



Научная статья  
УДК 629.78:519.6

## О перенормировке приближённого решения уравнений ориентации орбитальной системы координат

И. А. Панкратов

<sup>1</sup>Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

<sup>2</sup>Институт проблем точной механики и управления РАН (ИПТМУ РАН), Россия, 410028, г. Саратов, ул. Рабочая, д. 24

**Панкратов Илья Алексеевич**, кандидат технических наук, <sup>1</sup>доцент кафедры математического и компьютерного моделирования, <sup>2</sup>научный сотрудник лаборатории механики, навигации и управления движением, [pankratovia@sgu.ru](mailto:pankratovia@sgu.ru), <https://orcid.org/0000-0002-5325-9310>, AuthorID: 608692

**Аннотация.** В кватернионной постановке рассмотрена задача математического моделирования движения космического аппарата (КА) по эллиптической орбите. Управлением является ограниченный по модулю вектор ускорения от реактивной тяги, направленный ортогонально плоскости орбиты КА. Движение центра масс КА описано с помощью кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбитальной системы координат. Построено приближённое аналитическое решение кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбитальной системы координат в виде равномерно пригодного асимптотического разложения по степеням эксцентриситета орбиты КА (малого параметра). Для устранения вековых слагаемых в этом разложении был применён метод перенормировки. Учёт известного решения уравнения ориентации орбитальной системы координат для случая, когда орбита КА является круговой, позволил упростить вид вышеуказанного разложения. Найдены нелинейные частоты колебаний каждой из компонент искомого кватерниона. Аналитические преобразования были выполнены с помощью пакета символьной алгебры SymPy. Для проведения численного моделирования движения КА была составлена программа на языке Python. Проведено сравнение расчётов по аналитическим формулам, полученным в работе (при отсутствии вековых слагаемых), и ранее полученных результатов при наличии вековых слагаемых. Приведён пример моделирования управляемого движения КА для случая, когда начальная ориентация орбитальной системы координат соответствует ориентации орбиты одного из спутников орбитальной группировки ГЛОНАСС. Построены графики изменения погрешности определения модуля и компонент кватерниона ориентации орбитальной системы координат. Показано, что устранение вековых слагаемых с помощью метода перенормировки позволило уменьшить ошибку определения указанного модуля при увеличении количества оборотов КА вокруг Земли. Проведён анализ полученного приближённого аналитического решения. Установлены особенности и закономерности процесса движения КА по эллиптической орбите.

**Ключевые слова:** космический аппарат, орбита, оптимальное управление, кватернион, аппроксимация

**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-21-00218).

**Для цитирования:** Панкратов И. А. О перенормировке приближённого решения уравнений ориентации орбитальной системы координат // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 3. С. 415–422. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-415-422>, EDN: LUJIJZ

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Article

## On renormalization of the approximate solution of the orbital coordinate system equations of orientation

I. A. Pankratov

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia  
Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences (IPTMU RAS), 24 Rabochaya St., Saratov 410028, Russia

Ilia A. Pankratov, pankratovia@sgu.ru, <https://orcid.org/00000-0002-5325-9310>, AuthorID: 608692

**Abstract.** In the quaternion formulation, the problem of mathematical modeling of the spacecraft motion in an elliptical orbit is considered. The control is a modulo-limited acceleration vector from the jet thrust, directed orthogonally to the plane of the spacecraft orbit. The motion of the spacecraft center of mass is described using the quaternion differential equation of the orientation of the orbital coordinate system. An approximate analytical solution of the quaternion differential equation of the orientation of the orbital coordinate system is constructed in the form of a uniformly suitable asymptotic expansion by degrees of eccentricity of the spacecraft orbit (small parameter). To eliminate the secular terms in this expansion, the renormalization method was applied. Taking into account the known solution of the equation of orientation of the orbital coordinate system for the case when the spacecraft orbit is circular, allowed to simplify the form of the above expansion. The nonlinear oscillation frequencies of each component of the desired quaternion were found. Analytical transformations were performed using the SymPy symbolic algebra package. To carry out numerical simulation of the spacecraft motion, a program was written in Python. Calculations based on analytical formulas obtained in the paper (in the absence of secular terms) and previously obtained results in the presence of secular terms are compared. An example of modeling the controlled motion of a spacecraft is given for the case when the initial orientation of the orbital coordinate system corresponds to the orientation of the orbit of one of the satellites of the GLONASS orbital grouping. Graphs were built to show error in the module (and components) of the quaternion describing the orientation of the orbital coordinate system. It is shown that the elimination of secular terms using the renormalization method made it possible to reduce the error in determining this module with an increase in the number of spacecraft revolutions around the Earth. The analysis of the obtained approximate analytical solution is carried out. The features and regularities of the spacecraft motion in an elliptical orbit are established.

**Keywords:** spacecraft, orbit, optimal control, quaternion, approximation

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-21-00218).

**For citation:** Pankratov I. A. On renormalization of the approximate solution of the orbital coordinate system equations of orientation. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 3, pp. 415–422 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-415-422>, EDN: LUJIJZ

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

### Введение

Задачам управления движением центра масс космического аппарата (КА) посвящено достаточно большое количество публикаций в нашей стране и за рубежом. В этих работах для описания движения КА чаще всего используются уравнения движения в традиционных угловых элементах орбиты [1–3]. Аналитическое исследование дифференциальных уравнений ориентации орбиты в классических угловых элементах (и получающихся краевых задач) — достаточно сложная задача. Отметим работы С. А. Ишкова, В. В. Салмина и др. [4, 5].



Повышение эффективности численного решения задач в этой области, по-видимому, может быть получено при использовании кватернионных моделей орбитального движения КА.

В настоящей работе рассмотрена задача уточнения приближённого решения кватернионных уравнений, описывающих ориентацию вращающейся системы координат, связанной с КА, относительно инерциальной системы координат.

Указанная задача есть известная задача Дарбу. Решение этой задачи в замкнутой форме найдено лишь для некоторых частных случаев (см., например, работы [6–10]). Поэтому поиск её приближённого решения продолжает оставаться актуальным.

## 1. Постановка задачи

Пусть вектор ускорения  $\mathbf{u}$  от тяги реактивного двигателя во всё время управляемого движения КА направлен ортогонально плоскости его орбиты. В этом случае орбита КА в процессе управления движением центра масс КА не меняет своей формы и своих размеров, а поворачивается в пространстве под действием управления как неизменяемая (недеформируемая) фигура.

Рассмотрим орбитальную систему координат  $\eta$  [11]. Начало этой системы координат находится в центре масс КА, ось  $\eta_1$  направлена вдоль радиуса-вектора центра масс КА, ось  $\eta_3$  перпендикулярна плоскости орбиты и имеет направление постоянного по модулю вектора  $\mathbf{c}$  момента скорости центра масс КА, а ось  $\eta_2$  образует правую тройку с осями  $\eta_1$  и  $\eta_3$ .

Безразмерные уравнения ориентации орбитальной системы координат  $\eta$  в параметрах Эйлера  $\lambda_j$  имеют вид [12]

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{d\varphi} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda} \circ [Nr^3u\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3], \quad r = \frac{1}{1 + e \cos \varphi}. \quad (1)$$

Здесь  $\boldsymbol{\lambda}$  — нормированный кватернион ориентации орбитальной системы координат  $\eta$ ,  $\mathbf{i}_k$  — векторные мнимые единицы Гамильтона,  $\circ$  — символ кватернионного умножения;  $\varphi$  — истинная аномалия, характеризующая положение КА на орбите;  $r$  — модуль безразмерного радиуса-вектора центра масс КА;  $e$  — эксцентриситет орбиты,  $u$  — управление, безразмерная проекция вектора реактивного ускорения  $\mathbf{u}$  на направление вектора момента скорости центра масс КА (алгебраическая величина реактивного ускорения, перпендикулярного мгновенной плоскости орбиты КА);  $N = u_{\max}R^3/c^2$  — характерный безразмерный параметр задачи,  $u_{\max}$  — максимальное (по модулю) значение размерного управления,  $R$  — характерное расстояние (величина, близкая к длине большой полуоси орбиты управляемого КА),  $c$  — постоянная площадей (модуль вектора момента скорости центра масс КА).

Пусть КА движется под действием постоянного по модулю управления. Известно, что при решении задачи быстрогодействия и задачи о минимизации затрат характеристической скорости оптимальное по Понтрягину [13] управление имеет именно такой вид на смежных участках активного движения КА [14]. Ранее в работе [15] автором было построено следующее приближённое решение уравнений (1) для постоянного управления в виде разложения по степеням эксцентриситета орбиты  $e$  (малого параметра):

$$\boldsymbol{\lambda}(\varphi) = \boldsymbol{\lambda}^{(0)}(\varphi) + e\boldsymbol{\lambda}^{(1)}(\varphi) + e^2\boldsymbol{\lambda}^{(2)}(\varphi) + O(e^3), \quad (2)$$

где  $\boldsymbol{\lambda}^{(0)} = \mathbf{C} \cos(\omega\varphi/2) + \mathbf{D} \sin(\omega\varphi/2)$  — общее решение уравнений (1) для случая круговой орбиты,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  — кватернионные постоянные интегрирования, а  $\omega = \sqrt{(N \cdot u)^2 + 1} = \text{const}$ . При этом поправки  $\boldsymbol{\lambda}^{(1)}$  и  $\boldsymbol{\lambda}^{(2)}$  имеют вид

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}^{(1)} &= \mathbf{A}^+ \cos\left[\left(\frac{\omega}{2} + 1\right)\varphi\right] + \mathbf{B}^+ \sin\left[\left(\frac{\omega}{2} + 1\right)\varphi\right] + \mathbf{A}^- \cos\left[\left(\frac{\omega}{2} - 1\right)\varphi\right] + \mathbf{B}^- \sin\left[\left(\frac{\omega}{2} - 1\right)\varphi\right], \\ \boldsymbol{\lambda}^{(2)} &= \mathbf{E}^+ \cos\left[\left(\frac{\omega}{2} + 2\right)\varphi\right] + \mathbf{F}^+ \sin\left[\left(\frac{\omega}{2} + 2\right)\varphi\right] + \mathbf{E}^- \cos\left[\left(\frac{\omega}{2} - 2\right)\varphi\right] + \\ &+ \mathbf{F}^- \sin\left[\left(\frac{\omega}{2} - 2\right)\varphi\right] + \mathbf{G}\varphi \cos \frac{\omega\varphi}{2} + \mathbf{H}\varphi \sin \frac{\omega\varphi}{2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Заметим, что постоянные кватернионы  $A^+, \dots, B^-, E^+, \dots, F^-, G, H$  выражаются через кватернионы  $C$  и  $D$  по известным формулам [15]. Для нахождения восьми произвольных постоянных (компоненты кватернионов  $C$  и  $D$ ) нужно решить следующую систему двух линейных кватернионных алгебраических уравнений (начальное значение кватерниона ориентации  $\lambda^H$  считается заданным):

$$\lambda(0) = \lambda^H, \quad \left. \frac{d\lambda}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} = \frac{1}{2} \lambda^H \circ [Nr(0)^3 u i_1 + i_3].$$

Построенное прямое разложение (2) становится непригодным при больших значениях  $\varphi$  из-за присутствия в нём вековых слагаемых  $\varphi \cos(\omega\varphi/2)$  и  $\varphi \sin(\omega\varphi/2)$ . Для того чтобы исключить из решения указанные слагаемые, был применён метод перенормировки [16], изложенный в следующем разделе.

## 2. Метод перенормировки

Нарушение пригодности прямого разложения (2) связано с тем, что с его помощью невозможно описать зависимость частоты колебаний системы от степени её нелинейности. Обычно в таких случаях частоту колебаний вводят непосредственно в уравнения движения (применяя методiku Линдштедта – Пуанкаре [17]). В дальнейшем частоту колебаний нужно так же, как и искомую переменную, разложить в ряд по степеням малого параметра. В нашем случае каждая компонента искомого кватерниона имеет свою собственную частоту колебаний, поэтому нужно записать прямое разложение в скалярном виде. Рассмотрим сначала слагаемые

$$C \cos \frac{\omega\varphi}{2} + e^2 \cdot H \varphi \sin \frac{\omega\varphi}{2}$$

или в скалярном виде

$$C_j \cos \frac{\omega\varphi}{2} + e^2 \cdot H_j \varphi \sin \frac{\omega\varphi}{2}, \quad j = \overline{0, 3}. \tag{4}$$

В каждом из скалярных соотношений (4) перейдём к новой независимой переменной  $\tau_j$  по формуле

$$\tau_j = \left( \frac{\omega}{2} + \omega_{2j} \cdot e^2 + \dots \right) \cdot \varphi, \quad j = \overline{0, 3}.$$

Здесь сумма в круглых скобках — это разложение для нелинейной частоты колебаний. Первое слагаемое в нём соответствует частоте колебаний при движении по круговой орбите. Слагаемое с эксцентриситетом орбиты КА в первой степени отсутствует, так как вековые слагаемые содержат малый параметр в квадрате.

Возвращаясь к истинной аномалии, после разложения обратной величины в ряд Тейлора получим ( $j = \overline{0, 3}$ ):

$$\varphi = \left( \frac{\omega}{2} + \omega_{2j} \cdot e^2 + \dots \right)^{-1} \cdot \tau_j = \left( \frac{2}{\omega} - \frac{4 \cdot \omega_{2j} \cdot e^2}{\omega} + O(e^3) \right) \cdot \tau_j.$$

Тогда выражения (4) примут вид ( $j = \overline{0, 3}$ ):

$$C_j \cos \left[ \frac{\omega}{2} \cdot \left( \frac{2}{\omega} - \frac{4 \cdot \omega_{2j} \cdot e^2}{\omega} \right) \cdot \tau_j \right] + e^2 \cdot H_j \cdot \left( \frac{2}{\omega} - \frac{4 \cdot \omega_{2j} \cdot e^2}{\omega} \right) \cdot \tau_j \cdot \sin \left[ \frac{\omega}{2} \cdot \left( \frac{2}{\omega} - \frac{4 \cdot \omega_{2j} \cdot e^2}{\omega} \right) \cdot \tau_j \right].$$

Теперь необходимо выбрать параметры  $\omega_{2j}$  так, чтобы избавиться от вековых слагаемых. Для этого разложим синус и косинус в ряд Тейлора по переменной  $\tau_j$  с точностью до величин второго порядка малости, получим

$$C_j \cos \tau_j + e^2 \cdot (C_j \cdot \omega_{2j} + H_j) \cdot \frac{2}{\omega} \cdot \tau_j \sin \tau_j.$$



Следовательно, достаточно положить  $\omega_{2j} = -H_j/C_j$ . При этом (4) примет вид

$$C_j \cos \left[ \left( \frac{\omega}{2} - \frac{H_j}{C_j} \cdot e^2 \right) \cdot \varphi \right], \quad (5)$$

и вековых слагаемых здесь больше не будет.

Аналогично можно показать, что

$$D_j \sin \frac{\omega\varphi}{2} + e^2 \cdot G_j \varphi \cos \frac{\omega\varphi}{2} \approx D_j \sin \left[ \left( \frac{\omega}{2} + \frac{G_j}{D_j} \cdot e^2 \right) \cdot \varphi \right] \quad (6)$$

с точностью до величин второго порядка малости.

Обозначим кватернион,  $j$ -й компонентой которого является сумма выражения (5) и правой части (6) через  $\lambda_{no\_sec}^{(0)}$ . Пусть также кватернион

$$\lambda_{no\_sec}^{(2)} = \lambda^{(2)} - \mathbf{G}\varphi \cos \frac{\omega\varphi}{2} - \mathbf{H}\varphi \sin \frac{\omega\varphi}{2}$$

есть вторая поправка без вековых слагаемых.

Тогда равномерно пригодное разложение для решения кватернионного уравнения (1) с точностью до величин второго порядка малости примет вид

$$\lambda(\varphi, e) = \lambda_{no\_sec}^{(0)}(\varphi) + e\lambda^{(1)}(\varphi) + e^2\lambda_{no\_sec}^{(2)}(\varphi) + O(e^3). \quad (7)$$

Заметим, что все аналитические выкладки в данном разделе были проведены с помощью пакета символьной алгебры SymPy<sup>1</sup> [18, 19] на языке Python3.

### 3. Пример численного решения задачи

Пусть начальное значение кватерниона  $\lambda = \lambda^H$  соответствует ориентации орбиты одного из спутников группировки ГЛОНАСС (при условии, что начальное значение истинной аномалии  $\varphi$  — ноль радиан), т. е. долгота восходящего узла  $\Omega_u$ , наклонение орбиты  $I$  и угловое расстояние до перигея  $\omega_\pi$  равны соответственно ( $u = 1$ ):

$$\begin{aligned} \Omega_u^0 = \Omega_u(0) = 215.25^\circ, \quad I^0 = I(0) = 64.8^\circ, \quad \omega_\pi^0 = \omega_\pi(0) = 0^\circ, \\ \varphi_0 = 0 \text{ рад.}, \quad u_{\max} = 0.101907 \text{ м/с}^2, \quad N = 0.35. \end{aligned}$$

Тогда компоненты начального кватерниона ориентации орбитальной системы координат примут вид

$$\lambda_0^H = -0.255650, \quad \lambda_1^H = -0.162241, \quad \lambda_2^H = 0.510674, \quad \lambda_3^H = 0.804694.$$

Известно [14], что уравнения (1) имеют первый интеграл

$$|\lambda| = \sqrt{|\lambda|} = \sqrt{\sum_{j=0}^3 \lambda_j^2} = |\lambda(0)| = 1 = \text{const.} \quad (8)$$

Тогда погрешность определения модуля кватерниона  $\lambda$  на отрезке  $\varphi \in [0; 40\pi]$  (КА при этом совершает двадцать оборотов вокруг Земли) с учётом (8) запишется так:

$$\text{err}_{|\lambda|}(e) = \max_{\varphi \in [0; 40\pi]} \text{abs} \left( |\lambda^{\text{прибл}}(\varphi, e)| - 1 \right), \quad (9)$$

где компоненты кватерниона ориентации орбитальной системы координат  $\lambda^{\text{прибл}}(\varphi, e)$  вычисляются или по формулам (2), (3) (при наличии вековых слагаемых), или по формуле (7) (при отсутствии вековых слагаемых).

<sup>1</sup>SymPy. URL: <https://www.sympy.org/en/index.html> (дата обращения: 10.01.2023).

Введём в рассмотрение кватернион погрешности определения ориентации орбитальной системы координат  $err(e)$ . Его компоненты могут быть найдены по формуле

$$err_j(e) = \max_{\varphi \in [0; 40\pi]} |\lambda_j^{прибл}(\varphi, e) - \lambda_j^{PK}(\varphi, e)|, \quad j = \overline{0, 3}. \tag{10}$$

Здесь приближённое решение  $\lambda^{прибл}(\varphi, e)$  рассчитано по формуле (7) (при отсутствии вековых слагаемых); а  $\lambda^{PK}(\varphi, e)$  — результат интегрирования уравнения (1) методом Рунге – Кутты 4-го порядка точности с шагом  $h = 0.001$  рад.

Результаты расчётов по формуле (9) приведены на рис. 1.

На рис. 2 показаны законы изменения компонент кватерниона погрешности (10) без вековых слагаемых. Заметим, что устранение вековых слагаемых позволило уменьшить погрешность определения компонент кватерниона ориентации орбитальной системы координат лишь на доли процента в случае, когда КА совершает двадцать оборотов вокруг Земли.

Из анализа построенных графиков следует, что предложенное в работе преобразование позволяет уменьшить погрешность определения модуля кватерниона ориентации орбитальной системы координат на больших промежутках времени. При этом увеличение эксцентриситета орбиты КА приводит к заметному увеличению погрешности за счёт наличия в (2), (3) вековых слагаемых. Также построенное разложение обеспечивает приемлемую точность определения компонент кватерниона ориентации орбитальной системы координат.

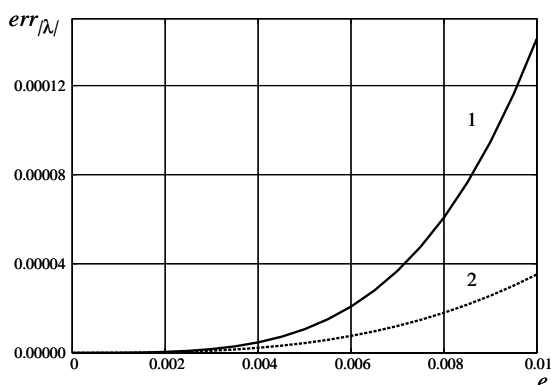


Рис. 1. Погрешность определения модуля кватерниона ориентации: 1 — при наличии вековых слагаемых; 2 — без вековых слагаемых

Fig. 1. Error in determining the modulo of the orientation quaternion: 1 is with secular terms; 2 is without secular terms

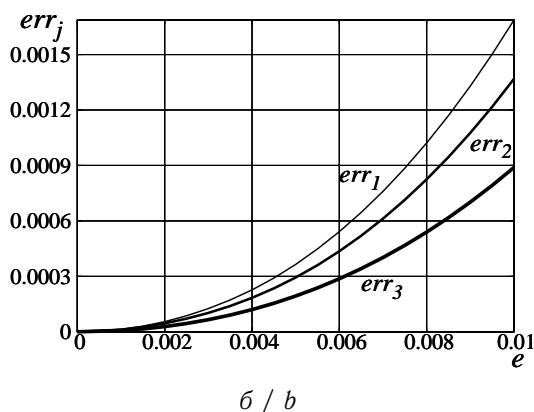
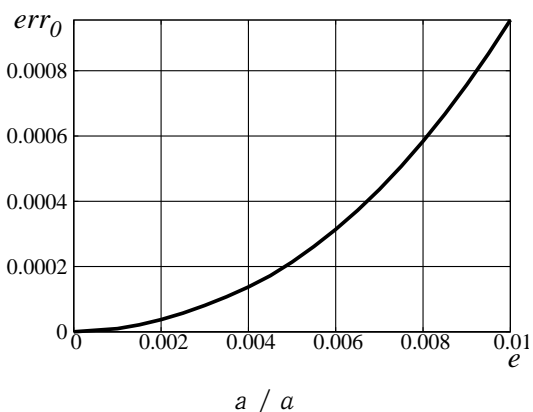


Рис. 2. Компоненты кватерниона погрешности:  $a$  — скалярная часть;  $b$  — векторная часть

Fig. 2. Components of the error quaternion:  $a$  is scalar part;  $b$  is vector part

### Заключение

В настоящей работе с помощью метода перенормировки удалось уменьшить погрешность определения модуля кватерниона, описывающего ориентацию орбитальной системы координат, при моделировании движения КА под действием постоянного управления с помощью разложения в асимптотический ряд. В дальнейшем предложенное преобразование



поможет упростить получение равномерно пригодного разложения более высокого порядка относительно эксцентриситета орбиты КА.

### Список литературы

1. Абалакин В. К., Аксенов Е. П., Гребенников Е. А., Демин В. Г., Рябов Ю. А. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. Москва : Наука, 1976. 864 с.
2. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. Москва : Наука, 1968. 799 с.
3. Orbital Mechanics / ed. by V. A. Chobotov. Reston : AIAA, 2002, 455 p. (AIAA Education Series). <https://doi.org/10.2514/4.862250>
4. Ишков С. А., Романенко В. А. Формирование и коррекция высокоэллиптической орбиты спутника Земли с двигателем малой тяги // Космические исследования. 1997. Т. 35, вып. 3. С. 287–296.
5. Салмин В. В., Соколов В. О. Приближенный расчет маневров формирования орбиты спутника Земли с двигателем малой тяги // Космические исследования. 1991. Т. 29, вып. 6. С. 872–888. EDN: YUHCZG
6. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. Москва : Наука, 1973. 320 с.
7. Зубов В. И. Аналитическая динамика гироскопических систем. Ленинград : Судостроение, 1970. 317 с.
8. Молоденков А. В. К решению задачи Дарбу // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2007. № 2. С. 3–13.
9. Панкратов И. А. Аппроксимация уравнений ориентации орбитальной системы координат методом взвешенных невязок // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 194–201. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-194-201>
10. Панкратов И. А. Об одном подходе к определению ориентации орбиты космического аппарата // International Journal of Open Information Technologies. 2021. Vol. 9, № 10. P. 47–51. EDN: FJQZGV
11. Челноков Ю. Н. Применение кватернионов в теории орбитального движения искусственного спутника. I // Космические исследования. 1992. Т. 30, вып. 6. С. 759–770.
12. Pankratov I. A. Genetic algorithm of energy consumption optimization for reorientation of the spacecraft orbital plane // Mechatronics, Automation, Control. 2022. Vol. 23, iss. 5. P. 256–262. <https://doi.org/10.17587/mau.23.256-262>
13. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Москва : Наука, 1983. 393 с.
14. Челноков Ю. Н. Оптимальная переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76, вып. 6. С. 895–912.
15. Панкратов И. А. Аналитическое решение уравнений ориентации околокруговой орбиты космического аппарата // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 1. С. 97–105. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-1-97-105>
16. Найфэ А. Введение в методы возмущений. Москва : Мир, 1984. 535 с.
17. Найфэ А. Методы возмущений. Москва : Мир, 1976. 456 с.
18. Führer C., Solem J. E., Verdier O. Scientific Computing with Python 3. Birmingham – Mumbai : Packt Publishing, 2016. 332 p.
19. Meurer A., Smith C. P., Paprocki M. [et al]. SymPy: Symbolic computing in Python // PeerJ Computer Science. URL: <https://peerj.com/articles/cs-103.pdf> (дата обращения: 10.01.2023). <https://doi.org/10.7717/peerj-cs.103>

### References

1. Abalakin V. K., Aksenov E. P., Grebennikov E. A., Demin V. G., Riabov Iu. A. *Spravochnoe rukovodstvo po nebesnoy mekhanike i astroydinamike* [Reference Guide on Celestial Mechanics and Astrodynamics]. Moscow, Nauka, 1976. 864 p. (in Russian).
2. Duboshin G. N. *Nebesnaia mekhanika. Osnovnyye zadachi i metody* [Celestial Mechanics. Main Tasks and Methods]. Moscow, Nauka, 1968. 799 p. (in Russian).
3. Chobotov V. A. (ed.) *Orbital Mechanics*. AIAA Education Series. Reston, AIAA, 2002. 455 p. <https://doi.org/10.2514/4.862250>



4. Ishkov S. A., Romanenko V. A. Forming and correction of a high-elliptical orbit of an earth satellite with low-thrust engine. *Cosmic Research*, 1997, vol. 35, iss. 3, pp. 268–277.
5. Salmin V. V., Sokolov V. O. An approximate calculation of the orbit insertion maneuvers of a satellite of the Earth with low thrust propulsion system. *Kosmicheskie issledovaniya* [Cosmic Research], 1991, vol. 29, iss. 6, pp. 872–888 (in Russian). EDN: YUHCZG
6. Branets V. N., Shmyglevskii I. P. *Primenenie kvaternionov v zadachakh orientatsii tverdogo tela* [Use of Quaternions in the Problems of Orientation of Solid Bodies]. Moscow, Nauka, 1973. 320 p. (in Russian).
7. Zubov V. I. *Analiticheskaya dinamika giroskopicheskikh sistem* [Analytical Dynamics of Gyroscopic Systems]. Leningrad, Sudostroenie, 1970. 317 p. (in Russian).
8. Molodenkov A. V. On the solution of the Darboux problem. *Mechanics of Solids*, 2007, vol. 42, iss. 2, pp. 167–176. <https://doi.org/10.3103/S002565440702001X>
9. Pankratov I. A. Approximation of the orientation equations of the orbital coordinate system by the weighted residuals method. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 194–201 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-194-201>
10. Pankratov I. A. On an approach to determining the orientation of the spacecraft orbit. *International Journal of Open Information Technologies*, 2021, vol. 9, iss. 10, pp. 47–51 (in Russian). EDN: FJQZGV
11. Chelnokov Yu. N. Application of quaternions in the theory of orbital motion of an artificial satellite. I. *Cosmic Research*, 1992, vol. 30, iss. 6, pp. 612–621.
12. Pankratov I. A. Genetic algorithm of energy consumption optimization for reorientation of the spacecraft orbital plane. *Mechatronics, Automation, Control*, 2022, vol. 23, iss. 5, pp. 256–262. <https://doi.org/10.17587/mau.23.256-262>
13. Pontriagin L. S., Boltianskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* [The Mathematical Theory of Optimal Processes]. Moscow, Nauka, 1983. 393 p. (in Russian).
14. Chelnokov Yu. N. Optimal reorientation of a spacecraft's orbit using a jet thrust orthogonal to the orbital plane. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2012, vol. 76, iss. 6, pp. 646–657. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2013.02.002>
15. Pankratov I. A. Analytical solution of equations of near-circular spacecraft's orbit orientation. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2015, vol. 15, iss. 1, pp. 97–105 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-1-97-105>
16. Nayfeh A. *Introduction to Perturbation Techniques*. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, John Wiley and Sons, 1981. 520 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1984. 535 p.).
17. Nayfeh A. *Perturbation Techniques*. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, John Wiley and Sons, 1973. 425 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1976. 456 p.).
18. Führer C., Solem J. E., Verdier O. *Scientific Computing with Python 3*. Birmingham – Mumbai, Packt Publ., 2016. 332 p.
19. Meurer A., Smith C. P., Paprocki M. [et al]. SymPy: Symbolic computing in Python. *PeerJ Computer Science*. Available at: <https://peerj.com/articles/cs-103.pdf> (accessed January 10, 2023). <https://doi.org/10.7717/peerj-cs.103>

Поступила в редакцию / Received 17.01.2023

Принята к публикации / Accepted 24.03.2023

Опубликована / Published 30.08.2024