshenko shaft with various boundary conditions: effect of centrifugally induced axial force. *Archive of Applied Mechanics*, 2014, vol. 84, iss. 12, pp. 1691–1700. https://doi.org/10.1007/s00419-013-0762-5
3. Karlicic D., Kozic P., Pavlovic R. Flexural vibration and buckling analysis of single-walled carbon nanotubes using different gradient elasticity theories based on Reddy and Huu-Tai formulations. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2015, vol. 53, iss. 1, pp. 217–233. https://doi.org/10.15632/jtam-pl.53.1.217
4. Ivanova E. A., Morozov N. F., Semenov B. N., Firsova A. D. Determination of elastic moduli of nanostructures: Theoretical estimates and experimental techniques. *Mechanics of Solids*, 2005, vol. 40, iss. 4, pp. 60–68.
5. Daneshmand F., Rafiei M., Mohebpour S. R, Heshmati M. Stress and strain-inertia gradient elasticity in free vibration analysis of single walled carbon nanotubes with first order shear deformation shell theory. *Applied Mathematical Modelling*, 2013, vol. 37, iss. 16–17, pp. 7983–8003. https://doi.org/10.1016/j.apm.2013.01.052
6. Sarkisjan S. O., Farmanyan A. Zh. Mathematical model of micropolar anisotropic (orthotropic) elastic thin shells. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2011, iss 3, pp. 128–145 (in Russian). EDN: OFUQLD
7. Taliercio A., Veber D. Torsion of elastic anisotropic micropolar cylindrical bars. *European Journal of Mechanics – A/Solids*, 2016. vol. 55, pp. 45–56. https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2015.08.006
8. Zhou X., Wang L. Vibration and stability of micro-scale cylindrical shells conveying fluid based on modified couple stress theory. *Micro and Nano Letters*, 2012, vol. 7, iss. 7, pp. 679–684. https://doi.org/10.1049/mnl.2012.0184
9. Safarpour H., Mohammadi K., Ghadiri M. Temperature-dependent vibration analysis of a FG viscoelastic cylindrical microshell under various thermal distribution via modified length scale parameter: A numerical solution. *Journal of the Mechanical Behavior of Materials*, 2017, vol. 26, iss. 1–2, pp. 9–24. https://doi.org/10.1515/jmbm-2017-0010
10. Sahmani S., Ansari R., Gholami R., Darvizeh A. Dynamic stability analysis of functionally graded higher-order shear deformable microshells based on the modified couple stress elasticity theory. *Composites: Part B*, 2013, vol. 51, pp. 44–53. https://10.1016/j.compositesb.2013.02.037
11. Krylova E. Yu., Papkova I. V., Sinichkina A. O., Yakovleva T. B., Krysko-yang V. A. Mathematical model of flexible dimension-dependent mesh plates. *Journal of Physics: Conference Series*, 2019, vol. 1210, art. 012073. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1210/1/012073, EDN: VVUQIS
12. Scheible D. V., Erbe A., Blick R. H. Evidence of a nanomechanical resonator being driven into chaotic response via the Ruelle – Takens route. *Applied Physics Letters*, 2002, vol. 81, pp. 1884–1886. https://doi.org/10.1063/1.1506790
13. Eremeyev V. A. A nonlinear model of a mesh shell. *Mechanics of Solids*, 2018, vol. 53, iss. 4, pp. 464–469. https://doi.org/10.3103/S002565441804012X, EDN: LTJZSA
14. Krylova E. Yu., Papkova I. V., Saltykova O. A., Krysko V. A. Features of complex vibrations of flexible micropolar mesh panels. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 48–59 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-48-59, EDN: MYYGLY
15. Sedighi H. M., Malikan M., Valipour A., Zur K. K. Nonlocal vibration of carbon/boron-nitride nano-hetero-structure in thermal and magnetic fields by means of nonlinear finite element method. *Journal of Computational Design and Engineering*, 2020, vol. 7, iss. 5, pp. 591–602. https://doi.org/10.1093/jcde/qwaa041
16. Sedighi H. M. Divergence and flutter instability of magneto-thermo-elastic C-BN hetero-nanotubes conveying fluid. *Acta Mechanica Sinica/Lixue Xuebao*, 2020, vol. 36, iss. 2, pp. 381–396. https://doi.org/10.1007/s10409-019-00924-4
17. Panin V. E. Foundations of physical mesomechanics. *Physical Mesomechanics*, 1998, vol. 1, iss. 1, pp. 5–22 (in Russian). EDN: KWPHTL
18. Glukhova O. E., Kirillova I. V., Kossovich E. L., Fadeev A. A. Mechanical properties study for graphene sheets of various size. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2012, vol. 12, iss. 4, pp. 63–66 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2012-12-4-63-66, EDN: STJIYV

19. Imran M., Hussain F., Khalil R. M. A., Sattar M. A, Mehboob H., Javid M. A., Rana A. M., Ahmad S. A. Anisotropic thermal and mechanical characteristics of graphene: A molecular dynamics study. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 2019, vol. 128, iss. 2, pp. 259–267. https://doi.org/10.1134/S1063776119020079, EDN: DAUGJF
20. Sargsyan S. H., Farmanyan A. J. Thermoelasticity of micropolar orthotropic thin shells. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2013, iss. 3, pp. 222–237 (in Russian). https://doi.org/10.15593/perm.mech/2013.3.222-237, EDN: RDKNJH
21. Sheremetiev M. P., Pelekh B. L. To the construction of a refined theory of plates. *Engineering Journal*, 1964, vol. 3, iss. 3, pp. 34–41 (in Russian).
22. Kármán T. V. Festigkeitsprobleme im Maschinenbau. In: Klein F., Müller C. (eds.) *Mechanik*. Wiesbaden, Vieweg+Teubner Verlag, 1907, pp. 311–385. https://doi.org/10.1007/978-3-663-16028-1_5
23. Erofeev V. I. *Volnovye protsessy v tverdykh telakh s mikrostrukturoy* [Wave Processes in Solids with Microstructure]. Moscow, Moscow University Press, 1999. 328 p. (in Russian).
24. Volmir A. C. *Nelineynaya dinamika plastin i obolochek* [Nonlinear Dynamics of Plates and Shells]. Moscow, Nauka, 1972. 432 p. (in Russian).
25. Hamilton W. Report of the Fourth Meeting. In: *British Association for the Advancement of Science*, London, 1835, pp. 513–518.
26. Ostrogradsky M. Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St.-Pétersbourg. *St.-Pétersbourg, L'Impr. de l'Académie impériale des sciences*, 1850, vol. 8, iss. 3, pp. 33–48.
27. Sun C. T., Zhang Y. Size-dependent elastic moduli of platelike nanomaterials. *Journal of Applied Physics*, 2003, vol. 93, iss. 2, pp. 1212–1218. https://doi.org/10.1063/1.1530365
28. Pshenichnov G. I. *Teoriya tonkikh uprugikh setchatykh obolochek i plastinok* [Theory of Thin Elastic Mesh Shells and Plates]. Moscow, Nauka, 1982. 352 p. (in Russian).
29. Krysko V. A., Awrejcewicz J., Komarov S. A. Nonlinear deformations of spherical panels subjected to transversal load action. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, vol. 194, iss. 27–29, pp. 3108–3126. https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.08.005
30. Schelling P. K., Keblinski P. Thermal expansion of carbon structures. *Physical Review B*, 2003, vol. 68, iss. 3, art. 035425. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.68.035425

Поступила в редакцию / Received 12.10.2022
Принята к публикации / Accepted 19.09.2023
Опубликована / Published 31.05.2024