Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 3. С. 394–401
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 3, pp. 394–401
https://mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-394-401, EDN: JMEGQP

Научная статья
УДК 539.3

Гиперболический погранслой в окрестности фронта волны сдвига в оболочках вращения

И. В. Кириллова

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Кириллова Ирина Васильевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической теории упругости и биомеханики, iv@sgu.ru, https://orcid.org/0000-0001-8053-3680, AuthorID: 179980

Аннотация. В работе строятся асимптотическим методом уравнения гиперболического погранслоя в тонких оболочках вращения в малой окрестности фронта волны сдвига (с учетом его геометрии) при ударных торцевых воздействиях нормального типа. Используется специальная система координат, явно выделяющая узкую зону действия погранслоя. В этой системе координатные линии, определяемые нормалями к срединной поверхности, заменяются линиями, образующими поверхность переднего фронта волны сдвига. Асимптотическая модель геометрии переднего фронта волны предполагает, что эти образующие формируются повернутыми нормалями к срединной поверхности. Определены главные компоненты рассматриваемого типа напряженно-деформированного состояния: нормальное перемещение и касательное напряжение. Разрешающее уравнение рассматриваемого погранслоя является гиперболическим уравнением второго порядка с переменными коэффициентами относительно нормального перемещения.

Ключевые слова: асимптотическая теория, гиперболический погранслой, торцевые ударные воздействия нормального вида, волна сдвига, оболочка вращения, фронт волны

Для цитирования: *Кириллова И. В.* Гиперболический погранслой в окрестности фронта волны сдвига в оболочках вращения // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 3. С. 394–401. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-394-401, EDN: JMEGQP

Article

Hyperbolic boundary layer in the vicinity of the shear wave front in shells of revolution

I. V. Kirillova

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Irina V. Kirillova, iv@sgu.ru, https://orcid.org/0000-0001-8053-3680, AuthorID: 179980

Abstract. Hyperbolic boundary layer equations in thin shells of revolution are constructed in small vicinities of the shear wave fronts (taking into account its geometry) at edge shock loading of the normal type. Special coordinate system is used for defining the small boundary layer region. In this system, the coordinate lines defined by the normal to the middle surface are replaced by lines forming the surface of the shear wave front. The asymptotic model of the geometry of such a wave front suggests that these lines are formed by rotated normal to the middle surface. Asymptotically main components of considered stress strain state are defined: the normal displacement and the shear stress. The governing equation of this boundary layer is the hyperbolic equation of the second order with the variable coefficients for the normal displacement.

Keywords: asymptotical theory, hyperbolic boundary layer, edge shock loading of the normal type, shear wave, shell of revolution, wave front

For citation: Kirillova I. V. Hyperbolic boundary layer in the vicinity of the shear wave front in shells of revolution. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 3, pp. 394–401 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-394-401, EDN: JMEGQP

Введение

В работе строится асимптотически оптимальная теория гиперболического погранслоя в тонких оболочках вращения при действии ударных торцевых воздействий нормального типа, характеризующихся на торце нулевыми значениями тангенциального усилия и изгибающего момента. Такие воздействия, названные по классификации У. К. Нигула [1] нормальными воздействиями вида NW, отличаются от продольных воздействий тангенциального типа LT и изгибающего вида LM [1] особенностями решений, в частности, в окрестности фронта волны сдвига: передний фронт именно этой волны, а не волны расширения, переносит характер ударного воздействия на торец.

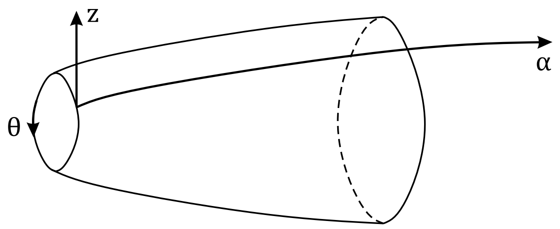
В предшествующей работе автора [2] отмечено, что для оболочек вращения произвольной формы, в отличие от оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны, передние фронты волн поворачиваются и искривляются по сравнению с нормалями в зависимости от кривизны срединной поверхности. Опыт введения специальной системы координат в [2], позволяющий привязаться к асимптотической модели волнового фронта и выделить тем самым явно узкую зону действия погранслоя, также используется в представленной статье. Асимптотическое представление волнового фронта здесь заключается в формировании его повернутыми нормалями к срединной поверхности.

Проведено асимптотическое интегрирование точных трехмерных уравнений теории упругости для оболочек вращения в новых специальных координатах. Оно выполнено при показателе изменяемости напряженно-деформированного состояния (НДС) по продольной координате, задающей отклонение от волнового фронта, равном в конечном итоге двум. Асимптотически оптимальные уравнения получены при этом для асимптотически главных компонент НДС — касательного напряжения и нормального перемещения. Отметим, что разрешающее уравнение для нормального перемещения является гиперболическим уравнением второго порядка, асимптотически главные составляющие которого при переходе к обычным координатам оболочек вращения определяют гиперболический погранслой для тонких пластин. В обычных координатах асимптотически оптимальные уравнения искомого погранслоя впервые были выведены в работах [3, 4].

Как и в случае гиперболического погранслоя в окрестности фронта волны расширения, в нашем случае при переходе в разрешающем уравнении к обычным криволинейным координатам получается упрощенная система уравнений, непосредственно выводимая методом асимптотического интегрирования из исходной трехмерной системы. Но такая упрощенная система не позволяет в явном виде построить простые решения для узкой прифронтовой области.

1. Постановка задачи

Рассмотрим нестационарные осесимметричные волны в полубесконечной оболочке вращения, возбуждаемые в начальный момент времени торцевой ударной нагрузкой вида NW [1]. Общая схема расчленения нестационарного НДС при этом виде нагрузки на составляющие с различными показателями изменяемости описана в работе [5].



Криволинейные координаты оболочки вращения

Figure. Curvilinear coordinates of the shell of revolution

Целью настоящей работы является построение асимптотически оптимальных уравнений искомого гиперболического погранслоя в координатах, связанных непосредственно с поверхностью переднего фронта волны сдвига.

Рассмотрим оболочку вращения, изображенную на рисунке, отнесенную к криволинейным координатам: α — длина дуги вдоль образующей; θ — угол в окружном направлении; z — координата внешней нормали к срединной поверхности.

Выпишем, как и в [2], трехмерные уравнения для осесимметричного НДС. Разрешающие уравнения движения в перемещениях имеют следующий вид:

$$
\begin{gathered}
æ^{-2}\frac{\partial^2 v_1}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2}-\frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial^2 v_3}{\partial\alpha\partial z}+\frac{z}{R_1}\left(-æ^{-2}\frac{\partial^2 v_1}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2}-\frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}\right)+\\
+æ^{-2}\frac{B'}{B}\frac{\partial v_1}{\partial\alpha}+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\frac{\partial v_1}{\partial z}+\left(\frac{3-4\nu}{1-2\nu}\frac{1}{R_1}+\frac{1}{1-2\nu}\frac{1}{R_2}\right)\frac{\partial v_3}{\partial\alpha}=0,\\
\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial^2 v_1}{\partial\alpha\partial z}+\frac{\partial^2 v_3}{\partial\alpha^2}+æ^{-2}\frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2}-\frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2}+\frac{z}{R_1}\left(-\frac{\partial^2 v_3}{\partial\alpha^2}+æ^{-2}\frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2}-\right.\\
\left.-\frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2}\right)-\frac{3-4\nu}{1-2\nu}\frac{1}{R_1}\frac{\partial v_1}{\partial\alpha}+\frac{1}{1-2\nu}\frac{B'}{B}\frac{\partial v_1}{\partial z}+\frac{B'}{B}\frac{\partial v_3}{\partial\alpha}+æ^{-2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\frac{\partial v_3}{\partial z}=0,
\end{gathered}
\tag{1}
$$

а уравнения закона Гука записываются следующим образом:

$$
\begin{gathered}
\sigma_{11}=\frac{E}{1+\nu}\left[k_2\frac{\partial v_1}{\partial\alpha}+k_1\frac{\partial v_3}{\partial z}-k_2\frac{z}{R_1}\frac{\partial v_1}{\partial\alpha}+k_1\frac{B'}{B}v_1+\left(\frac{k_2}{R_1}+\frac{k_1}{R_2}\right)v_3\right],\\
\sigma_{22}=\frac{E}{1+\nu}\left[k_1\frac{\partial v_1}{\partial\alpha}+k_1\frac{\partial v_3}{\partial z}-k_1\frac{z}{R_1}\frac{\partial v_1}{\partial\alpha}+k_2\frac{B'}{B}v_1+\left(\frac{k_1}{R_1}+\frac{k_2}{R_2}\right)v_3\right],\\
\sigma_{33}=\frac{E}{1+\nu}\left[k_1\frac{\partial v_1}{\partial\alpha}+k_2\frac{\partial v_3}{\partial z}-k_1\frac{z}{R_1}\frac{\partial v_1}{\partial\alpha}+k_1\frac{B'}{B}v_1+k_1\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)v_3\right],\\
\sigma_{13}=\frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial v_1}{\partial z}+\frac{\partial v_3}{\partial\alpha}-\frac{z}{R_1}\frac{\partial v_3}{\partial\alpha}+\frac{1}{R_1}v_3\right).
\end{gathered}
\tag{2}
$$

Уравнения систем (1) и (2) выписаны с асимптотической погрешностью $O(\varepsilon^2)$, где ε — относительная тонкостенность: $\varepsilon = h/R$, h — полутолщина, R — характерное значение радиусов кривизны, σ_{ij} — напряжения, v_i — перемещения, t — время, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, ρ — плотность материала оболочки, R_i — радиусы кривизны срединной поверхности, $k_1 = \nu/(1-2\nu)$, $k_2 = (1-\nu)/(1-2\nu)$, $æ^2 = (1-2\nu)/(2-2\nu)$, B — расстояние от срединной поверхности до оси вращения, c_1 и c_2 — скорости распространения волн расширения и сдвига.

В соответствии с классификацией У. К. Нигула [1] имеем на торце ненулевое значение перерезывающей силы. В качестве примера рассмотрим следующий вид граничного условия:

$$
\sigma_{13}=IH(t),\quad v_1=0,\quad \alpha=0,
\tag{3}
$$

где I — амплитуда нагрузки, $H(t)$ — функция Хевисайда. Рассматриваем случай свободных от напряжений лицевых поверхностей оболочки

$$
\sigma_{13}=\sigma_{23}=\sigma_{33}=0,\quad z=\pm h,
\tag{4}
$$

и однородных начальных условий

$$
v_i=\frac{\partial v_i}{\partial t}=0,\quad (i=1,2,3),\quad t=0.
\tag{5}
$$

2. Уравнения гиперболического погранслоя в окрестности фронта волны сдвига

Перейдем от исходной системы координат (α, θ, z) к специальной системе координат (α, θ, z_F), где

$$z_F = z\sqrt{1+F^2(\alpha)}, \quad F(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{R_1}. \tag{6}$$

Эта система координат была введена в [2] для построения асимптотически оптимальных уравнений гиперболического погранслоя в малой окрестности фронта волны расширения. Здесь координатные линии z_F определяются нормалями z, повернутыми согласно формуле (6), а при $\alpha = \alpha_0 = c_2 t$ такая координатная линия совпадает с асимптотическим представлением переднего фронта волны.

Введенная специальная система координат определяет новую форму разрешающих уравнений (1):

$$\begin{gathered}
æ^{-2}\frac{\partial^2 v_1}{\partial\alpha^2} + (1+F^2)\frac{\partial^2 v_1}{\partial z_F^2} - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \frac{\sqrt{1+F^2}}{1-2\nu}\frac{\partial^2 v_3}{\partial\alpha\partial z_F} + \\
+\frac{z_F}{R_1\sqrt{1+F^2}}\left[æ^{-2}\frac{\partial^2 v_1}{\partial\alpha^2} + (1+F^2)\frac{\partial^2 v_1}{\partial z_F^2} - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}\right] + \\
+\frac{z_F F}{R_1}\left[2æ^{-2}\frac{1}{\sqrt{1+F^2}}\frac{\partial^2 v_1}{\partial\alpha\partial z_F} + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial^2 v_3}{\partial z_F^2}\right] + æ^{-2}\frac{B'}{B}\frac{\partial v_1}{\partial\alpha} + \\
+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\sqrt{1+F^2}\frac{\partial v_1}{\partial z_F} + \left[\frac{3-4\nu}{(1-2\nu)R_1} + \frac{1}{(1-2\nu)R_2}\right]\frac{\partial^2 v_3}{\partial\alpha} = 0, \\
\frac{\sqrt{1+F^2}}{1-2\nu}\frac{\partial^2 v_1}{\partial\alpha\partial z_F} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial\alpha^2} + æ^{-2}(1+F^2)\frac{\partial^2 v_3}{\partial z_F^2} - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} + \\
+\frac{z_F}{R_1\sqrt{1+F^2}}\left[-\frac{\partial^2 v_3}{\partial\alpha^2} + æ^{-2}(1+F^2)\frac{\partial^2 v_3}{\partial z_F^2} - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2}\right] + \\
+\frac{z_F F}{R_1}\left[\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial^2 v_1}{\partial z_F^2} + \frac{2}{\sqrt{1+F^2}}\frac{\partial^2 v_3}{\partial\alpha\partial z_F}\right] - \frac{3-4\nu}{(1-2\nu)R_1}\frac{\partial v_1}{\partial\alpha} + \\
+\frac{B'\sqrt{1+F^2}}{(1-2\nu)B}\frac{\partial v_1}{\partial z_F} + \frac{B'}{B}\frac{\partial v_3}{\partial\alpha} + æ^{-2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\sqrt{1+F^2}\frac{\partial v_3}{\partial z_F} = 0.
\end{gathered} \tag{7}$$

В разрешающей системе уравнений (7) аналогично случаю системы (1) можно выделить, следуя [2], свойства четности и нечетности напряжений и перемещений по введенной координате z_F с асимптотической погрешностью $O(\varepsilon)$. В результате получаем упрощенную систему вида

$$\begin{gathered}
æ^{-2}\frac{\partial^2 v_1}{\partial\alpha^2} + (1+F^2)\frac{\partial^2 v_1}{\partial z_F^2} - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \frac{\sqrt{1+F^2}}{1-2\nu} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial\alpha\partial z_F} + \\
+\frac{z_F F}{R_1}\left[\frac{2æ^{-2}}{\sqrt{1+F^2}}\frac{\partial^2 v_1}{\partial\alpha\partial z_F} + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial^2 v_3}{\partial z_F^2}\right] + æ^{-2}\frac{B'}{B}\frac{\partial v_1}{\partial\alpha} = 0, \\
\frac{\sqrt{1+F^2}}{1-2\nu}\frac{\partial^2 v_1}{\partial\alpha\partial z_F} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial\alpha^2} + æ^{-2}(1+F^2)\frac{\partial^2 v_3}{\partial z_F^2} - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} + \\
+\frac{z_F}{R_1\sqrt{1+F^2}}\left[\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial^2 v_1}{\partial z_F^2} + \frac{2}{\sqrt{1+F^2}}\frac{\partial^2 v_3}{\partial\alpha\partial z_F}\right] + \frac{B'\sqrt{1+F^2}}{(1-2\nu)B}\frac{\partial v_1}{\partial z_F} + \frac{B'}{B}\frac{\partial v_3}{\partial\alpha_F} = 0,
\end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{E}{1+\nu}\left(k_2\frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_1\sqrt{1+F^2}\frac{\partial v_3}{\partial z_F}\right),\\
\sigma_{22} &= \frac{E}{1+\nu}\left(k_1\frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_1\sqrt{1+F^2}\frac{\partial v_3}{\partial z_F}\right),\\
\sigma_{33} &= \frac{E}{1+\nu}\left(k_1\frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_2\sqrt{1+F^2}\frac{\partial v_3}{\partial z_F}\right),\\
\sigma_{13} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\sqrt{1+F^2}\frac{\partial v_1}{\partial z_F} + \frac{\partial v_3}{\partial \alpha}\right).
\end{aligned} \tag{9}$$

Перейдем в разрешающих уравнениях (8), (9) к безразмерным прифронтовым координатам, характеризующим НДС гиперболического погранслоя в малой, порядка $O(\varepsilon^2)$, окрестности фронта волны сдвига:

$$x = \frac{1}{\varepsilon^2}(\tau_0 - \xi_0), \quad \tau_0 = \frac{c_2}{R}t, \quad \zeta_F = \frac{1}{R}z_F, \quad \xi_0 = \frac{1}{R}\alpha. \tag{10}$$

Примем, что дифференцирование по введенным координатам не изменяет порядок искомых неизвестных функций.

Предположим, что асимптотику компонент НДС рассматриваемого гиперболического погранслоя можно задать следующим образом:

$$v_1 = R\varepsilon^2 v_1^*, \quad v_3 = R\varepsilon v_3^*, \quad \sigma_{11} = E\sigma_{11}^*, \quad \sigma_{33} = E\sigma_{33}^*, \quad \sigma_{13} = E\varepsilon^{-1}\sigma_{13}^*, \tag{11}$$

где величины со звездочками обладают одинаковым асимптотическим порядком (звездочки в дальнейщем будем опускать). Тогда разрешающая система уравнений в новых переменных (10) с учетом асимптотики компонент (11) запишется в виде

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - \sqrt{1+F^2}\frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial \zeta_F} = 0,\\
-\frac{\sqrt{1+F^2}}{1-2\nu}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial \zeta_F} + æ^{-2}(1+F^2)\frac{\partial^2 v_3}{\partial \zeta_F^2} + 2\frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial \xi_0} - \frac{2}{\sqrt{1+F^2}R_1}\zeta_F\frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial \zeta_F} - \frac{B'}{B}\frac{\partial v_3}{\partial x} = 0,
\end{gathered} \tag{12}$$

$$\sigma_{13} = \frac{1}{2(1+\nu)}\frac{\partial v_3}{\partial x}. \tag{13}$$

Разрешающие уравнения (12), (13) являются уравнениями с медленно изменяющимися коэффициентами, определяемыми медленно изменяющимися функциями B и F.

В рассматриваемом случае гиперболического погранслоя в окрестности фронта волны сдвига асимптотически главной компонентой вектора перемещений является нормальное перемещение v_3. В системе разрешающих уравнений (12) главным уравнением, определяющим гиперболический погранслой, является второе уравнение, а первое уравнение, вследствие малой изменяемости коэффициента, позволяет выразить перемещение v_1 через v_3 с асимптотической погрешностью $O(\varepsilon)$:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = \sqrt{1+F^2}\frac{\partial v_3}{\partial \zeta}, \tag{14}$$

и получить одно разрешающее уравнение относительно асимптотически главной составляющей:

$$\begin{gathered}
(1+F^2)\frac{\partial^2 v_3}{\partial \zeta_F^2} + 2\frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial \xi_0} - \frac{2\zeta_F}{R_1\sqrt{1+F^2}}\frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial \zeta_F} - \frac{B'}{B}\frac{\partial v_3}{\partial x} = 0,\\
\sigma_{13} = \frac{1}{2(1+\nu)}\frac{\partial v_3}{\partial x}.
\end{gathered} \tag{15}$$

Выпишем полученную систему (15) в исходных безразмерных координатах:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 v_3}{\partial \xi^2} + (1+F^2)\frac{\partial^2 v_3}{\partial \zeta_F} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial \tau^2} + \varepsilon \frac{2\zeta_F}{R_1\sqrt{1+F^2}}\frac{\partial^2 v_3}{\partial \xi \partial \zeta_F} + \varepsilon \frac{B'}{B}\frac{\partial v_1}{\partial \xi} = 0,\\ \sigma_{13} = \frac{1}{2(1+\nu)}\frac{\partial v_3}{\partial \xi}.\end{gathered} \tag{16}$$

В исходной размерной форме разрешающие уравнения искомого погранслоя примут следующий окончательный вид:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha^2} + (1+F^2)\frac{\partial^2 v_3}{\partial z_F^2} - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} + \frac{2z_F}{R_1\sqrt{1+F^2}}\frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha \partial z_F} + \frac{B'}{B}\frac{\partial v_3}{\partial \alpha} = 0,\\ \sigma_{13} = \frac{E}{2(1+\nu)}\frac{\partial v_3}{\partial \xi}.\end{gathered} \tag{17}$$

Таким образом, разрешающие уравнения движения свелись к одному гиперболическому дифференциальному уравнению второго порядка. Следовательно, требуется удовлетворить только по одному граничному условию на лицевых поверхностях и на торце:

$$\begin{gathered}\sigma_{13} = 0, \quad z_F = \pm h\sqrt{1+F^2(\alpha)};\\ \sigma_{13} = IH(t), \quad \alpha = 0.\end{gathered} \tag{18}$$

3. Уравнения гиперболического погранслоя в исходной криволинейной системе координат

Устремим главный радиус кривизны R_1 к бесконечности. Тогда передний фронт волны переходит в положение нормали к срединной поверхности и искомые уравнения полностью совпадают с соответствующими уравнениями, подробно изученными в [3, 4]:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} + \frac{B'}{B}\frac{\partial v_3}{\partial \alpha} = 0,\\ \sigma_{13} = \frac{E}{2(1+\nu)}\frac{\partial v_3}{\partial z}.\end{gathered} \tag{19}$$

При этом граничные условия на лицевых поверхностях и на торце записываются аналогично (18):

$$\begin{gathered}\sigma_{13} = 0, \quad z = \pm h,\\ \sigma_{13} = IH(t), \quad \alpha = 0.\end{gathered} \tag{20}$$

Приведенные рассуждения имели место для оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны. Однако при переходе в уравнениях (17) к исходным координатам (α, z) эти уравнения также точно совпадают с уравнениями (19). Таким образом, прифронтовая зона размером порядка $O(\varepsilon)$ в окрестности нормали к оболочке $\alpha = c_2 t$ содержит узкую прифронтовую зону размером порядка $O(\varepsilon^2)$ в окрестности повернутой нормали $z_F = c_2 t$, в которой и работают асимптотически оптимальные уравнения гиперболического погранслоя (17). В этом смысле и можно рассматривать в исходных координатах (α, z) окрестность нормали $\alpha = c_2 t$ размером порядка $O(\varepsilon)$ как область действия искомого погранслоя.

Выводы

Аналогично случаю гиперболического погранслоя в окрестности фронта волны расширения, исследованному в предшествующей работе автора [2], построена в специальных координатах асимптотическая модель нестационарного НДС оболочек вращения произвольной формы в окрестности фронта волны сдвига. Эта модель включает асимптотику геометрии искомого фронта волны, разрешающее уравнение второго порядка относительно нормального перемещения и по одному граничному условию на лицевых поверхностях и торце. Установлена связь между полученной асимптотической моделью и моделью искомого погранслоя в стандартной криволинейной системе координат.

Данная работа является завершающей в цикле работ по построению асимптотической теории гиперболического погранслоя. Ссылки на ряд работ этого цикла приведены в статье ранее. У этого цикла есть физические и математические основы.

Механический смысл гиперболических погранслоев полностью соответствует выводам работ [6, 7] о действии принципа Сен-Венана в динамике стержней, пластин и оболочек: способ приложения нагрузки на торец не только влияет на НДС в его малой окрестности (как в статике), но и переносится фронтами волн расширения и сдвига в их малых окрестностях. Общие же свойства нестационарных волн в тонких телах впервые системно описаны в работе [1] на основании классификации ударных торцевых воздействий.

Математически построение рассматриваемой теории основывается на использовании принципа масштабирования переменных [8] и концепции показателей изменяемости НДС по переменным, введенной в [9], что позволило разработать асимптотически оптимальные уравнения составляющих НДС в различных областях фазовой плоскости. Построенная теория гиперболического погранслоя является составной частью общей схемы расчленения нестационарного НДС тонких оболочек на составляющие с различными значениями показателей изменяемости НДС по пространственным координатам и показателя динамичности по времени.

Список литературы

1. *Nigul U. K.* Regions of effective application of the methods of three-dimensional and two-dimensional analysis of transient stress waves in shells and plates // International Journal of Solids and Structures. 1969. Vol. 5, iss. 6. P. 607–627. https://doi.org/10.1016/0020-7683(69)90031-6
2. *Кириллова И. В.* Асимптотическая теория гиперболического погранслоя в оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях тангенциального типа // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 2. С. 222–230. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-222-230, EDN: SFYWBV
3. *Kirillova I. V., Kossovich L. Yu.* Dynamic boundary layer at nonstationary elastic wave propagation in thin shells of revolution // AiM'96: Proceedings of the Second International conference «Asymptotics in mechanics». Saint Petersburg State Marine Technical University, Saint Petersburg, Russia, October 13–16, 1996. St. Petersburg, 1997. P. 121–128.
4. *Кириллова И. В.* Асимптотический вывод двух типов приближения динамических уравнений теории упругости для тонких оболочек : дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Саратов, 1998. 122 с.
5. *Кириллова И. В., Коссович Л. Ю.* Асимптотическая теория волновых процессов в оболочках вращения при ударных поверхностных и торцевых нормальных воздействиях // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2022. № 2. С. 35–49. https://doi.org/10.31857/S057232992202012X, EDN: HHWAXC
6. *Новожилов В. В., Слепян Л. И.* О принципе Сен-Венана в динамике стержней // Прикладная математика и механика. 1965. Т. 29, № 2. С. 261–281.
7. *Слепян Л. И.* Нестационарные упругие волны. Ленинград : Судостроение, 1972. 374 с.
8. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике / пер. с англ. А. И. Державиной, В. Н. Диесперова ; под ред. О. С. Рыжова. Москва : Мир, 1972. 274 с.
9. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. Москва : Наука, 1976. 512 с.

References

1. Nigul U. K. Regions of effective application of the methods of three-dimensional and two-dimensional analysis of transient stress waves in shells and plates. *International Journal of Solids and Structures*, 1969, vol. 5, iss. 6, pp. 607–627. https://doi.org/10.1016/0020-7683(69)90031-6
2. Kirillova I. V. Asymptotic theory of the hyperbolic boundary layer in shells of revolution at shock edge loading of the tangential type. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 2, pp. 222–230 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-222-230, EDN: SFYWBV
3. Kirillova I. V., Kossovich L. Yu. Dynamic boundary layer at nonstationary elastic wave propagation in

thin shells of revolution. *AiM'96: Proceedings of the Second International Conference "Asymptotics in mechanics". Saint Petersburg State Marine Technical University, Saint Petersburg, Russia, October 13–16, 1996*. St. Petersburg, 1997, pp. 121–128.

4. Kirillova I. V. *Asymptotic derivation of two types of approximation of dynamic equations of the theory of elasticity for thin shells*. Diss. Cand. Sci. (Phys.-Math.). Saratov, 1998. 122 p. (in Russian).
5. Kirillova I. V., Kossovich L. Y. Asymptotic theory of wave processes in shells of revolution under surface impact and normal end actions. *Mechanics of Solids*, 2022, vol. 57, iss. 2, pp. 232–243. https://doi.org/10.3103/S0025654422020078, EDN: WCTBUQ
6. Novozhilov V. V., Slepian L. I. On Saint-Venant's principle in the dynamics of beams. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1965, vol. 29, iss. 2, pp. 293–315. https://doi.org/10.1016/0021-8928(65)90032-8
7. Slepian L. I. *Nestatsionarnye uprugie volny* [Unsteady Elastic Waves]. Leningrad, Sudostroenie, 1972. 374 p. (in Russian).
8. Cole J. D. *Perturbation Methods in Applied Mathematics*. Blaisdell Publishing Company, Waltham, Massachusetts, 1968. 260 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1972. 274 p.).
9. Goldenveizer A. L. Theory of Elastic Thin Shells. Oxford, Pergamon Press, 1961. 658 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1976. 512 p.).

Поступила в редакцию / Received 23.03.2024
Принята к публикации / Accepted 17.05.2024
Опубликована / Published 30.08.2024