

Personalia

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 3. С. 463–471

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 3, pp. 463–471

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-463-471>

EDN: TXUNZO

Персоналии

УДК 539.3

Памяти Якова Григорьевича Сапункова

А. В. Молоденков[✉], Ю. Н. Челноков

Институт проблем точной механики и управления РАН, Россия, 410028, г. Саратов, ул. Рабочая, д. 24

Молоденков Алексей Владимирович, доктор технических наук, главный научный сотрудник лаборатории механики, навигации и управления движением, molalexei@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4991-4220>, AuthorID: 7448

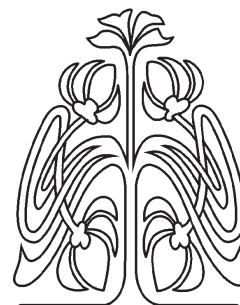
Челноков Юрий Николаевич, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник лаборатории механики, навигации и управления движением, ChelnokovYuN@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-4901-5767>, AuthorID: 8289

Аннотация. Статья посвящена выдающемуся ученому-механику и педагогу Якову Григорьевичу Сапункову (04.11.1938–23.10.2020), важные научные результаты которого простираются от гиперзвуковой аэродинамики, механики жидкости и методов вычислений до теории оптимального управления, механики космического полета и теории бесплатформенных инерциальных навигационных систем (БИНС). Дается обзор его научной деятельности и приведен список наиболее значимых работ.

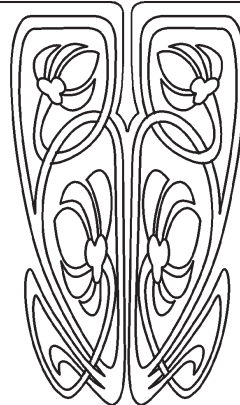
Ключевые слова: гиперзвуковые течения газа, механика жидкости, механика космического полета, теория оптимального управления, теория БИНС, Я. Г. Сапунков

Для цитирования: Молоденков А. В., Челноков Ю. Н. Памяти Якова Григорьевича Сапункова // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 3. С. 463–471. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-463-471>, EDN: TXUNZO

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Приложения





Personalia

In memory of Yakov G. Sapunkov

A. V. Molodenkov[✉], Yu. N. Chelnokov

Institute of Precision Mechanics and Control Russian Academy of Sciences, 24 Rabochaya St., Saratov 410028, Russia

Alexei V. Molodenkov, molalexei@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4991-4220>, AuthorID: 7448

Yurii N. Chelnokov, ChelnokovYuN@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-4901-5767>, AuthorID: 8289

Abstract. The article is devoted to the outstanding mechanical scientist and pedagogue Yakov Grigoryevich Sapunkov (04.11.1938–23.10.2020), whose important scientific results range from hypersonic aerodynamics, fluid mechanics and computational methods to the theory of optimal control, mechanics of space flight and the theory of strapdown inertial navigation systems (SINS). An outline of his scientific activity and list of his most significant scientific works are given.

Keywords: hypersonic gas flows, fluid mechanics, mechanics of space flight, optimal control theory, theory of SINS, Ya. G. Sapunkov

For citation: Molodenkov A. V., Chelnokov Yu. N. In memory of Yakov G. Sapunkov. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 3, pp. 463–471 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-463-471>, EDN: TXUNZO

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

1. Гиперзвуковые течения газа и механика жидкости

Жизнь Я. Г. Сапункова неразрывно связана с Саратовским государственным университетом имени Н. Г. Чернышевского. Здесь Яков Григорьевич окончил механико-математический факультет и в 1961 г. поступил в аспирантуру при кафедре «Теоретическая механика и аэрогидромеханика». Его научным руководителем стал проф. Б. М. Булах — ученик проф. С. В. Фальковича.

С 1962 г. на кафедре начались исследования гиперзвуковых течений газа. В начале 1960-х гг. Б. М. Булах получил значительные результаты в исследовании сверхзвуковых конических течений газа, которые были опубликованы в его монографии «Нелинейные конические течения газа», подготовил курс лекций «Гиперзвуковые течения газа». После переезда профессора в г. Ленинград исследования по гиперзвуковым течениям газа продолжил Я. Г. Сапунков. Им были построены приближенные аналитические решения для задачи о гиперзвуковом обтекании конических тел с учетом вихревых энтропийных слоев, которые возникают вблизи поверхности тел. Для исследования таких течений использовался метод разложения по малым параметрам задачи и его модификации: метод Пуанкаре – Лайтхилла – Го (метод ПЛГ), метод внутренних и внешних разложений.

Прямое применение классического метода разложения по малым параметрам к решению задач о гиперзвуковом обтекании конических тел дает приближения, которые неравномерно аппроксимируют решение задачи во всей области течения из-за того, что зависимость параметров течения от малых параметров имеет некоторые особенности. Это обстоятельство вынуждает использовать модифицированные методы разложения по малым параметрам.

Надо отметить большую роль С. В. Фальковича в культивировании этих методов на кафедре. В частности, именно Савелий Владимирович посоветовал Якову Григорьевичу обратить внимание на статью о методе ПЛГ в сборнике переводов иностранных статей, в редактировании которого он принимал участие.

По окончании аспирантуры Я. Г. Сапунков защитил в Институте механики МГУ имени М. В. Ломоносова кандидатскую диссертацию на тему «Вихревые слои при обтекании конических тел сверх- и гиперзвуковыми потоками газа».



В 1964 г. за рубежом была опубликована книга М. Ван Дайка «Методы возмущений в механике жидкости»; С. В. Фалькович выписал эту книгу и организовал на руководимой им кафедре «Теоретическая механика и аэрогидромеханика» семинар по ее изучению. Сотрудники широко использовали новые методы возмущений для решения различных задач о движении жидкостей и газов. Позже ими разрабатывались аналитические и численные методы для исследования нестационарных гиперзвуковых течений при обтекании различных тел.

Долгое время не удавалось построить с помощью метода разложений по малому параметру решение задачи для гиперзвукового обтекания плоского крыла. Дело в том, что зависимость параметров течения и формы ударной волны от малого параметра задачи, в качестве которого выступает отношение плотностей газа при переходе через сильную ударную волну, имеет несколько особенностей различного характера и расположенных в разных областях течения. Эту задачу решали многие исследователи, но в итоге решение задачи было построено Я. Г. Сапунковым.

Также с помощью метода ПЛГ и метода внутренних и внешних разложений Яковом Григорьевичем исследовалась задача неустановившегося автомодельного течения во внешнем магнитном поле неньютоновской электропроводной жидкости под действием пластины, импульсно приведенной в равномерное движение. Решение задачи получено для слабых и сильных магнитных полей. Основные результаты Я. Г. Сапункова в области гиперзвуковой аэродинамики и механики жидкости опубликованы в [1–4]. Научную работу по этой тематике в СГУ Яков Григорьевич продолжал до начала 1990-х гг.

2. Механика космического полета (аэродинамика), теория оптимального управления и теория БИНС

В 1994 г. Яков Григорьевич начинает сотрудничество с проф. Ю. Н. Челноковым и А. В. Молоденковым в области механики космического полета, теории оптимального управления движением и теории бесплатформенных инерциальных навигационных систем (БИНС) в Институте проблем точной механики и управления РАН (ИПТМУ РАН). Он принимал участие в ряде фундаментальных и прикладных исследований, многие из которых были поддержаны РФФИ. Исследования выполнялись в лаборатории механики, навигации и управления движением ИПТМУ РАН.

Яковом Григорьевичем и в соавторстве с ним были получены новые научные результаты, которые носили приоритетный характер в области оптимального управления орбитальным (траекторным) движением космических аппаратов. Приведем некоторые из них.

Я. Г. Сапунковым рассматривалась задача об оптимальной встрече управляемого космического аппарата (КА) с неуправляемым аппаратом, движущимся по эллиптической кеплеровской орбите в поле тяготения Солнца. Управление КА осуществляется с помощью солнечного паруса и двигателя малой тяги. Для решения этой задачи использовались регулярные кватернионные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел в переменных Ку-стаанхеймо – Штифеля (KS-переменных) и принцип максимума Л. С. Понтрягина. В качестве минимизируемого функционала использовался комбинированный интегральный функционал качества, характеризующий расход энергии на перевод управляемого КА из начального в конечное состояние и время, затраченное на этот перевод. Я. Г. Сапунковым были сформулированы дифференциальные краевые задачи оптимизации и найдены их первые интегралы.

С помощью принципа максимума и KS-переменных Яковом Григорьевичем была решена пространственная задача оптимального вывода на заданную орбиту космического аппарата, управляемого с помощью солнечного паруса и ограниченного или импульсного реактивного ускорения центра масс КА. При этом минимизируемый функционал представлял собой линейную комбинацию с весовыми множителями двух критериев: времени и интегральной суммы величин импульсов реактивного ускорения центра масс КА, затраченных на процесс управления. Для этой задачи Я. Г. Сапунковым были представлены следующие результаты:

- получены первые интегралы уравнений краевой задачи и формулы для определения



приращений фазовых и сопряженных переменных под действием сообщаемого импульса реактивного ускорения;

- получены численные решения задачи для ограниченного или импульсного ускорения при наличии солнечного паруса или при его отсутствии;
- дана оценка влияния наличия солнечного паруса на длительность процесса, на суммарный импульс величины реактивного ускорения и на величину минимизируемого функционала;
- рассмотрены случаи коррекции орбиты и случаи, когда элементы новой орбиты существенно отличаются от элементов начальной орбиты КА;
- установлена оптимальность реактивного ускорения, ортогонального к плоскости оскулирующей орбиты КА, для малых значений отклонений угловых элементов орбиты от их начальных значений, т.е. оптимальность такого ускорения в задачах коррекции угловых элементов орбиты КА.

С использованием кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбиты КА и принципа максимума Понтрягина Я. Г. Сапунков изучал задачу оптимальной переориентации орбиты КА с помощью ограниченной или импульсной реактивной тяги, ортогональной плоскости оскулирующей орбиты. Такая тяга изменяет ориентацию орбиты КА, сохраняя ее форму и размеры в процессе управления неизменными. Функционал, определяющий качество процесса управления, представлял собой свертку с весовыми множителями двух критериев: времени и суммарного импульса реактивной тяги, затраченных на процесс управления (частные случаи этого функционала — случай быстрогодействия и случай минимизации характеристической скорости). Была разработана теория решения задачи при помощи кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбиты КА в нелинейной непрерывной постановке с использованием ограниченной (малой) или импульсной (большой) реактивной тяги. Им получены алгоритмы решения краевых задач оптимальной двухимпульсной и многоимпульсной переориентации орбиты КА (для нефиксированного числа импульсов реактивной тяги) и примеры численного решения краевых задач оптимальной переориентации орбиты КА.

С использованием кватернионов и принципа максимума Яков Григорьевич решил в нелинейной постановке задачу об оптимальном переводе орбиты КА с переменной массой на заданную плоскость. Было показано, что управление движением аппарата производится с помощью ограниченной по модулю реактивной тяги, ортогональной к плоскости оскулирующей орбиты КА. Причем изменение массы аппарата учитывается за счет расхода рабочего тела на процесс управления, а функционал, определяющий качество процесса управления, представляет собой линейную свертку с весовыми множителями двух критериев: времени и суммарного импульса тяги, затраченных на процесс управления.

Совместно с Ю. Н. Челноковым Я. Г. Сапунков разработал теорию решения такой задачи. Полученные Яковом Григорьевичем численные решения задачи оптимального управления орбитальным движением КА содержат до 192 пассивных и активных этапов. Им также установлены закономерности оптимального управления поворотом плоскости орбиты КА. Основные результаты в области управляемого орбитального движения КА опубликованы в работах [5–17].

В рамках математической теории БИНС Яковом Григорьевичем был предложен новый вариант разделения процесса численного интегрирования дифференциальных уравнений функционирования БИНС в нормальной географической системе координат на быстрый и медленный циклы счета. С использованием метода Эйлера – Коши Я. Г. Сапунков построил численный метод типа «предиктор-корректор», решающий задачу определения ориентации и местоположения объекта с помощью БИНС на борту в реальном времени с высокой точностью [18].

В области задач оптимального управления угловым движением (переориентацией) КА Яковом Григорьевичем и в соавторстве с ним были получены следующие результаты.

- Аналитически и численно исследованы особые режимы управления в задачах оптимальной переориентации твердого тела (КА) различной динамической конфигурации.



Особым режимом управления принято называть ситуацию, когда структура оптимального управления из принципа максимума не определяется сразу, тогда переходят к дополнительному исследованию производных от функции Гамильтона – Понтрягина, фазовых и сопряженных переменных задачи.

- Получены условия возникновения особых режимов, явные выражения для оптимальных управлений и траекторий углового движения КА на особых участках управления, новые первые интегралы задач, справедливые для особых и не особых участков управления.
- Построены аналитические решения задач импульсных оптимальных разворотов сферически симметричного и осесимметричного КА (твердого тела) при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости КА, реализующие двухимпульсные схемы управления. Полученные аналитические решения доведены до записи в виде алгоритмов разворотов КА.
- Найден новый класс точных аналитических решений в задаче оптимального разворота сферически-симметричного твердого тела (результат вошел в Отчетный доклад Президиума РАН Президенту РФ и Правительству РФ за 2010 г.).
- В рамках классической концепции Пуансо, интерпретирующей произвольное угловое движение твердого тела в терминах конусов прецессии, или иначе обобщенного конического движения, с использованием принципа максимума Понтрягина получено квазиоптимальное аналитическое решение задачи оптимального разворота КА произвольной динамической конфигурации при произвольных граничных условиях по угловому положению в пространстве и угловой скорости КА. В целом ряде случаев квазиоптимальное решение задачи совпадает с оптимальным решением. Предложенное решение доведено до явных выражений, которые могут быть использованы как алгоритмы программной переориентации КА. Основные результаты в этой области опубликованы в работах [19–37]. Следует отметить, что по этой тематике Яков Григорьевич принял участие в подготовке одного кандидата и одного доктора наук.

Вклад Я. Г. Сапункова в развитие вышеперечисленных разделов механики, теории оптимального управления движением и теории БИНС сложно переоценить. Глубокий научный задел, созданный Яковом Григорьевичем, дает импульс к решению новых задач. Его работы хорошо знают не только в России, но и за рубежом. Коллеги помнят и ценят Якова Григорьевича как талантливого, творчески мыслящего исследователя и с теплотой его вспоминают.

Список литературы

1. Сапунков Я. Г. Гиперзвуковое обтекание круглого конуса под углом атаки // Прикладная математика и механика. 1963. Т. 27, № 1. С. 190–192.
2. Сапунков Я. Г. Гиперзвуковое обтекание конических тел // Известия Академии наук СССР. Механика жидкости и газа. 1966. № 1. С. 137–139.
3. Сапунков Я. Г. Автомодельные решения пограничного слоя ньютоновской жидкости в магнитной гидродинамике // Известия Академии наук СССР. Механика жидкости и газа. 1967. № 6. С. 77–82.
4. Сапунков Я. Г. Задача Релея для неньютоновской электропроводной жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 1970. № 2. С. 50–55.
5. Челноков Ю. Н., Сапунков Я. Г. Построение оптимальных управлений и траекторий космического аппарата на основе регулярных кватернионных уравнений задачи двух тел // Космические исследования. 1996. Т. 34, № 2. С. 150–158. EDN: [XRRJNP](#)
6. Сапунков Я. Г. Применение KS-переменных к задаче оптимального управления космическим аппаратом // Космические исследования. 1996. Т. 34, № 4. С. 428–433.
7. Сапунков Я. Г. Решение задач оптимального управления космическим аппаратом с ограниченной и импульсной тягой в KS-переменных // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 3. С. 73–78. EDN: [LATGAN](#)
8. Сапунков Я. Г. Оптимальное управление космическим аппаратом с двигателем ограниченной или импульсной тяги и солнечным парусом // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 4. С. 55–61. EDN: [SAFSZX](#)
9. Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Построение оптимальных управлений и траекторий центра масс космического аппарата, снабженного солнечным парусом и двигателем малой тяги, с использова-



- нием кватернионов и переменных Кустаанхеймо – Штифеля // Космические исследования. 2014. Т. 52, № 6. С. 489–499. <https://doi.org/10.7868/S0023420614060053>, EDN: SXWXRL
10. Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Исследование задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата посредством ограниченной или импульсной реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты. Часть 1 // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016. Т. 17, № 8. С. 567–575. <https://doi.org/10.17587/mau.17.567-575>, EDN: WHTPRJ
 11. Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Исследование задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата посредством ограниченной или импульсной реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты. Часть 2 // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016. Т. 17, № 9. С. 633–643. <https://doi.org/10.17587/mau.17.633-643>, EDN: WMCIWX
 12. Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Импульсная оптимальная переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости оскулирующей орбиты. I // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2018. № 5. С. 70–89. <https://doi.org/10.31857/S057232990002467-3>, EDN: VNJSGN
 13. Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Импульсная оптимальная переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости оскулирующей орбиты. II // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2019. № 1. С. 3–23. <https://doi.org/10.1134/S0572329919010021>, EDN: VVVMFY
 14. Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Кватернионное решение задачи оптимального поворота плоскости орбиты космического аппарата переменной массы с помощью тяги, ортогональной плоскости орбиты // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2019. № 4. С. 109–128. <https://doi.org/10.1134/S057232991904007X>, EDN: GUOAXE
 15. Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Оптимальный поворот плоскости орбиты космического аппарата переменной массы в центральном гравитационном поле посредством ортогональной тяги // Автоматика и телемеханика. 2019. № 8. С. 87–108. <https://doi.org/10.1134/S0005231019080087>, EDN: KFYBEV
 16. Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Решение задачи оптимального вывода на орбиту космического аппарата с использованием реактивного ускорения и солнечного паруса в переменных Кустаанхеймо – Штифеля // Космические исследования. 2021. Т. 59, № 4. С. 327–338. <https://doi.org/10.31857/S0023420621040051>, EDN: AUBMPC
 17. Челноков Ю. Н., Сапунков Я. Г., Логинов М. Ю., Щекутьев А. Ф. Прогноз и коррекция орбитального движения космического аппарата с использованием регулярных кватернионных уравнений и их решений в переменных Кустаанхеймо – Штифеля и изохронных производных // Прикладная математика и механика. 2023. Т. 87, вып. 2. С. 124–156. <https://doi.org/10.31857/S0032823523020054>
 18. Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N., Molodencov A. V. A new method of integrating the equations of autonomous strapdown INS // Мехатроника, автоматизация, управление. 2018. Т. 19, № 10. С. 658–663. <https://doi.org/10.17587/mau.19.658-663>
 19. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Решение задачи оптимального разворота осесимметричного космического аппарата с ограниченным и импульсным управлением при произвольных граничных условиях // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2007. № 2. С. 152–165. EDN: HZRURD
 20. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Особый режим управления в задаче оптимального разворота сферически-симметричного космического аппарата // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2009. № 6. С. 47–54. EDN: KYFYHT
 21. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Особый режим управления в задаче оптимального разворота осесимметричного космического аппарата // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2010. № 6. С. 61–69. EDN: NBSIPJ
 22. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Особый режим управления в задаче оптимального разворота произвольного твердого тела (космического аппарата) // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2012. № 2. С. 145–152. EDN: OWWXZD
 23. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Новый класс аналитических решений в задаче оптимального разворота сферически симметричного твердого тела // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2012. № 2. С. 16–27. EDN: OYCCRF
 24. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Аналитическое решение задачи оптимального разворота сферически-симметричного космического аппарата в классе конических движений // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2013. № 3. С. 167–176. <https://doi.org/10.7868/S000233881302008X>, EDN: PZVJEP
 25. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Аналитическое решение задачи оптимального по быстро-



- действию разворота сферически-симметричного космического аппарата в классе конических движений // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2014. № 2. С. 13–25. <https://doi.org/10.7868/S0002338814020139>, EDN: RWZRRB
26. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Решение задачи оптимального разворота сферически симметричного твердого тела при произвольных граничных условиях в классе обобщенных конических движений // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2014. № 5. С. 22–34. EDN: SUJOTT
27. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Аналитическое приближенное решение задачи оптимального разворота космического аппарата при произвольных граничных условиях // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2015. № 3. С. 131–141. <https://doi.org/10.7868/S0002338815030142>, EDN: TQQRH
28. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Аналитическое решение задачи оптимального в смысле комбинированного функционала разворота твердого тела в классе конических движений // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2016. № 2. С. 3–16. EDN: VWXDSH
29. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Аналитическое решение задачи оптимального разворота осесимметричного космического аппарата в классе конических движений // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2016. № 6. С. 129–145. <https://doi.org/10.7868/S0002338816060093>, EDN: WYLTGR
30. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Аналитическое решение задачи оптимального по быстродействию разворота осесимметричного космического аппарата в классе конических движений // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2018. № 2. С. 131–147. <https://doi.org/10.7868/S0002338818020117>, EDN: YWSMBI
31. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Аналитическое квазиоптимальное решение задачи разворота произвольного твердого тела при произвольных граничных условиях // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2019. № 2. С. 140–154. <https://doi.org/10.1134/S0572329919020090>, EDN: ZDMBWX
32. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Оптимальное управление вращательным движением твердого тела с комбинированным критерием качества // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2019. № 3. С. 55–65. <https://doi.org/10.1134/S0002338819030120>, EDN: ZDEFDV
33. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Аналитическое квазиоптимальное решение задачи поворота осесимметричного твердого тела с комбинированным функционалом // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2020. № 3. С. 39–49. <https://doi.org/10.31857/S0002338820030105>, EDN: OYYEJS
34. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Аналитическое квазиоптимальное решение задачи минимального по времени поворота космического аппарата // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2021. Т. 4. С. 142–156. <https://doi.org/10.31857/S0002338821030124>, EDN: HILFVT
35. Сапунков Я. Г., Молоденков А. В. Аналитическое решение задачи оптимального в смысле комбинированного функционала разворота осесимметричного космического аппарата // Автоматика и телемеханика. 2021. № 7. С. 86–106. <https://doi.org/10.31857/S0005231021070059>, EDN: FJJYBV
36. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Аналитический квазиоптимальный алгоритм программного управления угловым движением космического аппарата // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2023. № 4. С. 125–136. <https://doi.org/10.31857/S0002338823030101>, EDN: EUUEGE
37. Sapunkov Ya. G., Molodenkov A. V. Quasioptimal Spacecraft attitude control constructed according to the Poinot concept // Aerospace. 2023. Vol. 10, iss. 5. Art. 402. <https://doi.org/10.3390/aerospace10050402>

References

1. Sapunkov Ia. G. Hypersonic flow past a circular cone at angle of attack. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1963, vol. 27, iss. 1, pp. 281–285. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(63\)90117-5](https://doi.org/10.1016/0021-8928(63)90117-5)
2. Sapunkov Ya. G. Hypersonic flow past conical bodies. *Fluid Dynamics*, 1967, vol. 1, iss. 1, pp. 98–99. <https://doi.org/10.1007/BF01016280>
3. Sapunkov Ya. G. Self-similar solutions of non-Newtonian fluid boundary layer in MHD. *Fluid Dynamics*, 1967, vol. 2, iss. 6, pp. 53–56. <https://doi.org/10.1007/BF01013712>



4. Sapunkov Ya. G. The rayleigh problem for a non-newtonian electrically conducting fluid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1970, vol. 11, iss. 2, pp. 241–245. <https://doi.org/10.1007/BF00908102>
5. Chelnokov Yu. N., Sapunkov Ya. G. Design of optimum control strategies and trajectories of a Spacecraft with the regular quaternion equations of the two-body problem. *Cosmic Research*, 1996, vol. 34, iss. 2, pp. 137–145. EDN: **LDPBMR**
6. Sapunkov Ya. G. The use of KS variables in the problem of spacecraft optimum control. *Cosmic Research*, 1996, vol. 34, iss. 4, pp. 395–400.
7. Sapunkov Ya. G. The solution of the spacecraft optimum control problems with limited and impulse force using KS-variables. *Mechatronics, Automation, Control*, 2010, iss. 3, pp. 73–78 (in Russian). EDN: **LATGAN**
8. Sapunkov Ya. G. Optimal control of a spacecraft with engine of limited or pulse thrust and solar sail. *Mechatronics, Automation, Control*, 2014, iss. 4, pp. 55–61 (in Russian). EDN: **SAFSZX**
9. Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N. Construction of optimum controls and trajectories of motion of the center of masses of a spacecraft equipped with the solar sail and low thrust engine, using quaternions and Kustaanheimo – Stiefel variables. *Cosmic Research*, 2014, vol. 52, iss. 6, pp. 450–460. <https://doi.org/10.1134/S0010952514060057>, EDN: **UFIQYL**
10. Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N. Investigation of the task of the optimal reorientation of a spacecraft orbit through a limited or impulse jet thrust, orthogonal to the plane of the orbit. Part 1. *Mechatronics, Automation, Control*, 2016, vol. 17, iss. 8, pp. 567–575 (in Russian). <https://doi.org/10.17587/mau.17.567-575>, EDN: **WHTPRJ**
11. Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N. Investigation of the task of the optimal reorientation of a spacecraft orbit through a limited or impulse jet thrust, orthogonal to the plane of the orbit. Part 2. *Mechatronics, Automation, Control*, 2016, vol. 17, iss. 9, pp. 633–643 (in Russian). <https://doi.org/10.17587/mau.17.633-643>
12. Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N. Pulsed optimal spacecraft orbit reorientation by means of reactive thrust orthogonal to the osculating orbit. I. *Mechanics of Solids*, 2018, vol. 53, iss. 5, pp. 535–551. <https://doi.org/10.3103/S0025654418080083>, EDN: **SUAMTW**
13. Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N. Pulsed optimal spacecraft orbit reorientation by means of reactive thrust orthogonal to the osculating orbit. II. *Mechanics of Solids*, 2019. vol. 54, iss. 1, pp. 1–18. <https://doi.org/10.3103/S0025654419010011>, EDN: **DWLNJF**
14. Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N. Quaternion solution of the problem of optimal rotation of the orbit plane of a variable-mass spacecraft using thrust orthogonal to the orbit plane. *Mechanics of Solids*, 2019, vol. 54, iss. 6, pp. 941–957. <https://doi.org/10.3103/S0025654419060098>, EDN: **TNAEOH**
15. Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N. Optimal rotation of the orbit plane of a variable mass spacecraft in the central gravitational field by means of orthogonal thrust. *Automation and Remote Control*, 2019, vol. 80, iss. 8, pp. 1437–1454. <https://doi.org/10.1134/S000511791908006X>, EDN: **MQGAKL**
16. Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N. Solution of the problem of optimal spacecraft launching into orbit using reactive acceleration and solar sail in Kustaanheimo – Stiefel variables. *Cosmic Research*, 2021, vol. 59, iss. 4, pp. 280–290. <https://doi.org/10.1134/S0010952521040055>, EDN: **MQGAKL**
17. Chelnokov Yu. N., Sapunkov Ya. G., Loginov M. Yu., Schekutev A. F. Prediction and correction of the orbital motion of spacecraft using regular quaternion equations and their solutions in the Kustaanheimo – Stiefel variables and isochronic derivatives. *Mechanics of Solids*, 2023, vol. 58, iss. 7, pp. 2478–2503. <https://doi.org/10.3103/S0025654423070063>
18. Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N., Molodenkov A. V. A new method of integrating the equations of autonomous strapdown INS. *Mechatronics, Automation, Control*, 2018, vol. 19, iss. 10, pp. 658–663. <https://doi.org/10.17587/mau.19.658-663>
19. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. A solution of the optimal turn problem of an axially symmetric spacecraft with bounded and pulse control under arbitrary boundary conditions. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2007, vol. 46, iss. 2, pp. 310–323. <https://doi.org/10.1134/S1064230707020189>, EDN: **LKEWCP**
20. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. Special control regime in optimal turn problem of spherically symmetric spacecraft. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2009, vol. 48, iss. 6, pp. 891–898. <https://doi.org/10.1134/S1064230709060057>, EDN: **MWSYXZ**
21. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. Special control regime in the problem of optimal turn of an axially symmetric spacecraft. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2010, vol. 49, iss. 6, pp. 891–899. <https://doi.org/10.1134/S1064230710060079>
22. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. Special control regime in the problem of optimal turn of an



- arbitrary rigid body (Spacecraft). *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2012, vol. 51, iss. 2, pp. 306–314. <https://doi.org/10.1134/S1064230712010121>, EDN: PDSDUZ
23. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. A new class of analytic solutions in the optimal turn problem for a spherically symmetric body. *Mechanics of Solids*, 2012, vol. 47, iss. 2, pp. 167–177. <https://doi.org/10.3103/S0025654412020033>, EDN: PDOJBH
24. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. Analytical solution of the optimal slew problem of a spherically symmetric spacecraft in the class of conical motion. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2013, vol. 52, iss. 3, pp. 491–501. <https://doi.org/10.1134/S1064230713020081>, EDN: RFIDCJ
25. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. Analytical solution of the time-optimal slew problem of a spherically symmetric spacecraft in the class of conical motion. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2014, vol. 53, iss. 2, pp. 159–171. <https://doi.org/10.1134/S1064230714020130>, EDN: SKRKGD
26. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. Solution of the optimal turn problem for a spherically symmetric rigid body with arbitrary boundary conditions in the class of generalized conical motions. *Mechanics of Solids*, 2014, vol. 49, iss. 5, pp. 495–505. <https://doi.org/10.3103/S0025654414050021>, EDN: UGHREP
27. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. Analytical approximate solution of the problem of a spacecraft's optimal turn with arbitrary boundary conditions. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2015, vol. 54, iss. 3, pp. 458–468. <https://doi.org/10.1134/S1064230715030144>, EDN: UFBJKT
28. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. Analytical solution of the optimal attitude maneuver problem with a combined objective functional for a rigid body in the class of conical motions. *Mechanics of Solids*, 2016, vol. 51, iss. 2, pp. 135–147. <https://doi.org/10.3103/S0025654416020011>, EDN: WTQMSH
29. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. Analytical solution of the optimal slew problem for an axisymmetric spacecraft in the class of conical motions. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2016, vol. 55, iss. 6, pp. 969–985. <https://doi.org/10.1134/S1064230716060095>, EDN: YUZEON
30. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. Analytical solution of the minimum time slew maneuver problem for an axially symmetric spacecraft in the class of conical motions. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2018, vol. 57, iss. 2, pp. 302–318. <https://doi.org/10.1134/S1064230718020120>, EDN: XYGMYX
31. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. Analytical quasi-optimal solution for the problem on turn maneuver of an arbitrary solid with arbitrary boundary conditions. *Mechanics of Solids*, 2019, vol. 54, iss. 3, pp. 474–485. <https://doi.org/10.3103/S0025654419020110>, EDN: JZHUEV
32. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. Optimal control of rigid body's rotation movement with a combined quality criterion. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2019, vol. 58, iss. 3, pp. 382–392. <https://doi.org/10.1134/S1064230719030122>, EDN: BDLWQZ
33. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. Analytical quasi-optimal solution of the slew problem for an axially symmetric rigid body with a combined performance index. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2020, vol. 59, iss. 3, pp. 347–357. <https://doi.org/10.1134/S1064230720030107>, EDN: VATIAO
34. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. Analytical quasi-optimal solution of the problem of the time-optimal rotation of a spacecraft. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2021, vol. 60, iss. 4, pp. 639–653. <https://doi.org/10.1134/S1064230721030114>, EDN: YRZQQC
35. Sapunkov Ya. G., Molodenkov A. V. Analytical solution of the problem on an axisymmetric spacecraft attitude maneuver optimal with respect to a combined functional. *Automation and Remote Control*, 2021, vol. 82, iss. 7, pp. 1183–1200. <https://doi.org/10.1134/S0005117921070043>, EDN: MOZLRQ
36. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. Analytical quasi-optimal algorithm for the programmed control of the angular motion of a spacecraft. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2023, vol. 62, pp. 569–580. <https://doi.org/10.1134/S1064230723030103>
37. Sapunkov Y. G., Molodenkov A. V. Quasioptimal spacecraft attitude control constructed according to the Poincaré concept. *Aerospace*, 2023, vol. 10, iss. 5, art. 402. <https://doi.org/10.3390/aerospace10050402>

Поступила в редакцию / Received 16.10.2023

Принята к публикации / Accepted 10.11.2023

Опубликована / Published 30.08.2024