



Научная статья

УДК 539.3

Анализ упругих и упругопластических моделей при интерпретации результатов наноиндентирования

И. А. Панфилов[✉], С. М. Айзикович, А. С. Васильев

Донской государственный технический университет, Россия, 344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, д. 1

Панфилов Иван Александрович, кандидат физико-математических наук, исполняющий обязанности заведующего кафедрой «Теоретическая и прикладная механика», panfilov.i@gs.donstu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0955-0282>, AuthorID: 599599

Айзикович Сергей Михайлович, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией функционально-градиентных и композиционных материалов НОЦ «Материалы», saizikovich@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-2756-5752>, AuthorID: 3105

Васильев Андрей Сергеевич, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории функционально-градиентных и композиционных материалов НОЦ «Материалы», andre.vasiliev@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-7844-1314>, AuthorID: 644756

Аннотация. Одним из актуальных и широко распространенных в настоящее время методов неразрушающих испытаний для контроля и определения упругих свойств материалов является наноиндентирование. При этом для интерпретации результатов испытаний возникает нетривиальная задача построения адекватной математической модели процесса индентирования. Как правило, во многих случаях используются аналитические формулы, полученные при упругой линейной постановке задач о внедрении недеформируемого штампа в однородное упругое полупространство. В настоящее время численная постановка задачи позволяет получить и использовать численное решение, полученное с учетом полного пластического нелинейного поведения материала. В данной работе проведено исследование контактных задач о внедрении сферического и конического инденторов в упругопластическое однородное полупространство. Для верификации численного решения также решена задача о внедрении сферического и конического инденторов в упругое однородное полупространство, проведено сравнение с известными аналитическими решениями. Исследуются вопросы сходимости и настройки численных методов, влияния пластичности и применимости аналитических решений. Численно задачи решаются методом конечных элементов в программном комплексе Ansys Mechanical.

Ключевые слова: непрерывный контакт, контактная механика, контактная задача, индентирование, конический индентор, сферический индентор, метод конечных элементов

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-19-00732).

Для цитирования: Панфилов И. А., Айзикович С. М., Васильев А. С. Анализ упругих и упругопластических моделей при интерпретации результатов наноиндентирования // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 2. С. 245–253. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-245-253>, EDN: CUARKH

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Article

Analysis of elastic and elastoplastic models when interpreting nanoindentation results

I. A. Panfilov[✉], S. M. Aizikovich, A. S. Vasiliev

Don State Technical University, 1 Gagarin Sq., Rostov-on-Don 344000, Russia

Ivan A. Panfilov, panfilov.i@gs.donstu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0955-0282>, AuthorID: 599599

Sergey M. Aizikovich, saizikovich@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-2756-5752>, AuthorID: 3105

Andrey S. Vasiliev, andre.vasiliev@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-7844-1314>, AuthorID: 644756

Abstract. One of the current and widely used non-destructive testing methods for monitoring and determining the elastic properties of materials is nanoindentation. In this case, to interpret the test results, a non-trivial task arises of constructing an adequate mathematical model of the indentation process. As a rule, in many cases, analytical formulas are used that are obtained from an elastic linear formulation of problems about the introduction of a non-deformable stamp into a homogeneous elastic half-space. Currently, the numerical formulation of the problem makes it possible to obtain and use a numerical solution obtained taking into account the complete plastic nonlinear behavior of the material. In this work, a study of contact problems on the introduction of a spherical and conical indenter into an elastoplastic homogeneous half-space was carried out. To verify the numerical solution, the problem of introducing a spherical and conical indenter into an elastic homogeneous half-space was also solved and compared with known analytical solutions. Issues of convergence and tuning of numerical methods, the influence of plasticity and the applicability of analytical solutions are explored. Problems are solved numerically using the finite element method in the Ansys Mechanical software package.

Keywords: continuous contact, contact mechanics, contact problem, indentation, conical indenter, spherical indenter, finite element method

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-19-00732).

For citation: Panfilov I. A., Aizikovich S. M., Vasiliev A. S. Analysis of elastic and elastoplastic models when interpreting nanoindentation results. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 2, pp. 245–253 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-245-253>, EDN: CUARKH

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Наноиндентирование применяется для неразрушающего испытания материалов и получения механических характеристик [1, 2]: твердости, упругих свойств объемных материалов и покрытий и др. Суть метода заключается во вдавливании в поверхность испытуемого образца более жесткого штампа (как правило, алмаз либо твердые сплавы) и получения кривых зависимостей силы и отпечатка от глубины вдавливания в нанометровой шкале.

Упругие свойства объектных материалов и покрытий определяются из анализа кривой сила-осадка на стадии разгрузки. В основе методов Филда – Свейна (сферический индентор) [3] и Оливера – Фарра (индентор Берковича) [4] и лежат решения контактных задач теории упругости для сферического и параболического штампов [5, 6]. Фундаментальные основы контактного взаимодействия были заложены в работах [1, 6, 7], получены аналитические зависимости для вертикальной силы, смещения, радиуса контакта и давления в зоне контакта для конического и сферического инденторов. При этом в основу теории закладывались гипотезы о малых деформациях и упругом поведении материала.

В работах [6–10] рассмотрены задачи о вдавливании сферического и конического инденторов в упругое полупространство с покрытием, асимптотическим методом получены



аналитические прикладные решения. В [11–13] исследуются непрерывные и разрывные контактные задачи для функционально-градиентного материала.

В работах [14–20] построены приближенные аналитические решения осесимметричных контактных задач о вдавливании сферического, конического и цилиндрического штампов в упругое полупространство с функционально-градиентным покрытием. Изучена возможность применения разработанных моделей индентирования тел с покрытиями для интерпретации наноиндентирования тонких покрытий [21].

Используемая в представленных работах гипотеза о малых перемещениях индентора накладывает серьезные ограничения на применение аналитических прикладных формул, поскольку даже небольшое смещение индентора (менее 1%) вызывает развитие пластических деформаций. Сила вдавливания и область контакта при этом значительно отличаются от аналитических результатов [22].

1. Постановка задачи

В данной работе рассматриваются задачи о внедрении сферического и конического штампов в упругопластическое полупространство в статической осесимметричной постановке. Для реализации пластической деформации используется модель билинейного материала с модулем упругости (модулем Юнга) и касательным модулем упругости (табл. 1). Индентор выполнен из упругого алмаза. Полупространство выполнено из алюминия.

Таблица 1 / Table 1

Физические свойства материалов / Physical properties of materials

Материал	Модуль Юнга, ГПа	Предел текучести, ГПа	Касательный модуль, ГПа
Алмаз	1000	–	–
Алюминий	70	0.28	0.5

Задача решается численно в конечно-элементной постановке в программном комплексе Ansys. Для верификации численных расчетов и сравнения с аналитическими результатами дополнительно проведены расчеты о внедрении жестких штампов в упругое пространство из алюминия. Геометрические параметры задачи указаны в табл. 2.

Контактные задачи относятся к нелинейным задачам из-за изменяющегося статуса контакта и матрицы жесткости и требуют особого внимания к точности и сходимости решения. Ниже приведены настройки численных методов, используемых в пакете конечно-элементного анализа Ansys и примененных в данном расчете.

Для реализации контактной задачи используется контактный алгоритм «расширенный метод Лагранжа» («Augmented Lagrange»). Это модифицированный контактный алгоритм распространенного метода «Pure Penalty» («метод штрафных функций»), отличающийся наличием добавочного члена λ в выражении контактной силы:

$$F_n = k_n \cdot x_p + \lambda,$$

где F_n — нормальная (контактная) сила, k_n — контактная жесткость, x_p — глубина проникновения. Контактная жесткость k_n , как правило, оказывает важнейшее влияние на точность и сходимость. Большое значение жесткости обеспечивает высокую точность, но ухудшает сходимость и наоборот. Использование же добавочного члена λ позволяет снизить чувствительность алгоритма к контактной жесткости k_n и получать приемлемые результаты при значении $k_n = 1$, но и требует большего количества итераций.

Таблица 2 / Table 2

Геометрические параметры задачи
Geometric parameters of the problem

Параметр	Значения
Линейный размер полупространства, мм	1.0
Радиус сферы, мм	0.1
Угол раствора конуса, °	120
Глубина внедрения индентора, мм	0.1

Для «распознавания» контактов используется «метод точек Гаусса» («Gauss point detection»), при котором на ребра элементов добавляются дополнительные точки. Для улучшения сходимости можно использовать распознавание «Normal from Contact» или «Normal to Target» с увеличением количества вычислений.

Отдельно нужно сказать о форме и размерности элементов конечно-элементной сетки. В данной задаче для построения конечно-элементной сетки используется 8-узловой элемент PLANE183 — элемент высокого порядка с промежуточными узлами. В области контактов проведено сгущение сеток. Размерности сеток для полупространства представлены в табл. 3, для инденторов применяется более крупная сетка. При этом отсчетными параметрами,

Таблица 3 / Table 3

Размерность конечно-элементной сетки, мм
Dimension of the finite element mesh, mm

Параметр	Значения
Размер сетки в зоне контакта	0.01
Размер сетки вне зоны контакта	0.02

относительно которых должны задаваться размерность сетки и линейные размеры полупространства, являются зона контакта (глубина внедрения) и толщина покрытия.

Так, используемое разбиение, например, в упругой задаче обеспечивает около 30 элементов в зоне контакта для сферического индентора, а для конуса — всего 10 элементов, что обусловлено следующим фактом.

Для задачи внедрения сферического штампа измельчение сетки, очевидно, будет вести к получению более точных результатов, задача будет сходиться. Для задачи внедрения конуса настройка сетки оказывается гораздо сложнее, поскольку в центре конуса образуется сингулярность. Другими словами, измельчение сетки в центре конуса будет приводить к прямому росту напряжения и расхождению задачи. Также для задачи с конусом достаточно важным является форма элементов в центре контакта — форма и размерность элементов должны обеспечить большую деформацию и не допускать «схлопывания» ячеек. Одним из способов борьбы с численной сингулярностью является создание закругления на острие конуса либо использование моделей пластичности.

Для контактных поверхностей используются элементы типа CONTA172 и TARGE169 с автоматическим распознаванием и ограничением зоны контакта. Причем, поскольку у нас жесткость индентора в несколько раз больше жесткостей покрытия и подложки, то элементы TARGE169 необходимо накладывать именно на индентор.

Ansys также позволяет учитывать геометрическую нелинейность при больших деформациях, включив в расчет нелинейный тензор деформации $\varepsilon(x, y, z)$ относительно производных перемещений $u'(x, y, z)$ («Large deflection»):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Таким образом, в отличие от аналитических теорий, где учитывается только контактная нелинейность при гипотезе малых деформаций, численно мы можем реализовать все три типа нелинейности: контактную, геометрическую (большие деформации) и физическую (пластику).

2. Численные результаты

К штампам прикладывалось вертикальное перемещение 0.1 мм, отыскивались сила, поля деформаций и напряжений. Точность итерационного алгоритма задавалась по силе $1 \cdot 10^{-4}$ Н, по деформациям $-1 \cdot 10^{-5}$ мм.



Аналитические результаты для сравнения брались из известных формул для внедрения жестких штампов [1, 5–7]:

$$a_s = (Rd)^{1/2}, \quad a_c = \frac{2d}{\pi \operatorname{tg}(\varphi)}, \quad F_s = \frac{4}{3} E^* R^{1/2} d^{3/2}, \quad F_c = \frac{2}{\pi} E \frac{d^2}{\operatorname{tg}(\varphi)}, \quad E^* = \frac{E}{1 - \nu^2},$$

$$p_s = p_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{1/2}, \quad p_0 = \frac{2}{\pi} E^* \left(\frac{d}{R}\right)^{1/2}, \quad p_c = \frac{Ed}{(1 - \nu^2)\pi a} \ln \left(\frac{a}{r} - \left(\left(\frac{a}{r}\right)^2 - 1\right)^{1/2}\right).$$

Для учета жесткости алмазного сферического индентора в этих выражениях для эффективной жесткости E^* можно использовать формулу

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}.$$

Здесь a — радиус контакта, d — глубина внедрения штампа, φ — угол между горизонтальной и боковой плоскостью конуса, r — вертикальная координата, E_1 , E_2 и ν_1 , ν_2 — модули Юнга и коэффициенты Пуассона индентора и полупространства соответственно, F — вертикальная сила, p — давление в области контакта. Индексы s и здесь, и ниже на графиках указывают на принадлежность к сфере и конусу соответственно.

На рис. 1–8 приведены результаты внедрения сферического и конического штампов в упругое полупространство из алюминия.

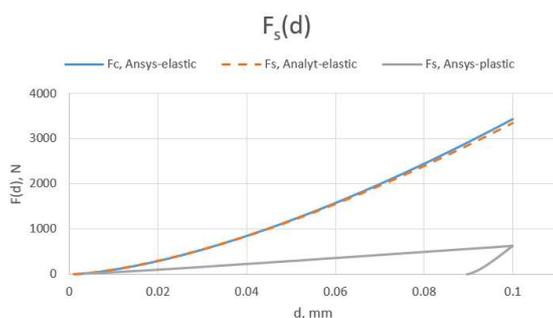


Рис. 1. Вертикальная сила от смещения для сферического индентора, мм (цвет онлайн)

Fig. 1. Vertical force from displacement for a spherical indenter, mm (color online)

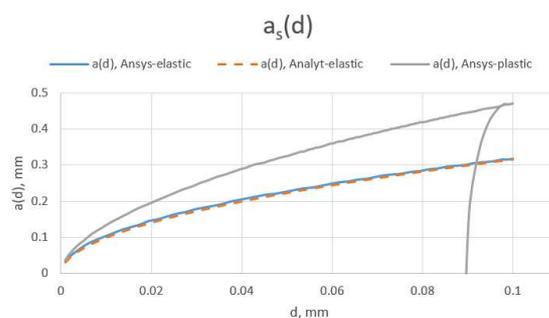


Рис. 2. Радиус контакта от смещения для сферического индентора, мм (цвет онлайн)

Fig. 2. Contact radius versus displacement for a spherical indenter, mm (color online)

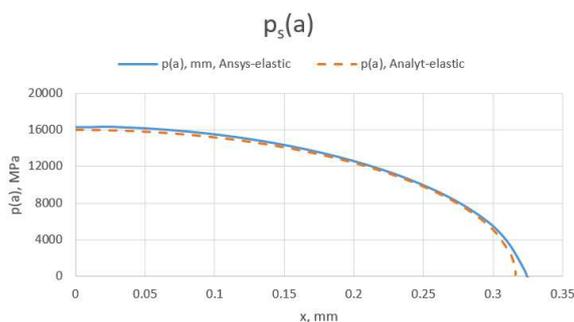


Рис. 3. Контактное давление в зоне контакта при смещении 0.1 мм для сферического индентора, мм (цвет онлайн)

Fig. 3. Contact pressure in the contact zone for a displacement of 0.1 mm for a spherical indenter, mm (color online)

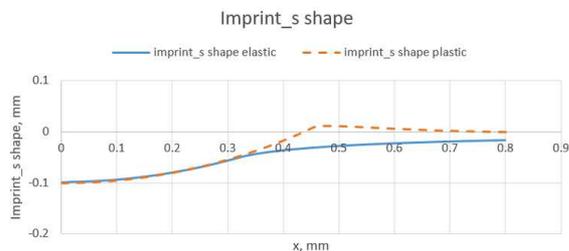


Рис. 4. Деформация в зоне контакта (отпечаток) для сферического индентора, мм (цвет онлайн)

Fig. 4. Deformation in the contact zone (imprint) for a spherical indenter, mm (color online)

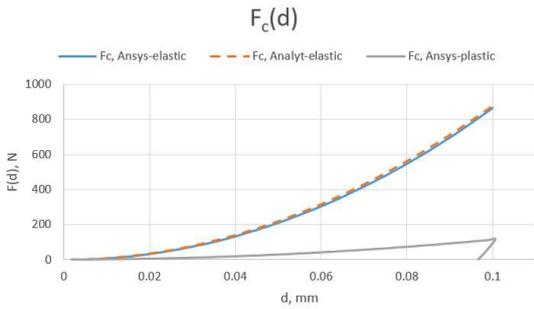


Рис. 5. Вертикальная сила от смещения для конического индентора, мм (цвет онлайн)

Fig. 5. Vertical force from displacement for a conical indenter, mm (color online)

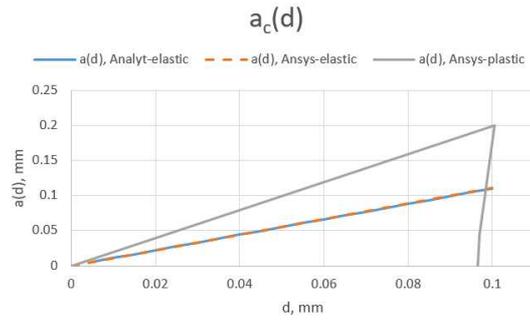


Рис. 6. Радиус контакта от смещения для конического индентора, мм (цвет онлайн)

Fig. 6. Contact radius versus offset for conical indenter, mm (color online)

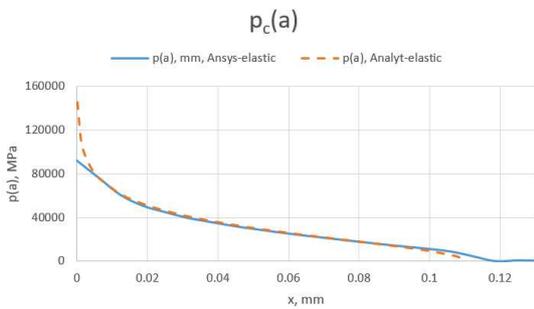


Рис. 7. Контактное давление в зоне контакта при смещении 0.1 мм для конического индентора, мм (цвет онлайн)

Fig. 7. Contact pressure in the contact zone for a displacement of 0.1 mm for a conical indenter, mm (color online)

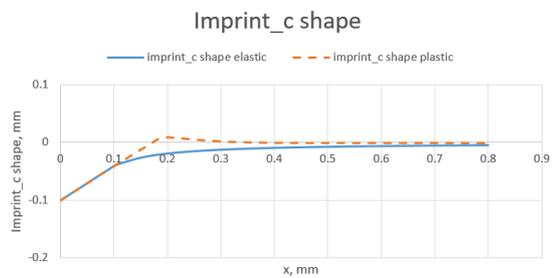


Рис. 8. Деформация в зоне контакта (отпечаток) для конического индентора, мм (цвет онлайн)

Fig. 8. Deformation in the contact zone (imprint) for a conical indenter, mm (color online)

На рис. 9, 10 приведены поля деформаций для сферического и конического инденторов для упругой и упругопластической моделей, рассчитанных в Ansys.

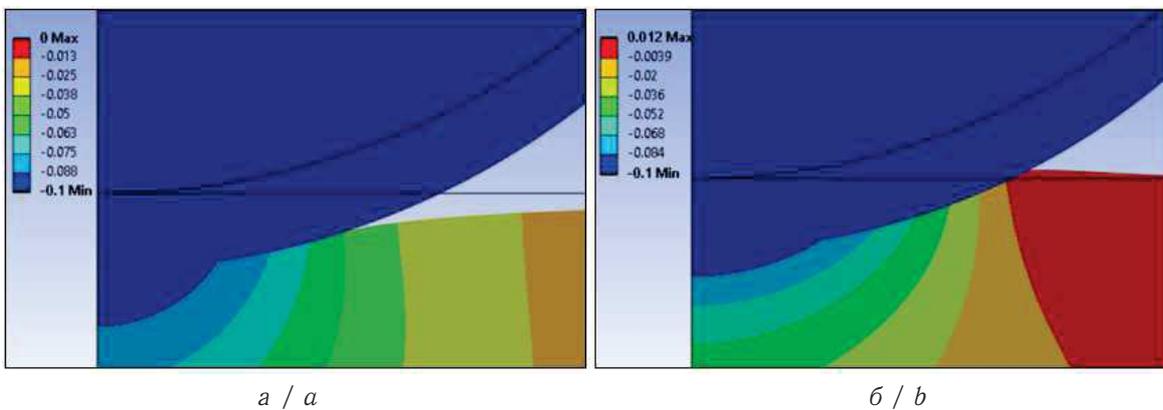


Рис. 9. Поле деформации в зоне контакта для сферического индентора, мм: *a* — упругая модель; *б* — упругопластическая модель (цвет онлайн)

Fig. 9. Deformation field in the contact zone for a spherical indenter, mm: *a* is elastic model; *b* is elastoplastic model (color online)

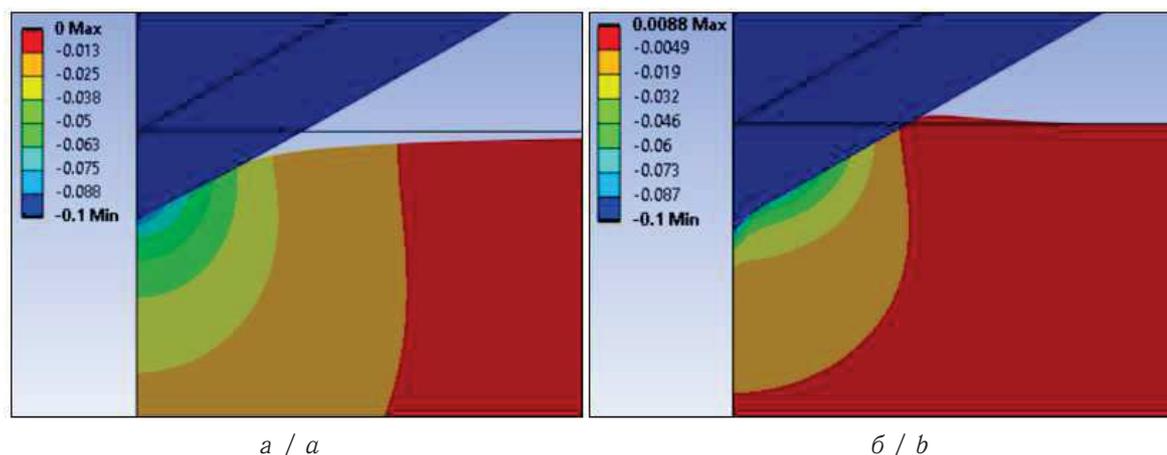


Рис. 10. Поле деформации в зоне контакта для конического индентора, мм: *а* — упругая модель; *б* — упругопластическая модель (цвет онлайн)
 Fig. 10. Deformation field in the contact zone for a conical indenter, mm: *a* is elastic model; *b* is elastoplastic model (color online)

Выводы

Для упругой задачи численный метод показал практически совпадение с аналитическими результатами. Погрешность возрастала с увеличением деформации и для максимальных значений составила около 2% для вертикальной силы.

Стоит отметить, что данные нагрузки для упругой задачи существенно превышают допустимые по пределу текучести и были рассмотрены как модельные задачи для сравнения моделей. В пределах упругих деформаций погрешность численных результатов составила менее 0.1%.

При решении упругопластической задачи численно мы видим линейную зону разгрузки, которая используется для нахождения модуля Юнга при методах неразрушающего контроля (наноиндентирования).

Зона контакта для упругой модели и упругопластической модели существенно отличается. При пластичности материал «выдавливается» из-под инденторов и существенно увеличивает зону контакта. Для сферического индентора при максимальном смещении отличие по радиусу контакта составило около 30%, для конического — 45%.

В целом использование упругой модели может служить модельной задачей для верификации и калибровки численных методов. Однако при больших деформациях рекомендуется применять упругопластическую модель деформирования, а также модель нелинейного тензора деформации (модель больших деформаций).

Данные исследования могут быть применены для оценки точности и анализа моделей, используемых при идентификации свойств градиентных, многослойных материалов и материалов с покрытиями.

Список литературы

1. Бульчев С. И., Алехин В. П. Испытание материалов непрерывным вдавливанием индентора. Москва : Машиностроение, 1990. 224 с.
2. Головин Ю. И. Наноиндентирование и его возможности. Москва : Машиностроение, 2009. 312 с.
3. Field J. S., Swain M. V. A simple predictive model for spherical indentation // Journal of Materials Research. 1993. Vol. 8, iss. 2. P. 297–306. <https://doi.org/10.1557/JMR.1993.0297>
4. Oliver W. C., Pharr G. M. An improved technique for determining hardness and elastic modulus using load and displacement sensing indentation experiments // Journal of Materials Research. 1992. Vol. 7, iss. 6. P. 1564–1583. <https://doi.org/10.1557/JMR.1992.1564>
5. Hertz H. Ueber die Berührung fester elastischer Körper // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1881. Bd. 92. S. 156–171. <https://doi.org/10.1515/9783112342404-004>
6. Джонсон К. Л. Механика контактного взаимодействия. Москва : Мир, 1989. 510 с.



7. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. Москва : ГИТТЛ, 1953. 264 с.
8. He L. H., Swain M. V. Nanoindentation derived stress-strain properties of dental materials // *Dental Materials*. 2007. Vol. 23, iss. 7. P. 814–821. <https://doi.org/10.1016/j.dental.2006.06.017>
9. Потележко В. П., Филлипов А. П. Контактная задача для плиты, лежащей на упругом основании // *Прикладная механика*. 1967. Т. 3, вып. 1. С. 87–91.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика : в 10 т. Т. 7: Теория упругости : учеб. пособие. 4-е изд., исп. и доп. Москва : Наука, 1987. 248 с.
11. Kral E. R., Komvopoulos K., Bogy D. B. Elastic-plastic finite element analysis of repeated indentation of a half-space by a rigid sphere // *Journal of Applied Mechanics*. 1993. Vol. 60, iss. 4. P. 829–841. <https://doi.org/10.1115/1.2900991>
12. Механика контактных взаимодействий / под ред. И. И. Воровича, В. М. Александрова. Москва : Физматлит, 2001. 672 с.
13. Dub S. N. Curves of elasto-plastic deformation of thin coatings obtained in depth-sensing indentation experiments // *MRS Symposium Proceedings*. 1998. Vol. 505. P. 223–228. <https://doi.org/10.1557/PROC-505-223>
14. El-Sherbiny M. G. D., Halling J. The Hertzian contact of surfaces covered with metallic films // *Wear*. 1996. Vol. 40, iss. 3. P. 325–337. [https://doi.org/10.1016/0043-1648\(76\)90124-1](https://doi.org/10.1016/0043-1648(76)90124-1)
15. Pharr G. M., Oliver W. C. Measurement of thin film mechanical properties using nanoindentation // *MRS Bulletin*. 1992. Vol. 17. P. 28–33. <https://doi.org/10.1557/S0883769400041634>
16. Айзикович С. М. Асимптотические решения контактных задач теории упругости для неоднородных по глубине сред // *Прикладная математика и механика*. 1982. Т. 46, вып. 1. С. 148–158.
17. Васильев А. С., Волков С. С., Айзикович С. М. Приближенное аналитическое решение задачи о вдавливании проводящего штампа в электроупругое полупространство с неоднородным покрытием // *Доклады Академии наук*. 2018. Т. 478, № 1. С. 34–39. <https://doi.org/10.7868/S0869565218010073>, EDN: YNTRFR
18. Волков С. С., Васильев А. С., Айзикович С. М., Селезнев Н. М., Леонтьева А. В. Напряженно-деформированное состояние упругого мягкого функционально-градиентного покрытия при введении сферического индентора // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2016. № 4. С. 20–34. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2016.4.02>, EDN: XSESAL
19. Vasiliev A. S., Volkov S. S., Aizikovich S. M., Litvinenko A. N. Indentation of an elastic half-space reinforced with a functionally graded interlayer by a conical punch // *Materials Physics and Mechanics*. 2018. Vol. 40, iss. 2. P. 254–260. https://doi.org/10.18720/MPM.4022018_14, EDN: VPDWVG
20. Vasiliev A. S., Volkov S. S., Aizikovich S. M. Indentation of an axisymmetric punch into an elastic transversely-isotropic half-space with functionally graded transversely-isotropic coating // *Materials Physics and Mechanics*. 2016. Vol. 28, iss. 1–2. P. 11–15. EDN: XCQJUT
21. Sadyrin E., Vasiliev A., Volkov S. Mathematical modeling of experiment on Berkovich nanoindentation of ZrN coating on steel substrate // *Acta Polytechnica CTU Proceedings*. 2020. Vol. 27: Proceedings of the 14th International Conference on Local Mechanical Properties – LMP 2019. P. 18–21. <https://doi.org/10.14311/APP.2020.27.0018>
22. Ovcharenko A., Halperin G., Verberne G., Etsion I. In situ investigation of the contact area in elastic-plastic spherical contact during loading-unloading // *Tribology Letters*. 2007. Vol. 25. P. 153–160. <https://doi.org/10.1007/s11249-006-9164-y>

References

1. Bulychiev S. I., Alekhin V. P. *Ispytanie materialov nepreryvnym vдавливaniem indentora* [Testing of Materials by Continuous Indentation of an Indenter]. Moscow, Mashinostroenie, 1990. 224 p. (in Russian).
2. Golovin Yu. I. *Nanoindentirovanie i ego vozможности* [Nanoindentation and its Capabilities]. Moscow, Mashinostroenie, 2009. 312 p. (in Russian).
3. Field J. S., Swain M. V. A simple predictive model for spherical indentation. *Journal of Materials Research*, 1993, vol. 8, iss. 2, pp. 297–306. <https://doi.org/10.1557/JMR.1993.0297>
4. Oliver W. C., Pharr G. M. An improved technique for determining hardness and elastic modulus using load and displacement sensing indentation experiments. *Journal of Materials Research*, 1992, vol. 7, iss. 6, pp. 1564–1583. <https://doi.org/10.1557/JMR.1992.1564>
5. Hertz H. Ueber die Berührung fester elastischer Körper. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1881, vol. 92, pp. 156–171 (in German). <https://doi.org/10.1515/9783112342404-004>



6. Dzhonson K. L. *Mechanics of Contact*. Cambridge, Cambridge University Press, 1987. 452 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1989. 510 p.).
7. Galin L. A. *Kontaktnye zadachi teorii uprugosti* [Contact Problems of the Theory of Elasticity]. Moscow, GITTL, 1953. 264 p. (in Russian).
8. He L. H., Swain M. V. Nanoindentation derived stress-strain properties of dental materials. *Dental Materials*, 2007, vol. 23, iss. 7, pp. 814–821. <https://doi.org/10.1016/j.dental.2006.06.017>
9. Potelezhko V. P., Fillipov A. P. Contact problem for a plate lying on an elastic foundation. *Soviet Applied Mechanics*, 1967, vol. 3, iss. 1, pp. 87–91. <https://doi.org/10.1007/BF00885463>
10. Landau L. D., Lifshits E. M. *Teoreticheskaya fizika. T. 7: Teoriya uprugosti* [Theoretical Physics. Vol. 7: Theory of Elasticity]. Moscow, Nauka, 1987. 248 p. (in Russian).
11. Kral E. R., Komvopoulos K., Bogy D. B. Elastic-plastic finite element analysis of repeated indentation of a half-space by a rigid sphere. *Journal of Applied Mechanics*, 1993, vol. 60, iss. 4, pp. 829–841. <https://doi.org/10.1115/1.2900991>
12. *Mekhanika kontaktnykh vzaimodeystviy* [Vorovich I. I., Aleksandrov V. M. (eds.) Mechanics of Contact Interactions]. Moscow, Fizmatlit, 2001. 672 p. (in Russian).
13. Dub S. N. Curves of elasto-plastic deformation of thin coatings obtained in depth-sensing indentation experiments. *MRS Symposium Proceedings*, 1998, vol. 505, pp. 223–228. <https://doi.org/10.1557/PROC-505-223>
14. El-Sherbiny M. G. D., Halling J. The Hertzian contact of surfaces covered with metallic films. *Wear*, 1996, vol. 40, iss. 3, pp. 325–337. [https://doi.org/10.1016/0043-1648\(76\)90124-1](https://doi.org/10.1016/0043-1648(76)90124-1)
15. Pharr G. M., Oliver W. C. Measurement of thin film mechanical properties using nanoindentation. *MRS Bulletin*, 1992, vol. 17, pp. 28–33. <https://doi.org/10.1557/S0883769400041634>
16. Aizikovich S. M. Asymptotic solutions of contact problems of the theory of elasticity for media inhomogeneous in depth. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1982, vol. 46, iss. 1, pp. 116–124. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(82\)90091-0](https://doi.org/10.1016/0021-8928(82)90091-0), EDN: XUXFLE
17. Vasiliev A. S., Volkov S. S., Aizikovich S. M. Approximated analytical solution of a problem on indentation of an electro-elastic half-space with inhomogeneous coating by a conductive punch. *Doklady Physics*, 2018, vol. 63, iss. 1, pp. 18–22. <https://doi.org/10.1134/S1028335818010020>, EDN: YVUVSK
18. Volkov S. S., Vasiliev A. S., Aizikovich S. M., Seleznev N. M., Leontieva A. V. Stress-strain state of an elastic soft functionally-graded coating subjected to indentation by a spherical punch. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2016, iss. 4, pp. 20–34 (in Russian). <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2016.4.02>, EDN: XSESAL
19. Vasiliev A. S., Volkov S. S., Aizikovich S. M., Litvinenko A. N. Indentation of an elastic half-space reinforced with a functionally graded interlayer by a conical punch. *Materials Physics and Mechanics*, 2018, vol. 40, iss. 2, pp. 254–260. https://doi.org/10.18720/MPM.4022018_14, EDN: VPDWVG
20. Vasiliev A. S., Volkov S. S., Aizikovich S. M. Indentation of an axisymmetric punch into an elastic transversely-isotropic half-space with functionally graded transversely-isotropic coating. *Materials Physics and Mechanics*, 2016, vol. 28, iss. 1–2, pp. 11–15. EDN: XCQJUT
21. Sadyrin E., Vasiliev A., Volkov S. Mathematical modeling of experiment on Berkovich nanoindentation of ZrN coating on steel substrate. *Acta Polytechnica CTU Proceedings*, 2020, vol. 27: Proceedings of the 14th International Conference on Local Mechanical Properties – LMP 2019, pp. 18–21. <https://doi.org/10.14311/APP.2020.27.0018>
22. Ovcharenko A., Halperin G., Verberne G., Etsion I. In situ investigation of the contact area in elastic-plastic spherical contact during loading-unloading. *Tribology Letters*, 2007, vol. 25, pp. 153–160. <https://doi.org/10.1007/s11249-006-9164-y>

Поступила в редакцию / Received 30.11.2023

Принята к публикации / Accepted 30.12.2023

Опубликована / Published 31.05.2024