



Научная статья
УДК 539.3

Об идентификации двумерного закона изменения плотности упругого неоднородного цилиндра

В. В. Дударев[✉], В. Н. Дядечко

Институт математики, механики и компьютерных наук имени И. И. Воровича, Южный федеральный университет, Россия, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, д. 8а

Дударев Владимир Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории упругости, dudarev_vv@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-2378-7574>, AuthorID: 561179

Дядечко Вячеслав Николаевич, студент кафедры теории упругости, vndyadchko@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-1081-3008>

Аннотация. В рамках линейной теории упругости с использованием модели изотропного тела сформулирована задача об установившихся колебаниях неоднородного полого цилиндра. Колебания цилиндра вызываются нагрузкой, приложенной к боковой поверхности, на торцах реализованы условия скользящей заделки. Переменные свойства материала описываются параметрами Ламе и плотностью, которые изменяются по радиальной и продольной координатам. Решение прямой задачи расчета колебаний цилиндра построено с помощью метода конечных элементов, реализованного в пакете FlexPDE, отмечены его основные преимущества. Для исследования влияния переменных свойств на значения резонансных частот колебаний и компонент поля перемещений рассмотрены законы изменения этих свойств в общем виде, используемом в современных работах для моделирования функционально-градиентных материалов. На основе проведенных численных расчетов исследована степень влияния амплитудных значений каждого из параметров Ламе и плотности на первую резонансную частоту и поле смещений. Также представлены графики, демонстрирующие влияние вида закона изменения плотности на значения компонент поля перемещений. Сформулирована новая коэффициентная обратная задача об определении функции распределения плотности в стенке цилиндра по данным о поле перемещений, измеренном в конечном наборе точек внутри области рассмотрения при фиксированной частоте. Отмечены основные трудности при реализации процедуры реконструкции на практике. Для увеличения точности вычисления первых и вторых производных от рассчитанных в конечно-элементном пакете двумерных функций, которые используются при решении обратной задачи, предложен подход, основанный на алгоритме локально взвешенной регрессии. Представлены результаты вычислительных экспериментов по решению обратной задачи, которые демонстрируют возможность использования предложенного метода для восстановления различных видов двумерных законов изменения плотности. Даны практические рекомендации по реализации наиболее эффективной процедуры реконструкции.

Ключевые слова: цилиндр, неоднородный материал, метод конечных элементов, обратная задача, идентификация, плотность

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 18-71-10045, <https://rscf.ru/project/18-71-10045/>) в Южном федеральном университете. Авторы благодарят профессора А. О. Ватульяна за внимание к работе.

Для цитирования: Дударев В. В., Дядечко В. Н. Об идентификации двумерного закона изменения плотности упругого неоднородного цилиндра // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 3. С. 381–393. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-381-393>, EDN: JATOPJ

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Article

On identification of two-dimensional density of an elastic inhomogeneous cylinder

V. V. Dudarev[✉], V. N. Dyadechko

Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science named after I. I. Vorovich, Southern Federal University, 8a Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia

Vladimir V. Dudarev, dudarev_vv@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-2378-7574>, AuthorID: 561179

Vyacheslav N. Dyadechko, vndyadechko@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-1081-3008>

Abstract. Within the framework of the linear theory of elasticity, using the model of an isotropic body, the problem of steady-state vibrations of an inhomogeneous hollow cylinder is formulated. The vibrations of the cylinder are caused by a load applied to the side surface, and the conditions of sliding embedding are implemented at the ends. The variable material properties are described by the Lamé parameters and density, which change along the radial and longitudinal coordinates. The direct problem solution of the cylinder vibrations is constructed using the finite element method implemented in the FlexPDE package, its main advantages are noted. To study the influence of variable properties on the values of resonant frequencies and components of the displacement field, the laws of these properties are considered in the general form used in modern works for modeling functionally graded materials. On the basis of the performed numerical calculations, the degree of influence of the amplitude values of each of the Lamé parameters and density on the first resonant frequency and the displacement field are studied. Graphs are also presented that demonstrate the influence of the type of the law of density change on the values of the displacement field components. A new inverse coefficient problem is formulated to determine the density distribution function in the cylinder wall from the displacement field data measured at a finite set of points inside the considered area for a fixed frequency. The main difficulties in the implementation of the reconstruction procedure in practice are noted. To increase the accuracy of calculating the first and second derivatives of the two-dimensional functions calculated in the finite element package, which are used in solving the inverse problem, an approach based on the locally weighted regression algorithm is proposed. The results of computational experiments on solving the inverse problem are presented, which demonstrate the possibility of using the proposed method to restore various types of two-dimensional laws of density. Practical recommendations are given for the implementation of the most accurate reconstruction procedure.

Keywords: cylinder, inhomogeneous material, finite element method, inverse problem, identification, density

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 18-71-10045, <https://rscf.ru/project/18-71-10045/>) in the Southern Federal University. The authors thank Professor Vatulyan A. O. for the attention to the manuscript.

For citation: Dudarev V. V., Dyadechko V. N. On identification of two-dimensional density of an elastic inhomogeneous cylinder. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 3, pp. 381–393 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-381-393>, EDN: JATOPJ

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

При конструировании многих современных сооружений и объектов использование традиционных материалов в настоящее время уступает место внедрению новых неоднородных материалов со сложными механическими свойствами. Их применение позволяет улучшить



прочностные и другие эксплуатационные свойства изделий, повысить их функциональность, надежность и продлить срок эксплуатации. К таким материалам относятся различные функционально-градиентные материалы (ФГМ), свойства которых изменяются по пространственным координатам [1–3]. ФГМ особо востребованы в аэрокосмической промышленности, при производстве деталей и узлов космических аппаратов и самолетов. Неоднородные материалы, имеющие улучшенное свойство термоустойчивости, могут выдерживать длительные термические нагрузки, которые испытывают космические аппараты при прохождении воздушных слоев, а также значительно повышают сопротивляемость коррозии [3–5]. Высокая прочность таких материалов делает их пригодными для применения в сложных условиях. Использование ФГМ позволяет существенно оптимизировать ряд важнейших характеристик объектов, например сопротивляемость к температурным и химическим воздействиям.

В процессе производства ФГМ достигается возможность непрерывно изменять процентное соотношение количества фракций всех составляющих по объему материала, что в свою очередь обеспечивает неоднородную микроструктуру, физические свойства которой могут изменяться в достаточно широких диапазонах [3, 4, 6]. Сама процедура изготовления таких материалов — сложный процесс, в ходе которого используются различные методы обработки материалов, как традиционные, такие как сплавка, термическая обработка, прокатка, нагартовка, спаивание и т. д., так и разработанные в последнее время, например метод энергетического воздействия. Сочетание различных способов обработки позволяет сформировать надежную градиентную структуру материалов, обеспечивающую высокий уровень качества изделий из ФГМ, которые в дальнейшем используются для работы в сложных эксплуатационных условиях. Некоторые технические вопросы изготовления ФГМ описаны в работах [6, 7]. В обзорной статье [8] по теме ФГМ проанализированы 299 источников, опубликованных с 2000 по 2015 г. В качестве одного из важных аспектов исследований ФГМ в них отмечается важность создания методик определения законов изменения свойств материала.

Следует отметить, что любое технологически сложное изделие должно быть подвергнуто проверкам и исследованиям для оценки соответствия реальных и проектных характеристик. Наиболее востребованным методом неразрушающей диагностики свойств материала является акустический подход. Он обладает важными преимуществами по сравнению с остальными: высокая точность, экономичность и оперативность проведения экспериментов [9–11]. На его основе удастся построить эффективные схемы идентификации механических характеристик тел и конструкций по данным акустического зондирования. Акустический подход для цилиндра применялся в статье [12], где была рассмотрена задача о восстановлении одномерных законов изменения параметров Ламе в упругом полом ФГ-цилиндре по данным о функциях смещения, измеренных в конечном наборе точек внутри цилиндра.

В настоящее время одним из самых распространенных способов численного моделирования поведения ФГМ с пространственным изменением свойств является использование метода конечных элементов (МКЭ) [13] при проведении расчетов. Этот метод позволяет исследовать достаточно широкий класс объектов конечных размеров, задавая свойства материалов, из которых изготовлен объект, как численно, так и в виде функциональных зависимостей. Одно из ключевых преимуществ использованного программного пакета FlexPDE состоит в том, что он дает возможность явно задавать уравнения движения, а также определяющие соотношения, что существенно упрощает реализацию решения задачи.

В настоящей работе рассмотрена задача об установившихся колебаниях полого цилиндра, изготовленного из ФГМ, свойства которого изменяются одновременно по продольной и радиальной координатам. Проведен анализ влияния переменных свойств на основные акустические характеристики. Рассмотрена обратная задача о восстановлении двумерной функции плотности по данным о поле смещения, измеренном в конечном наборе точек.

1. Постановка прямой задачи

Общую постановку задачи об установившихся колебаниях изотропного тела, изготовленного из ФГМ, в рамках линейной теории упругости после отделения временного множителя

можно записать в виде [1, 2, 14]:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \underline{\sigma} + \rho \omega^2 \underline{u} = 0, \\ \underline{\sigma} = \lambda \underline{E} \text{tr} \underline{\varepsilon} + 2\mu \underline{\varepsilon}, \\ \underline{\varepsilon} = 0.5(\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T), \\ \underline{u}|_{S_u} = 0, \quad \underline{n} \cdot \underline{\sigma}|_{S_\sigma} = \underline{P}, \end{cases} \quad (1)$$

где $\underline{\sigma}$ — тензор напряжений Коши, ω — частота колебаний, \underline{u} — вектор перемещений, $\underline{\varepsilon}$ — линейный тензор деформации, \underline{E} — единичный тензор, \underline{n} — единичный вектор внешней нормали к поверхности тела $S = S_u \cup S_\sigma$, \underline{P} — вектор внешней нагрузки, приложенной на части поверхности S_σ . Параметры Ламе λ , μ и плотность ρ в общем случае являются функциями трех пространственных координат.

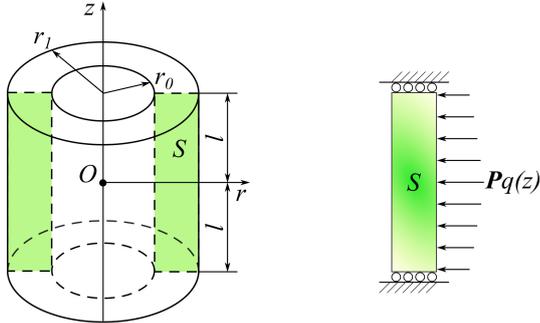


Рис. 1. Полый ФГ-цилиндр с нагрузкой на внешней боковой поверхности

Fig. 1. Hollow FG-cylinder with load on the outer side surface

Основываясь на постановке (1), рассмотрим осесимметричные колебания полого ФГ-цилиндра в цилиндрической системе координат (r, φ, z) (рис. 1). Свойства материала изменяются по радиальной и продольной координатам. Длина цилиндра равна $2l = 1$ м, внутренний и внешний радиусы соответственно равны $r_0 = 0.8$ м и $r_1 = 1$ м. На верхней и нижней торцевых поверхностях заданы условия скользящей заделки. Колебания вызываются радиальной нагрузкой, которая приложена к внешней боковой границе цилиндра, имеет амплитуду P и изменяется по продольной координате по закону $q(z)$. Внутренняя поверхность не нагружена.

Постановку задачи для рассматриваемого цилиндра можно записать в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \rho \omega^2 u_r = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho \omega^2 u_z = 0, \\ u_z = 0, \quad \sigma_{rz} = 0, \quad r \in [r_0, r_1], \quad z = \pm l, \\ \sigma_{rr} = \sigma_{rz} = 0, \quad r = r_0, \quad z \in [-l, l], \\ \sigma_{rr} = -Pq(z), \quad \sigma_{rz} = 0, \quad r = r_1, \quad z \in [-l, l], \end{cases} \quad (2)$$

где $\sigma_{rr} = 2\mu\varepsilon_{rr} + \lambda\theta$, $\sigma_{zr} = \sigma_{rz} = 2\mu\varepsilon_{rz}$, $\sigma_{\varphi\varphi} = 2\mu\varepsilon_{\varphi\varphi} + \lambda\theta$, $\sigma_{zz} = 2\mu\varepsilon_{zz} + \lambda\theta$ — компоненты тензора напряжений; $\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}$, $\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}$, $\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$, $\varepsilon_{rz} = 0.5 \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right)$ — компоненты тензора деформаций; $\theta = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz}$; $u_r = u_r(r, z)$ — компонента вектора смещения \underline{u} в радиальном направлении; $u_z = u_z(r, z)$ — в продольном; $S = \{(r, z) \in R^2 | r \in [r_0, r_1], z \in [-l, l]\}$ — область, на которой строится решение.

Для общности рассуждений запишем постановку задачи в безразмерном виде путем введения безразмерных параметров и функций:

$$\begin{cases} S_{\xi\xi,\xi} + S_{x\xi,x} + \frac{S_{\xi\xi} - S_{\varphi\varphi}}{\xi} + \kappa^2 \tilde{\rho} u_\xi = 0, \\ S_{\xi x,\xi} + S_{xx,x} + \frac{S_{\xi x}}{\xi} + \kappa^2 \tilde{\rho} u_x = 0, \\ u_x = 0, S_{\xi x} = 0, \xi \in [\xi_0, 1], x = \pm l_0, \\ S_{\xi\xi} = S_{\xi x} = 0, \xi = \xi_0, x \in [-l_0, l_0], \\ S_{\xi\xi} = -pq(x), S_{\xi x} = 0, \xi = 1, x \in [-l_0, l_0], \end{cases} \quad (3)$$



где $r = \xi r_1$, $\xi_0 = r_0/r_1 = 0.8$, $z = x r_1$, $l_0 = l/r_1 = 0.5$, $c^* = \mu^*/\lambda^*$, $p = P/\lambda^*$, $\sigma_{rr} = \lambda^* S_{\xi\xi}$, $\sigma_{\varphi\varphi} = \lambda^* S_{\varphi\varphi}$, $\sigma_{zr} = \lambda^* S_{x\xi}$, $\sigma_{zz} = \lambda^* S_{xx}$, $u_r = r_1 u_\xi$, $u_z = r_1 u_x$; $\kappa^2 = \rho^* \omega^2 r_1^2 / \lambda^*$ – безразмерный параметр, пропорциональный частоте колебаний; $\lambda = \lambda^* \tilde{\lambda}(\xi, x)$, $\mu = \mu^* \tilde{\mu}(\xi, x)$, $\rho = \rho^* \tilde{\rho}(\xi, x)$, где λ^* , μ^* , ρ^* – характерные значения соответствующих характеристик; функции $\tilde{\mu}(\xi, x)$, $\tilde{\lambda}(\xi, x)$, $\tilde{\rho}(\xi, x)$ определяют законы изменения переменных свойств материала. Здесь и далее для краткости записи принято обозначение частных производных $S_{\xi\xi, \xi} = \partial S_{\xi\xi} / \partial \xi$. Определяющие соотношения для безразмерных величин имеют вид

$$\begin{cases} S_{\xi\xi} = 2c^* \tilde{\mu} \varepsilon_{\xi\xi} + \tilde{\lambda} \theta, & S_{\varphi\varphi} = 2c^* \tilde{\mu} \varepsilon_{\varphi\varphi} + \tilde{\lambda} \theta, \\ S_{xx} = 2c^* \tilde{\mu} \varepsilon_{xx} + \tilde{\lambda} \theta, & S_{x\xi} = S_{\xi x} = 2c^* \tilde{\mu} \varepsilon_{x\xi}, \\ \varepsilon_{\xi\xi} = u_{\xi, \xi}, & \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_\xi}{\xi}, & \varepsilon_{xx} = u_{x, x}, \\ \varepsilon_{\xi x} = 0.5 (u_{x, \xi} + u_{\xi, x}). \end{cases} \quad (4)$$

В рассматриваемом случае неоднородного материала решение задачи (3)–(4) можно получить только численно. Одним из широко используемых для таких целей методов является МКЭ. В настоящей работе использован пакет FlexPDE, в котором реализован этот метод. Следует отметить, что основным преимуществом этого пакета является возможность задания в явном виде определяющих соотношений, уравнений колебаний, граничных условий и законов изменения переменных характеристик.

2. Анализ чувствительности

Ранее в статье [15] был проведен анализ влияния переменных по радиальной координате свойств материала цилиндра на основные акустические характеристики и дана оценка точности решения, полученного в пакете FlexPDE. Для исследования влияния свойств ФГМ, изготовленного из смеси четырех составляющих, на поле перемещений рассмотрим один из наиболее часто используемых видов законов, описывающих их одновременное непрерывное изменение по продольной и радиальной координатам [16]:

$$\begin{aligned} f_\lambda(\xi, x) &= \lambda_1 V_1(\xi, x) + \lambda_2 V_2(\xi, x) + \lambda_3 V_3(\xi, x) + \lambda_4 V_4(\xi, x), \\ f_\mu(\xi, x) &= \mu_1 V_1(\xi, x) + \mu_2 V_2(\xi, x) + \mu_3 V_3(\xi, x) + \mu_4 V_4(\xi, x), \\ f_\rho(\xi, x) &= \rho_1 V_1(\xi, x) + \rho_2 V_2(\xi, x) + \rho_3 V_3(\xi, x) + \rho_4 V_4(\xi, x), \end{aligned} \quad (5)$$

где на области $S^* = \{(\xi, x) \in R^2 | \xi \in [\xi_0, 1], x \in [-l_0, l_0]\}$ введены функции

$$\begin{aligned} V_1(\xi, x) &= \left(1 - \left(\frac{\xi - \xi_0}{1 - \xi_0}\right)^n\right) \left(1 - \left(\frac{x + l_0}{2l_0}\right)^m\right), \\ V_2(\xi, x) &= \left(1 - \left(\frac{\xi - \xi_0}{1 - \xi_0}\right)^n\right) \left(\frac{x + l_0}{2l_0}\right)^m, \\ V_3(\xi, x) &= \left(\frac{\xi - \xi_0}{1 - \xi_0}\right)^n \left(1 - \left(\frac{x + l_0}{2l_0}\right)^m\right), \\ V_4(\xi, x) &= \left(\frac{\xi - \xi_0}{1 - \xi_0}\right)^n \left(\frac{x + l_0}{2l_0}\right)^m. \end{aligned} \quad (6)$$

Положительные параметры n и m характеризуют степень градиентности свойств по координатам ξ и x соответственно, $\lambda_i, \mu_i, \rho_i, i = \overline{1, 4}$ – безразмерные значения параметров Ламе и плотности соответствующего i -го вещества.

В качестве конкретного примера рассмотрим ФГМ, состоящий из керамик SiC (вещество 1), Al₂O₃ (вещество 2), которые достигают 100% своей концентрации соответственно в точках $(\xi_0, -l_0)$ и (ξ_0, l_0) на внутренней поверхности цилиндра, и металлов Ti6Al4V (вещество 3), Al 1100 (вещество 4), которые достигают 100% своей концентрации соответственно в



точках $(1, -l_0)$ и $(1, l_0)$ на внешней боковой поверхности. Значения модуля Юнга E , коэффициента Пуассона ν , модуля сдвига μ и плотности ρ были взяты из данных, представленных в открытом доступе на сайте www.matweb.com, соответствующие значения параметра λ определены по известной формуле $\lambda = \nu E / ((1 + \nu)(1 - 2\nu))$. Значения безразмерных параметров Ламе λ_i, μ_i и плотности $\rho_i, i = \overline{1, 4}$, вычислялись с точностью до второго знака после запятой согласно введенными правилам, при этом были выбраны $\lambda^* = 50$ ГПа, $\mu^* = 25$ ГПа, $\rho^* = 1000$ кг/м³. Все данные представлены в табл. 1.

Таблица 1 / Table 1

Значение размерных и безразмерных параметров четырех веществ ФГМ
The value of the dimensional and dimensionless parameters of the four FGM substances

№ п/п	Вещество	E , ГПа	ν	μ , ГПа	λ , ГПа	ρ , кг/м ³	λ_i	μ_i	ρ_i
1	SiC	410	0.140	180	69.93	3210	1.4	7.2	3.21
2	Al2O3	370	0.220	140	119.1	3900	2.38	5.6	3.9
3	Ti6Al4V	113.8	0.342	44	91.8	4430	1.84	1.76	4.43
4	Al 1100	69	0.330	26	50.4	2710	1.01	1.04	2.71

Проведем анализ влияния амплитудных значений параметров Ламе и плотности на изменение компонент поля перемещений. Для этого по аналогии с одномерным случаем [17] введем в рассмотрение функции

$$\tilde{\lambda}_d(\xi, x) = (1 + d) \cdot f_\lambda(\xi, x), \quad \tilde{\mu}_d(\xi, x) = (1 + d) \cdot f_\mu(\xi, x), \quad \tilde{\rho}_d(\xi, x) = (1 + d) \cdot f_\rho(\xi, x), \quad (7)$$

где $d = 0.001, 0.01, 0.1$ — формальный параметр, величина которого характеризует амплитудные значения исследуемых свойств. Для анализа влияния конкретной характеристики соответствующий закон ее изменения выбирался из (7) при $n = m = 1$, а два других фиксировались при значении $d = 0$. Для удобства оценки относительного изменения компонент поля перемещений (u_ξ, u_x) введем в рассмотрение функции

$$\delta_\xi = \frac{|u_\xi - u_\xi^0|}{\max_S |u_\xi^0|} \cdot 100\%, \quad \delta_x = \frac{|u_x - u_x^0|}{\max_S |u_x^0|} \cdot 100\%, \quad (8)$$

где u_ξ^0, u_x^0 — компоненты поля перемещений, соответствующего законам (7) при $d = 0, n = m = 1$. Проведенные расчеты показали, что для всех рассмотренных значений d наибольшее влияние на поле перемещений имело изменение амплитудных значений модуля сдвига μ , а наименьшее — параметра λ . В качестве примера на рис. 2–3 представлены графики δ_ξ, δ_x при $d = 0.1$.

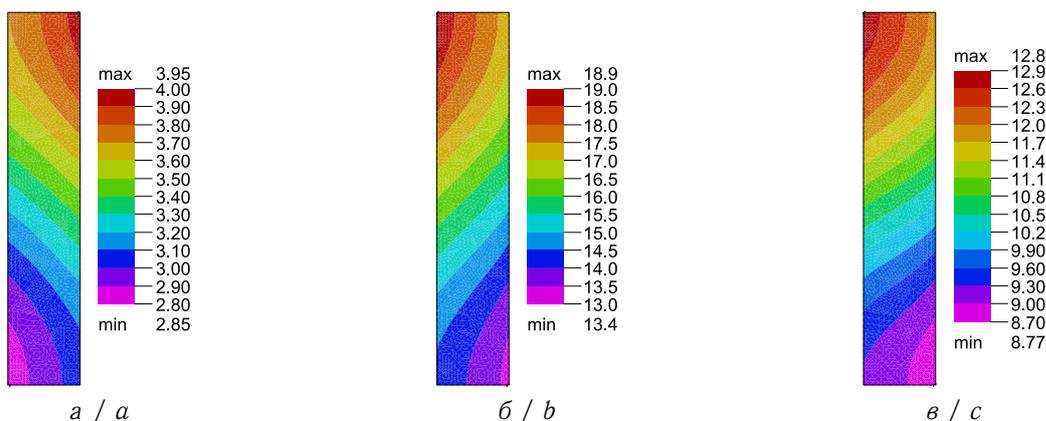


Рис. 2. Графики функции δ_ξ для $d = 0.1, n = m = 1$, соответствующие амплитудному изменению только одной функции: а — $\tilde{\lambda}_d(\xi, x)$; б — $\tilde{\mu}_d(\xi, x)$; в — $\tilde{\rho}_d(\xi, x)$ (цвет онлайн)
Fig. 2. Graphs of the function δ_ξ for $d = 0.1, n = m = 1$ corresponding to the amplitude change of only one function: а — $\tilde{\lambda}_d(\xi, x)$; б — $\tilde{\mu}_d(\xi, x)$; в — $\tilde{\rho}_d(\xi, x)$ (color online)

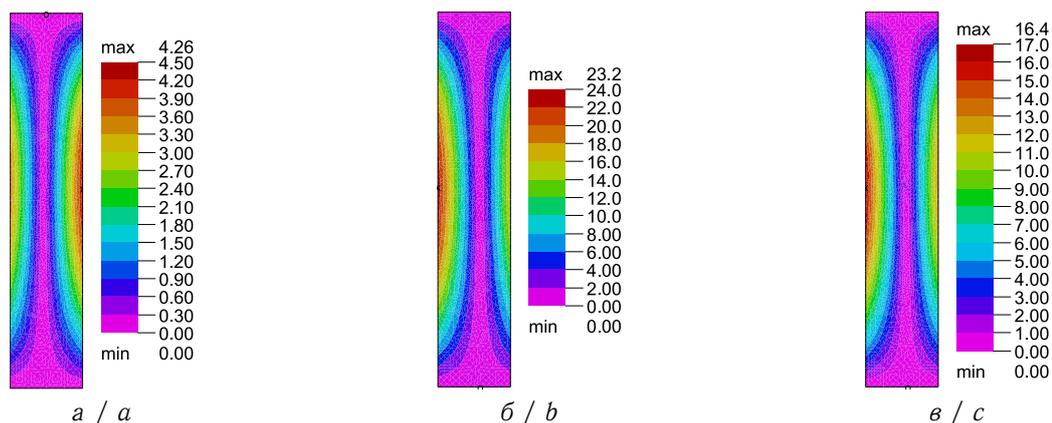


Рис. 3. Графики функции δ_x для $d = 0.1$, $n = m = 1$, соответствующие амплитудному изменению только одной функции: $a - \tilde{\lambda}_d(\xi, x)$; $б - \tilde{\mu}_d(\xi, x)$; $в - \tilde{\rho}_d(\xi, x)$ (цвет онлайн)

Fig. 3. Graphs of the δ_x function for $d = 0.1$, $n = m = 1$ corresponding to the amplitude change of only one function: $a - \tilde{\lambda}_d(\xi, x)$; $б - \tilde{\mu}_d(\xi, x)$; $с - \tilde{\rho}_d(\xi, x)$ (color online)

Здесь для всех случаев значение безразмерной частоты выбиралось равным $\kappa = 1.0$ (до первого резонанса), в качестве закона изменения нагрузки принималась константная функция $q(x) = 1$. В табл. 2 представлены значения первой резонансной частоты колебаний κ с точностью до пятого знака после запятой. При $d = 0$ для всех функций λ_d , μ_d , ρ_d и $n = m = 1$ первый резонанс наблюдается при $\kappa \approx 1.3448$. При проведении расчетов контроль точности осуществлялся путем задания в пакете FlexPDE значения служебного параметра $\text{errlim} = 10^{-6}$, который характеризует относительную погрешность.

Из полученных данных видно, что, как и в рассмотренном в работе [17] случае, только радиальной неоднородности материала амплитудные значения модуля сдвига μ и плотности ρ оказывают более существенное влияние на поля перемещений и резонансные значения параметра κ , чем соответствующие значения параметра λ .

Для анализа влияния вида функции изменения плотности на значения компонент поля перемещений проведены вычислительные эксперименты. Законы изменения параметров Ламе фиксировались в виде линейных функций (5) $\tilde{\lambda}(\xi, x) = f_\lambda(\xi, x)$, $\tilde{\mu}(\xi, x) = f_\mu(\xi, x)$ при $n = m = 1$, а закон изменения плотности выбирался как $\tilde{\rho}(\xi, x) = f_\rho(\xi, x)$ при значениях $n = m = 2, 3$. Соответствующие графики функций δ_ξ , δ_x представлены на рис. 4. Из этих данных видно, что вид закона изменения функции плотности (степень его градиентности) также существенно влияет на значения компонент поля перемещений.

Таблица 2 / Table 2

Значения первой безразмерной резонансной частоты κ при различных значениях параметра d и одной из изменяемых функций $\tilde{\lambda}_d(\xi, x)$, $\tilde{\mu}_d(\xi, x)$, $\tilde{\rho}_d(\xi, x)$ при $n = m = 1$

Values of the first dimensionless resonant frequency κ for different values of the parameter d and one of the variable functions $\tilde{\lambda}_d(\xi, x)$, $\tilde{\mu}_d(\xi, x)$, $\tilde{\rho}_d(\xi, x)$ for $n = m = 1$

d	λ_d	μ_d	ρ_d
0.001	1.34494	1.34539	1.34416
0.010	1.34595	1.35042	1.33816
0.100	1.35566	1.39946	1.28225

3. Обратная задача

Рассмотрим модельную обратную задачу о восстановлении двумерной функции плотности по заданному полю перемещений в конечном наборе точек при фиксированной частоте. Предполагается, что законы изменения параметров Ламе известны, например, они могут быть заранее определены по данным о поле перемещения из экспериментов при воздействии статическими нагрузками [18]. Задачи такого вида также называют коэффициентными

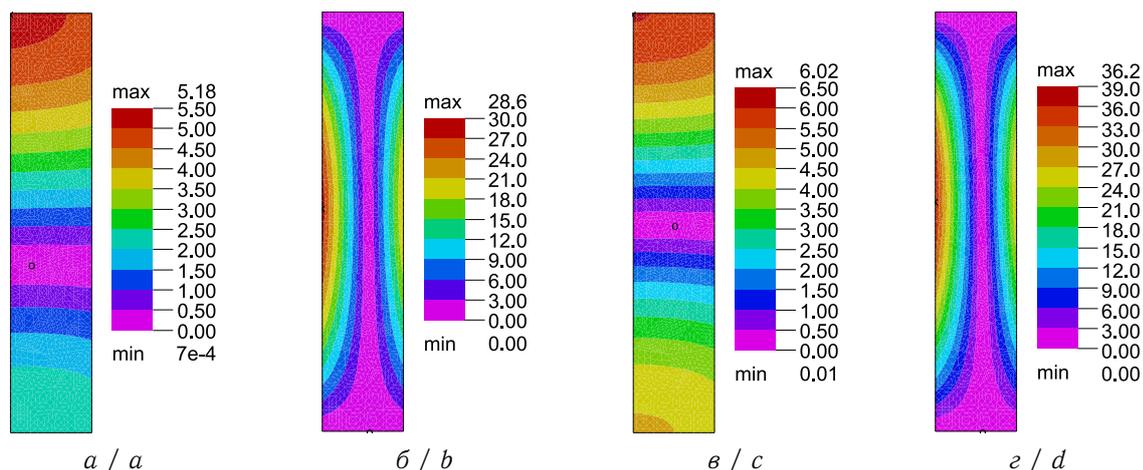


Рис. 4. Графики функций δ_ξ, δ_x при различных законах $f_\rho(\xi, x)$: а – $\delta_\xi, n = m = 2$; б – $\delta_x, n = m = 2$; в – $\delta_\xi, n = m = 3$; г – $\delta_x, n = m = 3$ (цвет онлайн)
 Fig. 4. Graphs of functions δ_ξ, δ_x for different laws $f_\rho(\xi, x)$: а – $\delta_\xi, n = m = 2$; б – $\delta_x, n = m = 2$; в – $\delta_\xi, n = m = 3$; г – $\delta_x, n = m = 3$ (color online)

обратными задачами первого типа [10, 11]. Формально решение достаточно просто получить из первого уравнения колебаний:

$$\tilde{\rho}_{rec} = - \frac{S_{\xi\xi,\xi} + S_{x\xi,x} + \frac{S_{\xi\xi} - S_{\varphi\varphi}}{\xi}}{\kappa^2 u_\xi}. \tag{9}$$

Следует сразу отметить, что при заданных граничных условиях (скользящей заделки) из второго уравнения невозможно получить решение этой задачи во всей области, так как на торцах цилиндра (верхней и нижней гранях области S) $u_x = 0$.

С практической точки зрения основной сложностью при рассматриваемом подходе является измерение поля перемещений внутри цилиндра в конечном наборе точек при фиксированной частоте. Также при реализации решения согласно (9) вызывает трудности вычисление первых и вторых производных от функций u_ξ, u_x , заданных в конечном числе точек. Для преодоления этой проблемы предложен алгоритм моделирования вычислительного эксперимента для реализации решения обратной задачи, включающий следующие шаги:

- 1) построение численного решения прямой задачи при точно заданной восстанавливаемой функции $\tilde{\rho}_{ex}$ с помощью МКЭ в пакете FlexPDE;
- 2) получение входной информации для обратной задачи – значений компонент поля перемещений u_ξ, u_x в конечном наборе точек $(\xi_i, x_j), \xi_i = \xi_0 + (i - 1)h_\xi, h_\xi = (\xi_0 - 1)/(n_\xi - 1), i = 1..n_\xi, x_j = -l_0 + (j - 1)h_x, h_x = 2l_0/(m_x - 1), j = 1..m_x$;
- 3) интерполяция значений функций $u_\xi(\xi_i, x_j), u_x(\xi_i, x_j)$ радиальной базисной функцией u_ξ^s, u_x^s ;
- 4) вычисление значений функций напряжений согласно определяющим соотношениям (4) в точках (ξ_i, x_j) ;
- 5) осуществление «сглаживания» полученных наборов данных, соответствующих для каждой функции напряжений, с помощью алгоритма локально взвешенной регрессии LOWESS (Locally Weighted Scatterplot Smoothing) [19] в пакете Maple;
- 6) по «сглаженным» узловым значениям в точках (ξ_i, x_j) строятся соответствующие сплайны для функций напряжений $S_{\xi\xi}^s, S_{x\xi}^s, S_{\varphi\varphi}^s$ и вычисляются первые производные $S_{\xi\xi,\xi}^s, S_{x\xi,x}^s$;
- 7) искомая функция $\tilde{\rho}_{rec}$ определяется из соотношения (9) с помощью подстановки в него полученных функций радиального смещения, компонент тензора напряжений и их производных.



При проведении модельных вычислительных экспериментов для определенности примем безразмерные параметры Ламе постоянными $\tilde{\lambda} = 1.66$, $\tilde{\mu} = 3.9$; выбранные значения получены путем осреднения соответствующих линейных законов (5) по площади области. Выберем одинаковыми шаги разбиения сетки входных данных $h_\xi = h_x$, тогда с учетом конкретных значений ξ_0 и l_0 для рассматриваемого цилиндра число узловых значений входных данных по радиальной и продольной координатам будут связаны соотношением $m_x = 5n_\xi$. Значение параметра $\kappa = 1.1$ выбрано вблизи первого резонанса, где наиболее существенно проявляется влияние переменных свойств на поле перемещений и амплитудно-частотные характеристики. Количество узлов выбрано равным $n_\xi = 20$, $m_x = 100$.

В настоящее время используются ФГМ с различными видами законов изменения свойств [20]. При проведении вычислительных экспериментов по решению обратной задачи реконструкции функции плотности рассмотрим наиболее характерные из них.

1. В качестве первого примера рассмотрим эксперимент по восстановлению квадратичной функции $\tilde{\rho}_{ex}(\xi, x) = f_\rho(\xi, x)$ из (5) при $n = m = 2$. На рис. 5 представлены графики компонент тензора напряжений $S_{\xi\xi}(\xi, x)$ и $S_{x\xi}(\xi, x)$, полученные на 6-ом шаге описанного алгоритма. Из графиков видно, что вблизи границы области у функций имеются особенности, связанные с граничными условиями. С учетом этого результаты реконструкции будут представлены на подобласти $S^* = \{(\xi, x) \in R^2 | \xi \in [0.82, 0.98], x \in [-0.4, 0.4]\}$, как наиболее значимой для применения метода на практике.

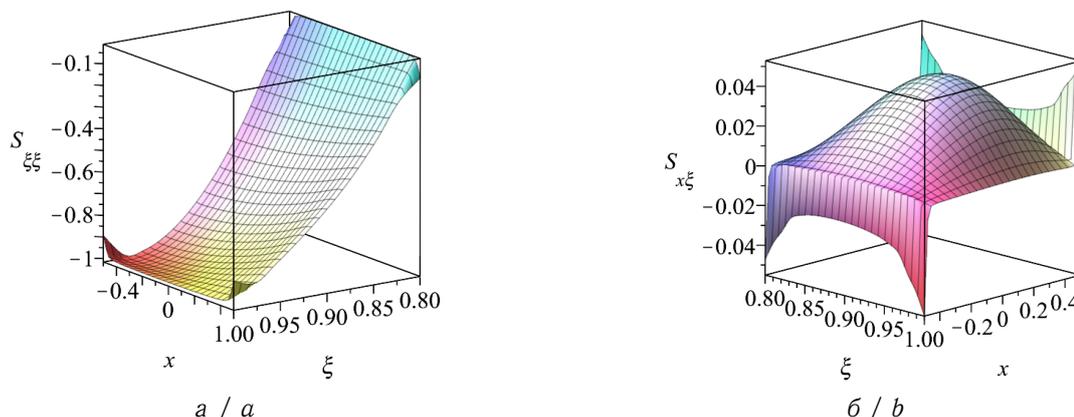


Рис. 5. Графики компонент тензора напряжений: а — $S_{\xi\xi}(\xi, x)$; б — $S_{x\xi}(\xi, x)$ (цвет онлайн)

Fig. 5. Graphs of stress tensor components: a — $S_{\xi\xi}(\xi, x)$; b — $S_{x\xi}(\xi, x)$ (color online)

Здесь и далее для демонстрации результатов восстановления в каждом примере на одном изображении будут представлены графики: точной функции $\tilde{\rho}_{ex}(\xi, x)$ в виде сплошной цветной поверхности, восстановленной функции $\tilde{\rho}_{rec}(\xi, x)$ в виде сетки черного цвета. Отдельно в каждом примере будет представлен график распределения функции относительной погрешности реконструкции δ_ρ вида

$$\delta_\rho = \frac{|\tilde{\rho}_{ex} - \tilde{\rho}_{rec}|}{\max_S |\tilde{\rho}_{ex}|} \cdot 100\%. \quad (10)$$

На рис. 6 для рассматриваемого примера квадратичной функции $\tilde{\rho}_{ex}(\xi, x) = f_\rho(\xi, x)$ представлены результаты восстановления. Видно, что погрешность не превосходит 1.2%.

2. Во втором примере рассмотрена реконструкция экспоненциального закона изменения плотности $\tilde{\rho}_{ex}(\xi, x) = e^\xi + e^{-1.2x}$, результаты представлены на рис. 7. Относительная погрешность не превосходит 1.12%.

3. В третьем эксперименте представлена реконструкция тригонометрического закона изменения плотности $\tilde{\rho}_{ex}(\xi, x) = 3.5 - 0.5 \cos(1.2\pi(\xi + 2x))$, результаты представлены на рис. 8. Относительная погрешность не превосходит 1.1%.

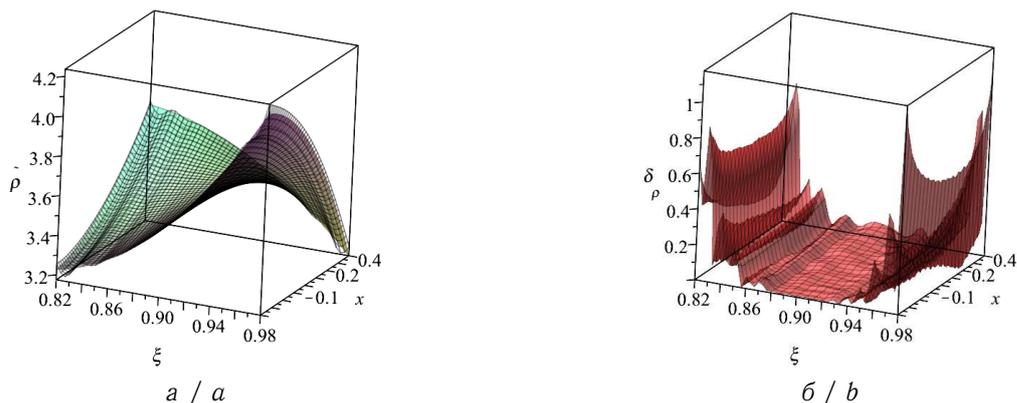


Рис. 6. Графики: *a* — точной квадратичной функции $\tilde{\rho}_{ex}(\xi, x) = f_{\rho}(\xi, x)$ (5) при $n = m = 2$ (сплошная поверхность) и восстановленной функции $\tilde{\rho}_{rec}(\xi, x)$ (сетка); *б* — функции δ_{ρ} (цвет онлайн)

Fig. 6. Graphs: *a* is plots of the exact quadratic function $\tilde{\rho}_{ex}(\xi, x) = f_{\rho}(\xi, x)$ (5) for $n = m = 2$ (solid surface) and the reconstructed functions $\tilde{\rho}_{rec}(\xi, x)$ (grid); *b* is graph of the function δ_{ρ} (color online)

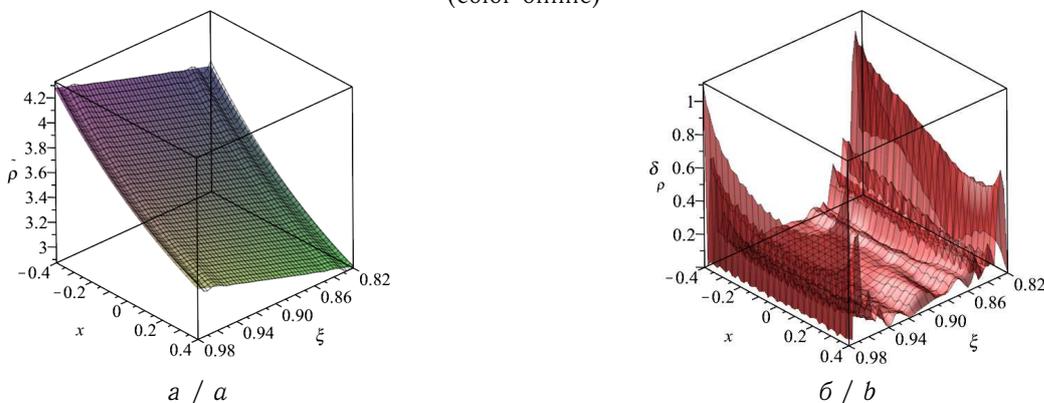


Рис. 7. Графики: *a* — точной функции $\tilde{\rho}_{ex}(\xi, x) = e^{\xi} + e^{-1.2x}$ (сплошная поверхность) и восстановленной функции $\tilde{\rho}_{rec}(\xi, x)$ (сетка); *б* — функции $\delta_{\rho}(\xi, x)$ (цвет онлайн)

Fig. 7. Graphs: *a* is graphs of the exact function $\tilde{\rho}_{ex}(\xi, x) = e^{\xi} + e^{-1.2x}$ (solid surface) and the restored function $\tilde{\rho}_{rec}(\xi, x)$ (grid); *b* is graph of the function $\delta_{\rho}(\xi, x)$ (color online)

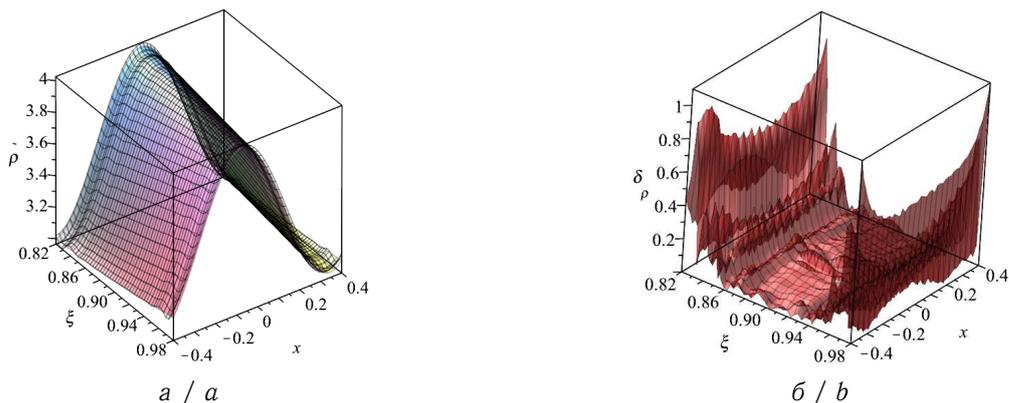


Рис. 8. *a* — графики точной функции $\tilde{\rho}_{ex}(\xi, x) = 3.5 - 0.5 \cos(1.2\pi(\xi + 2x))$ (сплошная поверхность) и восстановленной функции $\tilde{\rho}_{rec}(\xi, x)$ (сетка); *б* — график функции $\delta_{\rho}(\xi, x)$ (цвет онлайн)

Fig. 8. Graphs: *a* is graphs of the exact function $\tilde{\rho}_{ex}(\xi, x) = 3.5 - 0.5 \cos(1.2\pi(\xi + 2x))$ (solid surface) and the reconstructed function $\tilde{\rho}_{rec}(\xi, x)$ (grid); *b* is graph of the function $\delta_{\rho}(\xi, x)$ (color online)



Результаты вычислительных экспериментов показывают, что предлагаемый метод решения обратной задачи об определении двумерного закона изменения плотности по данным о значениях поля перемещений, измеренных в конечном наборе точек, может быть использован для идентификации функций различного типа с высокой степенью точности.

Заключение

В рамках линейной теории упругости для неоднородного упругого цилиндра рассмотрена двумерная задача об установившихся колебаниях. Изменяющиеся по продольной и радиальной координате, свойства цилиндра моделировались переменными параметрами Ламе и плотностью. Решение прямой задачи построено с помощью МКЭ, который был ранее апробирован для решения задачи для неоднородного по радиальной координате цилиндра. Показано влияние переменных свойств на поле перемещений. Сформулирована обратная коэффициентная задача об определении двумерного закона изменения плотности по данным о смещениях, измеренных в конечном наборе точек при фиксированной частоте. Отмечены основные сложности реализации ее численного исследования. Для решения обратной задачи предложен алгоритм, на основе которого удалось существенно улучшить точность вычисления первых и вторых производных от функций, рассчитываемых численно с помощью МКЭ, необходимых для определения искомой двумерной функции плотности. Приведенные примеры показывают эффективность использования предложенного подхода для восстановления различных видов двумерных законов изменения плотности материала.

Список литературы

1. Ломакин В. А. Теория упругости неоднородных тел. Москва : Ленанд, 2014. 367 с.
2. Калинчук В. В., Белянкова Т. И. Динамика поверхности неоднородных сред. Москва : Физматлит, 2009. 312 с.
3. Miyamoto Y., Kaysser W. A., Rabin B. H., Kawasaki A., Ford R. G. Functionally Graded Materials: Design, Processing and Applications. New York : Springer, 1999. 330 p. (Materials Technology Series, vol. 5). <https://doi.org/10.1007/978-1-4615-5301-4>
4. El-Galy I. M., Saleh B. I., Ahmed M. H. Functionally graded materials classifications and development trends from industrial point of view // SN Applied Sciences. 2019. Vol. 1. Art. 1378. <https://doi.org/10.1007/s42452-019-1413-4>
5. Chandrasekaran S. Design of Marine Risers with Functionally Graded Materials. Cambridge : Woodhead Publ., 2021. 143 p. <https://doi.org/10.1016/C2020-0-00360-9>
6. Majid M., Masoud R., Majid G. Functionally graded materials (FGMs): A review of classifications, fabrication methods and their applications // Processing and Application of Ceramics. 2021. Vol. 15, iss. 4. P. 319–343. <https://doi.org/10.2298/PAC2104319M>
7. Das Sh., Das S., Nampi T., Roy K., Brabazon D. Functionally grade composite material production // Encyclopedia of Materials: Composites. Oxford : Elsevier, 2021. P. 798–803. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-803581-8.11880-6>
8. Dai H. L., Rao Y. N., Dai T. A review of recent researches on FGM cylindrical structures under coupled physical interactions, 2000–2015 // Composite Structures. 2016. Vol. 152. P. 199–225. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.05.042>
9. Handbook of Advanced Nondestructive Evaluation / ed. by N. Ida, N. Meyendorf. Cham : Springer, 2019. 1626 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-26553-7>
10. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. Москва : Физматлит, 2007. 224 с.
11. Ватульян А. О. Коэффициентные обратные задачи механики. Москва : Физматлит, 2019. 272 с.
12. Vatulyan A. O., Dudarev V. V., Mnutkhin R. M., Nedin R. D. Identification of the Lamé parameters of an inhomogeneous pipe based on the displacement field data // European Journal of Mechanics – A/ Solids. 2020. Vol. 81. Art. 103939. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.103939>
13. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. Москва : Мир, 1984. 430 с.
14. Лурье А. И. Теория упругости. Москва : Наука, 1970. 939 с.
15. Dudarev V. V., Mnutkhin R. M., Nedin R. D., Vatulyan A. O. Effect of material inhomogeneity on characteristics of a functionally graded hollow cylinder // Applied Mathematics and Computation. 2020. Vol. 382. Art. 125333. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125333>
16. Asgari M., Akhlaghi M. Natural frequency analysis of 2D-FGM thick hollow cylinder based on



- three-dimensional elasticity equation // *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2011. Vol. 30, iss. 2. P. 72–81. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2010.10.002>
17. Vatulyan A. O., Dudarev V. V., Mnukhin R. M. Identification of characteristics of a functionally graded isotropic cylinder // *International Journal of Mechanics and Materials in Design*. 2021. Vol. 17. P. 321–332. <https://doi.org/10.1007/s10999-020-09527-5>
 18. Koohbor B., Mallon S., Kidane A., Anand A., Parameswaran V. Through thickness elastic profile determination of functionally graded materials // *Experimental Mechanics*. 2015. Vol. 55, iss. 8. P. 1427–1440. <https://doi.org/10.1007/s11340-015-0043-z>
 19. Cleveland W. S. Robust locally weighted regression and smoothing Scatterplots // *Journal of the American Statistical Association*. 1979. Vol. 74, iss. 368. P. 829–836. <https://doi.org/10.1080/01621459.1979.10481038>
 20. Marzavan S., Nastasescu V. Displacement calculus of the functionally graded plates by finite element method // *Alexandria Engineering Journal*. 2022. Vol. 61, iss. 12. P. 12075–12090. <https://doi.org/10.1016/j.aej.2022.06.004>

References

1. Lomakin V. A. *Teoriya uprugosti neodnorodnykh tel* [Theory of Elasticity of Inhomogeneous Bodies]. Moscow, Lenand, 2014. 367 p. (in Russian).
2. Kalinchuk V. V., Belyankova T. I. *Dinamika poverkhnosti neodnorodnykh sred* [Surface Dynamics of Inhomogeneous Media]. Moscow, Fizmatlit, 2009. 312 p. (in Russian).
3. Miyamoto Y., Kaysser W. A., Rabin B. H., Kawasaki A., Ford R. G. *Functionally Graded Materials: Design, Processing and Applications*. Materials Technology Series, vol. 5. New York, Springer, 1999. 330 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4615-5301-4>
4. El-Galy I. M., Saleh B. I., Ahmed M. H. Functionally graded materials classifications and development trends from industrial point of view. *SN Applied Sciences*, 2019, vol. 1, art. 1378. <https://doi.org/10.1007/s42452-019-1413-4>
5. Chandrasekaran S. *Design of Marine Risers with Functionally Graded Materials*. Cambridge, Woodhead Publ., 2021. 143 p. <https://doi.org/10.1016/C2020-0-00360-9>
6. Majid M., Masoud R., Majid G. Functionally graded materials classifications and development trends from industrial point of view. *Processing and Application of Ceramics*, 2021, vol. 15, iss. 4, pp. 319–343. <https://doi.org/10.2298/PAC2104319M>
7. Das Sh., Das S., Nampi T., Roy K., Brabazon D. Functionally grade composite material production. In: *Encyclopedia of Materials: Composites*. Oxford, Elsevier, 2021, pp. 798–803. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-803581-8.11880-6>
8. Dai H. L., Rao Y. N., Dai T. A review of recent researches on FGM cylindrical structures under coupled physical interactions, 2000–2015. *Composite Structures*, 2016, vol. 152, pp. 199–225. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.05.042>
9. Ida N., Meyendorf N. (eds.) *Handbook of Advanced Nondestructive Evaluation*. Cham, Springer, 2019. 1626 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-26553-7>
10. Vatulyan A. O. *Obratnye zadachi v mekhanike deformiruemogo tverdogo tela* [Inverse Problems in Solid Mechanics]. Moscow, Fizmatlit, 2007. 224 p. (in Russian).
11. Vatulyan A. O. *Koeffitsientnye obratnye zadachi mekhaniki* [Coefficient Inverse Problems of Mechanics]. Moscow, Fizmatlit, 2019. 272 p. (in Russian).
12. Vatulyan A. O., Dudarev V. V., Mnukhin R. M., Nedin R. D. Identification of the Lamé parameters of an inhomogeneous pipe based on the displacement field data. *European Journal of Mechanics – A/Solids*, 2020, vol. 81, art. 103939. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.103939>
13. Gallagher R. *Metod konechnykh elementov. Osnovy* [Finite Element Method. Basics]. Moscow, Mir, 1984. 430 p. (in Russian).
14. Lur'e A. I. *Teoriya uprugosti* [Theory of Elasticity]. Moscow, Nauka, 1970. 939 p. (in Russian).
15. Dudarev V. V., Mnukhin R. M., Nedin R. D., Vatulyan A. O. Effect of material inhomogeneity on characteristics of a functionally graded hollow cylinder. *Applied Mathematics and Computation*, 2020, vol. 382, art. 125333. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125333>
16. Asgari M., Akhlaghi M. Natural frequency analysis of 2D-FGM thick hollow cylinder based on three-dimensional elasticity equation. *European Journal of Mechanics – A/Solids*, 2011, vol. 30, iss. 2, pp. 72–81. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2010.10.002>
17. Vatulyan A. O., Dudarev V. V., Mnukhin R. M. Identification of characteristics of a functionally graded isotropic cylinder. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 2021, vol. 17, pp. 321–332. <https://doi.org/10.1007/s10999-020-09527-5>



18. Koohbor B., Mallon S., Kidane A., Anand A., Parameswaran V. Through thickness elastic profile determination of functionally graded materials. *Experimental Mechanics*, 2015, vol. 55, iss. 8, pp. 1427–1440. <https://doi.org/10.1007/s11340-015-0043-z>
19. Cleveland W. S. Robust locally weighted regression and smoothing Scatterplots. *Journal of the American Statistical Association*, 1979, vol. 74, iss. 368, pp. 829–836. <https://doi.org/10.1080/01621459.1979.10481038>
20. Marzavan S., Nastasescu V. Displacement calculus of the functionally graded plates by finite element method. *Alexandria Engineering Journal*, 2022, vol. 61, iss. 12, pp. 12075–12090. <https://doi.org/10.1016/j.aej.2022.06.004>

Поступила в редакцию / Received 16.12.2022

Принята к публикации / Accepted 27.01.2023

Опубликована / Published 30.08.2024