

МЕХАНИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 4. С. 536–551

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 4, pp. 536–551

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-536-551>

EDN: NZJSQK

Научная статья

УДК 514.85,531.36

«Парадоксальный» механизм П. Л. Чебышёва

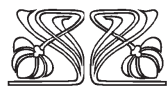
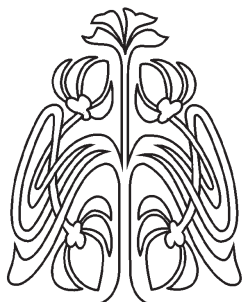
С. Н. Бурьян

Государственный научно-исследовательский институт прикладных проблем, Россия, 191167, г. Санкт-Петербург, наб. Обводного канала, д. 29

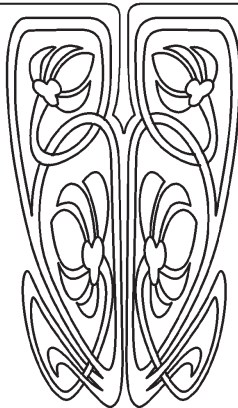
Бурьян Сергей Николаевич, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, burianserg@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7795-6735>, AuthorID: 974092

Аннотация. В статье рассматривается кинематика и динамика «парадоксального» механизма П. Л. Чебышёва. В конфигурационном пространстве этого механизма есть шесть особых точек, которые последовательно проходятся при полном обороте ведущего звена. В этих точках голономные связи, наложенные на систему, становятся линейно зависимыми, поэтому применить стандартный вывод уравнений движения в этих точках не представляется возможным. Свойства парадоксального механизма основаны на свойствах лямбда-механизма. Траектория вершины лямбда-механизма в «парадоксальном» механизме расположена между двумя окружностями и касается каждой окружности в трех точках. В соответствующих положениях «парадоксального» механизма возникают особенности конфигурационного пространства. В статье показано, что в окрестности особой точки конфигурационное пространство является объединением двух гладких кривых, которые пересекаются под ненулевым углом. Для численного и аналитического моделирования параметров «парадоксального» механизма приводятся основные формулы из трудов П. Л. Чебышёва. Для описания динамики «парадоксальный» механизм представляется как объединение лямбда-механизма и сингулярного маятника, движения которых ограничены двумя голономными связями. Выписаны уравнения движения и найдены возникающие силы реакции. Показано, что при малом увеличении длины звена двойного маятника конфигурационное пространство распадается на две непересекающиеся кривые. Чем меньше становится возмущение звена, тем больше по величине множители Лагранжа около особых конфигураций.

Ключевые слова: механизмы Чебышёва, «парадоксальный» механизм, шарнирный механизм, особая точка, голономная связь, множители Лагранжа



Научный
отдел





Для цитирования: Бурьян С. Н. «Парадоксальный» механизм П. Л. Чебышёва // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 4. С. 536–551. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-536-551>, EDN: NZJSQK

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

The “paradoxical” mechanism of P. L. Chebyshev

S. N. Burian

State Research Institute of Applied Problems, 29 Naberezhnaya Obvodnogo kanala, St. Petersburg 191167, Russia

Sergey N. Burian, burianserg@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7795-6735>, AuthorID: 974092

Abstract. The kinematics and dynamics of P. L. Chebyshev’s “paradoxical” mechanism are considered. The point of interest in the dynamics of the “paradoxical” mechanism is connected with the fact that its configuration space contains six singular points. These points are successively passed through a full turn of the handle. Holonomic constraints which are imposed on the system become linearly dependent at singular points. Thus it is impossible to apply the standard methods of derivation of the motion equations at singular points. The properties of the “paradoxical” mechanism are based on the properties of the lambda mechanism. P. L. Chebyshev designed many mechanisms for particular types of motion by using the construction of the lambda mechanism. For example, it is possible to obtain an anti-rotation mechanism, a mechanism with two swings per revolution of the handle, or a mechanism with a stop of the driven link with certain parameters of the lambda mechanism. The trajectory of the vertex of the lambda mechanism in the “paradoxical” mechanism is located between two circles and touches each circle at three points. Therefore singular points arise in the configuration space. It is shown in the article that the configuration space consists of two “curves” that intersect at a nonzero angle in the neighbourhood of a singular point. In order to get a numerical and analytical model of the “paradoxical” mechanism, the main formulas from the works of P. L. Chebyshev are given. “Paradoxical” mechanism is represented as a combination of a lambda-mechanism and a singular pendulum, which motions are limited by two holonomic constraints. The equations of motion are written out and the reaction forces are found. It is shown that with a small increase in the length of the double pendulum rod the configuration space splits into two non-intersecting curves. The smaller the link perturbation becomes, the larger the Lagrange multipliers around singular configurations become.

Keywords: Chebyshev’s mechanisms, “paradoxical” mechanism, hinge mechanism, singular point, holonomic constraint, Lagrange multipliers

For citation: Burian S. N. The “paradoxical” mechanism of P. L. Chebyshev. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 4, pp. 536–551 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-536-551>, EDN: NZJSQK

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

В данной статье рассматривается «парадоксальный» механизм П. Л. Чебышёва. Особенность данного шарнирного механизма заключается в том, что в некоторых положениях возникают дополнительные степени свободы, в результате чего механизм может сменить тип движения. В конфигурационном пространстве «парадоксального» механизма возникают геометрические особенности (или точки ветвления) типа двух пересекающихся кривых. Основной целью исследования является изучение кинематики и динамики «парадоксального» механизма около таких особых конфигураций (особых точек конфигурационного пространства). При



малом возмущении длины одного из звеньев механизма происходит перестройка конфигурационного пространства, которое распадается на объединение двух непересекающихся кривых. Поэтому также исследуется движение механизма при малом возмущении одного из звеньев. Для упрощения анализа рассматривается движение механизма по инерции, но полученные формулы можно напрямую обобщить на случай заданных внешних сил. Оригинальный «парадоксальный» механизм был расположен в горизонтальной плоскости.

Для построения «парадоксального» механизма применяется общая теория лямбда-механизма, которая изложена в работах Чебышёва [1, 2]. Находятся параметры лямбда-механизма, которые позволяют построить приближение всей шатунной кривой к окружности. Формулировка теоремы об альтернансе, которая применяется для определения параметров механизма, приведена в [3, с. 112–114]. На интернет-ресурсе¹ можно найти как текстовое описание механизмов П. Л. Чебышёва, так и трехмерные модели механизмов. Построение уравнений движения голономной системы со связями проводится по методам из [4, 5]. Некоторые модели механизмов, созданные П. Л. Чебышёвым, находятся в музее истории Санкт-Петербургского государственного университета, их описание и общий вид можно найти в [6]. «Парадоксальный» механизм имеет шесть особых точек конфигурационного пространства.

Особенности механических систем с голономными и неголономными связями изучаются в работах [7] и [8]. В статье [9] отмечается необходимость проверки конфигурационного пространства на наличие особых точек. Метод представления сложного шарнирного механизма как композиции нескольких более простых частей с дополнительными связями рассматривается в [10].

В статьях [11, 12] автором исследуются механизм с особенностями конфигурационного пространства, сингулярный маятник. Аналогичный маятник есть и в конструкции «парадоксального» механизма. В статье [12] изложена общая теория движения сингулярного маятника, включая теоретический и численный анализ сил реакции в стержнях. В работе [13] анализируется другой механизм с особенностями конфигурационного пространства — механизм Дарбу.

1. Геометрия лямбда-механизма

Часть механизмов П. Л. Чебышёва основана на конструкции специального плоского механизма для преобразования вращательного движения в симметричное движение около некоторой оси. Рассуждения в этом разделе следуют работам Чебышёва [1–3], здесь приводятся только основные моменты теории лямбда-механизма. Подробное описание общей теории есть в книге [3]. Дополнительные рассуждения, которых нет в [1–3], записаны как «замечания».

Опишем общую конструкцию лямбда-механизма. В плоскости движения механизма есть две закрепленные вершины C и O , расстояние $CO = d$. К вершине O шарнирно крепится стержень OA длины r . Звено ABM состоит из двух отрезков MB и BA равной длины, которые образуют угол $\omega = \angle ABM$. Движение звена ABM ограничено тем, что вершины B и C соединены стержнем BC , при этом $BC = AB = BM = 1$. Значение 1 формально задает масштаб звеньев механизма. Лямбда-механизм можно рассматривать как четырехзвенный шарнирный механизм. В работах П. Л. Чебышёва [1] положение лямбда-механизма параметризуется углом $\varphi = \angle ABC$.

Обозначения A_0, M_0, B_0 соответствуют начальным положениям вершин механизма, когда угол COA равен π . Далее углы AOA_0 и MCM_0 отсчитываются от начального положения механизма при $COA = \pi$, как показано на рис. 1. Длина радиус-вектора CM равна:

$$CM = 2 \sin \frac{\omega - \varphi}{2}. \quad (1)$$

¹Проект «Механизмы П. Л. Чебышёва», 2009–2013 гг. URL: <http://www.tcheb.ru> (дата обращения: 20.03.2023).

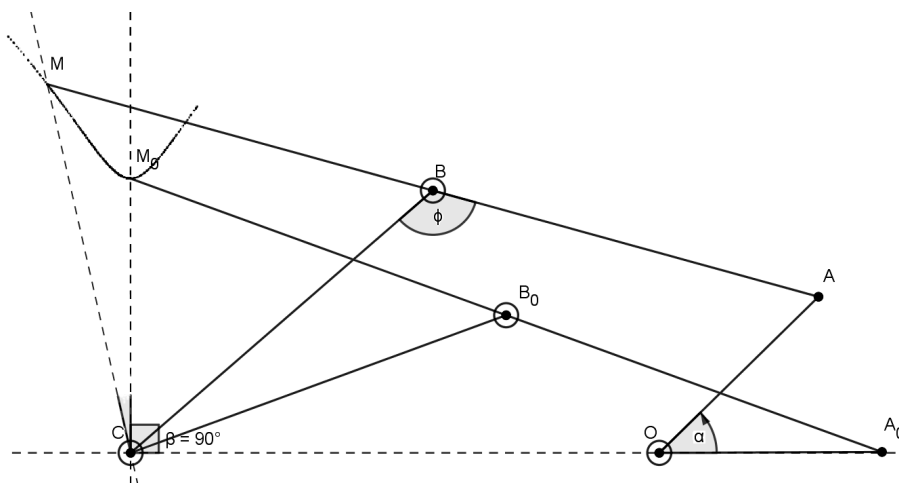


Рис. 1. Лямбда-механизм при значении угла $\omega = \pi$

Fig. 1. Lambda mechanism for angle $\omega = \pi$

Косинус угла MCM_0 отклонения вершины M от оси симметрии CM_0 :

$$\cos MCM_0 = \frac{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - r^2 + d^2}{4d \sin \frac{\varphi}{2}}. \tag{2}$$

Угол $\alpha = AOA_0$ отклонения рукоятки OA :

$$\cos \alpha = \frac{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - r^2 - d^2}{2dr}. \tag{3}$$

Для одного значения угла φ существуют два значения угла AOA_0 , которые отличаются только знаком углов в выражениях (2) и (3). При вращении звена OA вверх или вниз от линии центров COA_0 точка M описывает кривую, симметричную относительно оси CM_0 .

Замечание 1. Пусть углы α и φ изменяются в пределах $-\pi \leq \alpha \leq \pi$, $0 < \varphi < \pi$. В этом случае значение $\sin \frac{\varphi}{2}$ всегда положительно, поэтому возможно записать зависимость угла φ от угла α из формулы (3):

$$\varphi = 2 \arcsin \sqrt{\frac{r^2 + d^2 + 2rd \cos \alpha}{4}}.$$

Производная функции $\varphi'(\alpha)$ является отрицательной при $0 < \alpha < \pi$, поэтому $\varphi(\alpha)$ монотонно убывает при $0 < \alpha < \pi$. В силу четности функции $\varphi(\alpha)$ аналогично угол φ убывает от максимального значения φ_0 при $\alpha = 0$ до минимального значения φ_1 при $\alpha = \pm \alpha_{max}$.

Рассматривается следующая задача: кривая, которая описывается точкой M , должна мало отличаться от дуги окружности. Так как траектория вершины M симметрична относительно оси CM_0 , то центр окружности O_1 , которую приближает траектория точки M , должен лежать на прямой CM_0 . Обозначим через R радиус этой окружности. Тогда разность квадратов расстояния MO_1 и радиуса R записывается так:

$$MO_1^2 - R^2 = CO_1^2 - R^2 + 4 \sin^2 \left(\frac{\omega - \varphi}{2} \right) - 4CO_1 \cdot \sin \frac{\omega - \varphi}{2} \cdot \frac{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + d^2 - r^2}{4d \sin \frac{\varphi}{2}}. \tag{4}$$

Необходимо определить условия, при которых разность (4) наименее отклоняется от нуля, когда угол φ находится в пределах $\varphi = \varphi_0$ и $\varphi = \varphi_1$. Пределы φ_0 и φ_1 определяют максимальные и минимальные значения угла ABC . Если ввести переменную

$$x = \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

то разность (4) приводится к виду

$$MO_1^2 - R^2 = K \left[(p_1x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2x + p_3 \right], \quad (5)$$

где постоянные K, p_1, p_2, p_3 находятся прямым вычислением. Параметр K в работе Чебышёва не подбирается, вместо (5) минимизируется функция

$$F(x) = (p_1x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2x + p_3. \quad (6)$$

Величина K определяется после нахождения параметров p_1, p_2, p_3 . В результате задача приближения траектории движения точки M к окружности приводится к следующей: нужно подобрать параметры p_1, p_2, p_3 таким образом, чтобы функция (6) наименее уклонялась от нуля между значениями

$$x = \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}, \quad x = \sin^2 \frac{\varphi_1}{2}.$$

Для решения этой задачи применяется общая теория функций, которые наименее уклоняются от нуля на заданном интервале. В работе [1] получено явное выражение для параметров механизма. Выражения для K, p_1, p_2, p_3 заметно упрощаются при $\omega = \pi$ и $\alpha_{max} = \pi$.

Решение Чебышёва для приближения траектории точки M к окружности при значениях углов $\omega = \pi$ и $\alpha_{max} = \pi$ записывается аналитическими выражениями и формулируется в терминах вспомогательного угла

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4}.$$

Получается следующий набор параметров при заданном угле ψ :

$$r = \frac{2 \sin \psi \cdot \sin 2\psi \cdot \sqrt{2 \cos 2\psi}}{\sin 3\psi}, \quad d = \frac{\sin 2\psi}{\sin 3\psi}, \quad CO_1 = \frac{2 \cos^2 \psi}{\sin 3\psi}. \quad (7)$$

Углы φ_2 и φ_3 , для которых достигается минимальное и максимальное расстояние $MO_1^2 - R^2$ между φ_0 и φ_1 , находятся по явным выражениям:

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \psi, \quad \varphi_2 = \theta - \frac{\varphi_0}{2}, \quad \varphi_3 = \theta - \frac{\varphi_1}{2}.$$

Для радиусов R_1 и R_2 окружностей ω_1 и ω_2 , которых касается траектория точки M , выполняется

$$\frac{R_1 + R_2}{2} = \frac{2 \cos \psi \cdot \sin 2\psi \cdot \sqrt{2 \cos 2\psi}}{\sin 3\psi}, \quad \frac{R_1 - R_2}{2} = \frac{2 \cos 2\psi}{\sin 3\psi}.$$

Угол ψ не должен превосходить $\frac{\pi}{4}$. С приближением угла ψ к $\frac{\pi}{4}$ уменьшаются и величина $\frac{R_1 + R_2}{2}$, и величина $\frac{R_1 - R_2}{2}$.

$$\begin{aligned} x_M &= y_A(\alpha) + 2(x_B(\alpha) - x_A(\alpha)), & y_M &= y_A(\alpha) + 2(y_B(\alpha) - y_A(\alpha)), \\ v_B &= \sqrt{(x'_B(\alpha))^2 + (y'_B(\alpha))^2}, & MO_1 &= \sqrt{(x_M(\alpha) - x_{O_1})^2 + (y_M(\alpha) - y_{O_1})^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Координаты B в формулах (10) получаются при сдвиге середины отрезка CA на величину h ортогонально прямой CA . Полученные выражения координат вершин B и M являются гладкими, если $h \neq 0$, т.е. треугольник ABC невырожденный (угол φ не принимает значения 0 или π). Перед дальнейшим анализом сделаем некоторое общее замечание.

Утверждение 1. При значении угла $\omega = \pi$ линия CM_0 ортогональна прямой CO . Следовательно, $x_{O_1} = 0$ и $y_{O_1} = CO_1$.

Доказательство. Рассмотрим треугольник CM_0A_0 (положение лямбда-механизма при $\alpha = 0$). Так как по построению $BC = AB = BM = 1$, то описанная вокруг треугольника CM_0A_0 окружность имеет центр в точке B_0 и радиус 1. Угол M_0CA_0 является вписанным углом, который опирается на диаметр M_0A_0 , поэтому угол M_0CA_0 равен $\pi/2$. Следовательно, при $\omega = \pi$ ось симметрии кривой, которую описывает вершина M , совпадает с осью Oy . \square

Углы поворота стержней CB и AM :

$$c_1 = \arctan(y_B(\alpha), x_B(\alpha)), \quad c_2 = \arctan(y_B(\alpha) - y_A(\alpha), x_B(\alpha) - x_A(\alpha)).$$

В функции $\arctan(y, x)$ угол находится с учетом октанта точки (x, y) . Предположим, что все стержни имеют одинаковую равномерную плотность ρ на единицу длины. Тогда массы стержней OA , AM и CB зависят от длины стержней:

$$m_{OA} = r \cdot \rho, \quad m_{AM} = 2 \cdot \rho, \quad m_{CB} = 1 \cdot \rho.$$

Моменты инерции кривошипов OA и CB считаются относительно неподвижных точек O и C . Момент инерции шатуна AM считается относительно центра масс стержня AM , который совпадает с точкой B :

$$I_{OA} = \frac{1}{3} m_{OA} \cdot r^2, \quad I_{CB} = \frac{1}{3} m_{CB} \cdot 1^2, \quad I_{AM} = \frac{1}{12} m_{AM} \cdot 2^2.$$

Кинетическая энергия T_λ лямбда-механизма

$$\begin{aligned} T_\lambda(\alpha, \dot{\alpha}) &= \frac{1}{2} I_{OA} (\dot{\alpha})^2 + \frac{1}{2} I_{CB} \left(\frac{d}{dt} c_1(\alpha) \right)^2 + \frac{1}{2} m_{AM} (v_B(\alpha))^2 (\dot{\alpha})^2 + \frac{1}{2} I_{AM} \left(\frac{d}{dt} c_2(\alpha) \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} J_\lambda(\alpha) (\dot{\alpha})^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Функция $J_\lambda(\alpha)$ в (11) формально определяется так:

$$J_\lambda(\alpha) = I_{OA} + I_{CB}(c'_1(\alpha))^2 + m_{AM}(v_B(\alpha))^2 + I_{AM}(c'_2(\alpha))^2 > 0.$$

Уравнения движения по инерции *свободного* лямбда-механизма

$$J_\lambda(\alpha) \ddot{\alpha} + \frac{1}{2} J'_\lambda(\alpha) (\dot{\alpha})^2 = 0. \quad (12)$$

Таким образом, динамика лямбда-механизма описана дифференциальным уравнением (12) с гладкими коэффициентами.



3. Геометрия двойного маятника

Обозначим кривую, которую описывает вершина M лямбда-механизма, как Υ . Рассмотрим следующую кинематическую конструкцию: есть двойной маятник O_1DM , вершина O_1 фиксирована, а точка M движется только по заданной кривой Υ . Кривая Υ последовательно касается двух концентрических окружностей с центром в точке O_1 и радиусами $R_1 > R_2$ [1]. При длинах стержней $MD \pm O_1D = R_1 \pm R_2$ получаем *сингулярный маятник*, который изучался автором в статьях [12, 13]. Сингулярный маятник является двойным математическим маятником, свободная вершина которого движется по заданной кривой. Конфигурационное пространство сингулярного маятника вблизи особой точки представляет собой две пересекающиеся или две касающиеся кривые.

Введем параметризацию положения двойного маятника стандартным образом через пару углов ξ и η в системе координат $O_1x'y'$. Ось O_1x' направлена противоположно оси Oy , ось O_1y' параллельна оси Ox . Угол ξ измеряет отклонение стержня O_1D от вертикальной оси O_1x' , направленной «вниз». Угол η измеряет отклонение стержня DM от вертикальной оси. Углы ξ и η показаны на рис. 3.

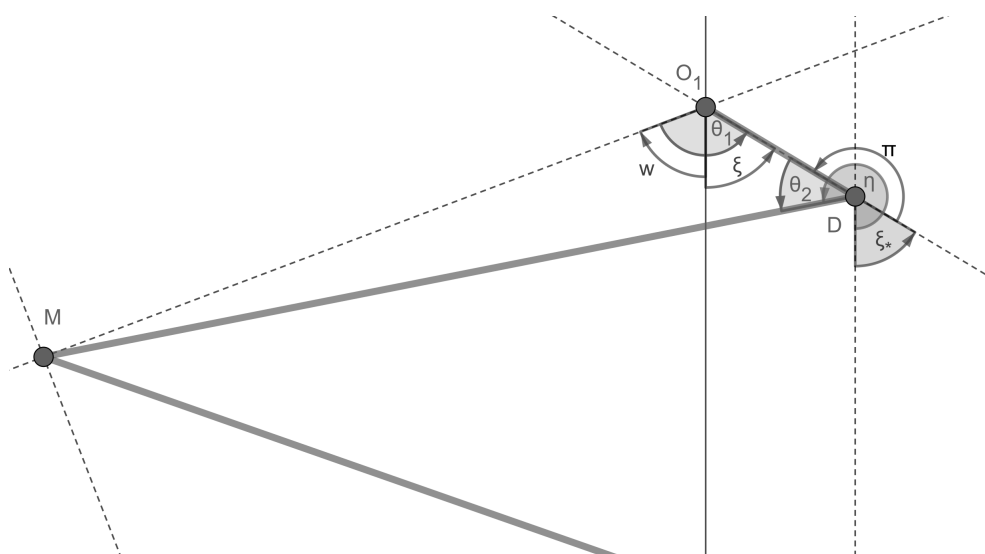


Рис. 3. Углы ξ , η , θ_1 , θ_2 и w , связанные с положением двойного маятника O_1DM
 Fig. 3. Angles ξ , η , θ_1 , θ_2 and w related to the position of the double pendulum O_1DM

Точка O_1 совпадает с центром окружности, которую приближает траектория движения точки M (пункт 2). Из утверждения 1 следует, что точка O_1 находится на оси Oy . Угол w измеряет отклонение прямой MO_1 от луча O_1C .

В парадоксальном механизме к лямбда-механизму с параметрами (9) добавляется двойной маятник O_1DM со специальными длинами звеньев O_1D и DM . Выражения для длин звеньев O_1D и DM можно получить из формулы (1):

$$\begin{aligned}
 CM_0 &= 2 \sin\left(\frac{\pi - \varphi_0}{2}\right), & CM_1 &= 2 \sin\left(\frac{\pi - \varphi_1}{2}\right), & R_2 &= |CM_1 - CO_1|, \\
 R_1 &= |CO_1 - CM_0|, & DM &= \frac{R_2 + R_1}{2}, & O_1D &= \frac{|R_2 - R_1|}{2}.
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Для углов φ_0 и φ_1 из (9) по формулам (13) получаются следующие значения:

$$DO_1 = 0.123191, \quad DM = 0.583647.
 \tag{14}$$

«Парадоксальный» механизм длинами стержней (14) показан на рис. 2. Для построения

параметризации сингулярного маятника рассмотрим углы θ_1 и θ_2 [12]:

$$\begin{aligned} \theta_1(\alpha) &= \arccos\left(\frac{((MO_1)(\alpha))^2 + DO_1^2 - MD^2}{2(MO_1)(\alpha) \cdot DO_1}\right), \\ \theta_2(\alpha) &= \arccos\left(\frac{DO_1^2 + MD^2 - ((MO_1)(\alpha))^2}{2MD \cdot DO_1}\right), \\ w(\alpha) &= \arctan(x_M, -(y_M(\alpha) - CO_1)). \end{aligned} \quad (15)$$

Углы θ_1 и θ_2 определяют углы в треугольнике O_1DM по теореме косинусов. Выражение для угла w соответствует углу поворота системы координат для лямбда-механизма Oxy и системы координат для углов двойного маятника $O_1x'y'$. Вектор O_1M в системе Oxy имеет координаты $(x_M, y_M - CO_1)$, а в системе $Ox'y'$ — координаты $(-(y_M - CO_1), x_M)$.

Для углов ξ и η есть два варианта задания:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= w(\alpha) + \theta_1(\alpha), & \eta_1 &= \xi_1 + \pi + \theta_2(\alpha), \\ \xi_2 &= w(\alpha) - \theta_1(\alpha), & \eta_2 &= \xi_2 + \pi - \theta_2(\alpha). \end{aligned} \quad (16)$$

Положительный знак в (16) соответствует кривой в конфигурационном пространстве, для которой стержни O_1D и DM находятся справа от прямой MO_1 . Отрицательный знак в (16) соответствует расположению стержней O_1D и DM слева от прямой MO_1 (ориентация системы координат задана как на рис. 2). Углы w, θ_1 и θ_2 есть на рис. 3. Координаты точки D для двух вариантов движения в системе координат Oxy :

$$x_D^{1,2} = DO_1 \sin(w + \xi_{1,2}), \quad y_D^{1,2} = CO_1 - DO_1 \cos(w + \xi_{1,2}). \quad (17)$$

Координаты (17) применяются для нахождения центра масс шатуна MD .

4. Динамика двойного маятника

Сначала рассмотрим отдельно динамику двойного маятника O_1DM при движении по инерции, без учета дополнительных голономных связей от лямбда-механизма. Кинетическая энергия T_p («pendulum») двойного физического маятника записывается в виде

$$T_p = a(\dot{\xi})^2 + b \cos(\xi - \eta)\dot{\xi}\dot{\eta} + c(\dot{\eta})^2, \quad (18)$$

где введены следующие константы:

$$a = \frac{m_{O_1D} \cdot O_1D^2}{6} + \frac{m_{DM} \cdot O_1D^2}{2}, \quad b = \frac{m_{DM} \cdot MD \cdot O_1D}{2}, \quad c = \frac{m_{DM} \cdot DM^2}{6}.$$

Уравнения движения физического маятника только под действием сил инерции:

$$\begin{aligned} 2a\ddot{\xi} + b \cos(\xi - \eta)\ddot{\eta} + b \sin(\xi - \eta)(\dot{\eta})^2 &= 0, \\ b \cos(\xi - \eta)\ddot{\xi} + 2c\ddot{\eta} - b \sin(\xi - \eta)(\dot{\xi})^2 &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Уравнения (19) могут быть записаны в матричной форме:

$$A_p(\mathbf{q}_p)\ddot{\mathbf{q}}_p + B_p(\mathbf{q}_p, \dot{\mathbf{q}}_p) = 0. \quad (20)$$

В выражении (20) введены следующие матрично-векторные обозначения:

$$A_p = \begin{pmatrix} 2a & b \cos(\xi - \eta) \\ b \cos(\xi - \eta) & 2c \end{pmatrix}, \quad B_p = \begin{pmatrix} b \sin(\xi - \eta)(\dot{\eta})^2 \\ -b \sin(\xi - \eta)(\dot{\xi})^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_p = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Кинетическая энергия T_{pc} «связанного» двойного маятника O_1DM

$$T_{pc} = \frac{1}{2}I_{O_1D}(\xi'(\alpha))^2(\dot{\alpha})^2 + \frac{1}{2}I_{DM}(\eta'(\alpha))^2(\dot{\alpha})^2 + \frac{1}{2}m_{DM}(v_W)^2 = \frac{1}{2}J_{pc}(\alpha)(\dot{\alpha})^2,$$

где вершина W является серединой (центром масс) стержня DM .



5. Конфигурационное пространство

Рассмотрим траектории движения «парадоксального» механизма в проекции на плоскость углов (ξ, η) двойного маятника O_1DM для случая, когда длины стержней DO_1 и DM определяются по точным выражениям (13). Для этого обозначим непрерывные образы кривых (16)

$$\gamma_1(\alpha) = (\xi_1(\alpha), \eta_1(\alpha)), \quad \gamma_2(\alpha) = (\xi_2(\alpha), \eta_2(\alpha))$$

как Γ_1 и Γ_2 соответственно. Проекция конфигурационного пространства «парадоксального» механизма на двумерный тор состоит из объединения двух кривых Γ_1 и Γ_2 . График конфигурационного пространства для параметров механизма, указанных в выражениях (9) и (14), показан на рис. 4. Для построения графика применялись формулы (15) и (16). На рис. 4 видно, что кривые Γ_1 и Γ_2 имеют угловые точки в особых конфигурациях «парадоксального» механизма, а объединение кривых Γ_1 и Γ_2 дает две гладкие кривые, которые пересекаются под ненулевым углом. Всего в конфигурационном пространстве есть шесть особых точек, так как особые точки $(0, -\pi)$ и $(0, \pi)$ совпадают.

Теоретически покажем, что особые точки парадоксального механизма имеют тип трансверсального пересечения. Рассмотрим двойной маятник O_1DM , вершина M которого движется по заданной кривой Υ . Кривая Υ в рассматриваемом случае движения «парадоксального» механизма является траекторией вершины M лямбда-механизма. Тип конфигурационного пространства сингулярного маятника O_1DM определяется свойствами функции расстояний $d(\alpha) = (MO_1)(\alpha)$. С небольшими модификациями теорема о свойстве конфигурационного пространства из статьи [12] применима в данном случае. Единственное отличие заключается в том, что угол α (как независимая переменная) заменяется на угол $w(\alpha)$.

Теорема 1. *Рассматривается двойной маятник O_1DM , вершина M движется по заданной гладкой кривой Υ . Координаты вершины M являются гладкими функциями некоторого параметра α . Пусть при значении параметра $\alpha = \alpha_*$ выполняется*

$$(MO_1)(\alpha_*) = DM \pm O_1D, \quad \frac{d}{d\alpha}(MO_1)(\alpha_*) = 0, \quad \frac{d^2}{d\alpha^2}(MO_1)(\alpha_*) \neq 0.$$

Первое условие соответствует особой точке конфигурационного пространства. Тогда в окрестности точки, которая соответствует α_ , конфигурационное пространство представляется как объединение двух гладких кривых, которые пересекаются трансверсально. Функции $\text{sign}(\alpha) \cdot \theta_{1,2}(\alpha)$, которые симметричны относительно α_* , являются гладкими функциями.*

Пересечение кривых Γ_1 и Γ_2 в особых точках конфигурационного пространства «парадоксального» механизма под ненулевым углом следует из того, что в особых конфигурациях функция MO_1 имеет нулевую первую производную и ненулевую вторую производную.

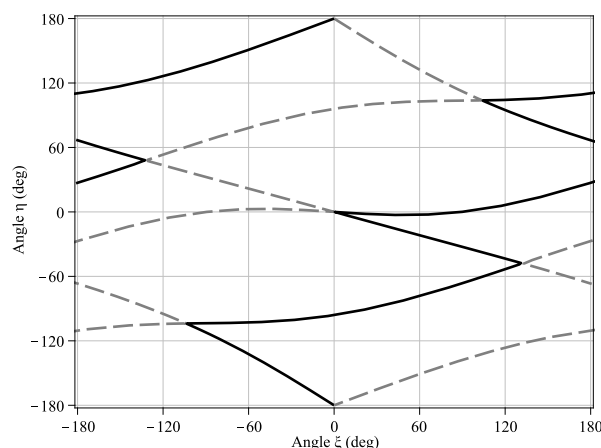


Рис. 4. Конфигурационное пространство «парадоксального» механизма в проекции на координатную плоскость углов (ξ, η) . Сплошной линией показана ветвь движения Γ_1 , пунктирной линией показана ветвь движения Γ_2

Fig. 4. The configuration space of the “paradoxical” mechanism in the projection onto the coordinate plane of the angles (ξ, η) . The solid line shows the Γ_1 motion branch, the dotted line shows the Γ_2 motion branch

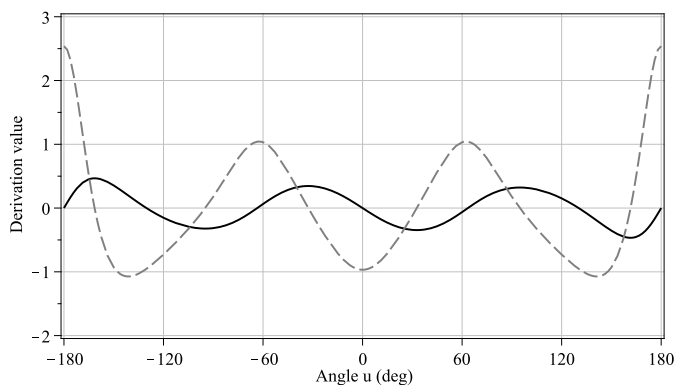


Рис. 5. Графики $(MO_1)'(\alpha)$ (сплошная линия) и $(MO_1)''(\alpha)$ (пунктирная линия)
 Fig. 5. Graphs of $(MO_1)'(\alpha)$ (solid line) and $(MO_1)''(\alpha)$ (dashed line)

Графики первой и второй производной функции MO_1 показаны на рис. 5. Видно, что в экстремальных точках функции MO_1 вторая производная находится около локального минимума или максимума и отлична от нуля.

Найдем значения углов α , при которых функция MO_1 достигает минимума или максимума. Для этого подставим известные значения $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и значения параметров r и d из выражений (9) в формулу (3). В итоге получим следующий набор углов α :

$$\alpha_1 = 0.000^\circ, \quad \alpha_2 = 63.491^\circ, \quad \alpha_3 = 130.281^\circ, \quad \alpha_4 = 180.000^\circ, \\ \alpha_5 = 229.718^\circ, \quad \alpha_6 = 296.510^\circ, \quad \alpha_7 = 360.000^\circ. \quad (21)$$

Введем вспомогательную функцию знака $\text{sign}(\alpha)$, которая меняется с $+1$ на -1 при прохождении значений α через точки α_i из набора (21):

$$\text{sign}(\alpha) = \begin{cases} +1, & \text{если } \alpha_1 < \alpha \text{ и } \alpha < \alpha_2 \\ -1, & \text{если } \alpha_2 < \alpha \text{ и } \alpha < \alpha_3 \\ +1, & \text{если } \alpha_3 < \alpha \text{ и } \alpha < \alpha_4 \\ -1, & \text{если } \alpha_4 < \alpha \text{ и } \alpha < \alpha_5 \\ +1, & \text{если } \alpha_5 < \alpha \text{ и } \alpha < \alpha_6 \\ -1, & \text{если } \alpha_6 < \alpha \text{ и } \alpha < \alpha_7 \\ 0, & \text{если } \alpha = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, 7. \end{cases}$$

Замечание 4. Для гладкой параметризации сингулярного маятника в «парадоксальном» механизме с помощью углов ξ и η при точных значениях длин всех стержней нужно выбирать не углы $\theta_{1,2}(\alpha)$, а углы $\text{sign}(\alpha) \cdot \theta_{1,2}(\alpha)$, которые являются гладкими. Функция $\text{sign}(\alpha)$ позволяет описывать движение стержня O_1D в «парадоксальном» механизме при движении ведущего звена OA .

Замечание 5. В модели «парадоксального» механизма из статьи [12] и интернет-ресурса <http://www.tcheb.ru> стержень O_1D заменен на массивный диск. С точки зрения динамики в этом случае меняются только параметры a, b и c в выражении (19). Наиболее вероятно, что стержень был заменен на массивный диск для создания дополнительного момента, который позволяет пройти через особенность конфигурационного пространства при наличии люфтов в реальной модели.

Замечание 6. Так как конфигурационное пространство сингулярного маятника в «парадоксальном» механизме имеет особенности типа пересечения двух гладких кривых на плоскости, то гладкое движение механизма соответствует симметричному движению сингулярного маятника через особенности. Симметричное движение наблюдалось при движении двойного маятника в работе [12] и при движении модели «парадоксального» механизма.

6. Динамика «парадоксального» механизма

Систему «парадоксального» механизма можно представить как объединение лямбда-механизма $COABM$ и двойного маятника O_1DM , у которых совпадают координаты вершины M в плоскости движения механизма. Возникает две голономные связи f_1 и f_2 , которые



соответствуют совпадению координат x и y точки M у лямбда-механизма и двойного маятника. Выражения связей в координатах:

$$\begin{aligned} f_1 &= DO_1 \cos \xi + MD \cos \eta + (y_M(\alpha) - CO_1) = 0, \\ f_2 &= DO_1 \sin \xi + MD \sin \eta - x_M(\alpha) = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Рассмотрим матрицу C , составленную из градиентов голономных связей f_1 и f_2 в выражениях (22), взятых по строкам:

$$C = \begin{pmatrix} -DO_1 \sin \xi & -MD \sin \eta & y'_M(\alpha) \\ DO_1 \cos \xi & MD \cos \eta & -x'_M(\alpha) \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Матрица (23) в общем случае имеет ранг 2.

Утверждение 2. Когда стержни DO_1 и MD становятся параллельными, то $\eta = \xi$ или $\eta = \xi + \pi$. В этом случае столбцы матрицы C

$$\begin{pmatrix} -\sin \xi \\ \cos \xi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\sin \eta \\ \cos \eta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y'_M(\alpha) \\ -x'_M(\alpha) \end{pmatrix} \quad (24)$$

становятся линейно зависимыми.

Доказательство. Действительно, первые два вектора в (24) параллельны и ортогональны радиус-вектору MO_1 при $\eta = \xi$ или $\eta = \xi + \pi$. Кривая $(x_M(\alpha), y_M(\alpha))$ касается окружности радиуса $R_1 = DO_1 + DM$ (внешней) или радиуса $R_2 = DM - DO_1$ (внутренней), так как траектория точки M касается указанных окружностей по построению лямбда-механизма в «парадоксальном» механизме. Тогда вектор $(y'_M(\alpha), -x'_M(\alpha))$ является касательным вектором к одной из окружностей, поэтому вектор $(y'_M(\alpha), -x'_M(\alpha))$ ортогонален радиус-вектору MO_1 . Значит, координаты трех векторов на плоскости в (24) ортогональны вектору MO_1 , поэтому все три вектора являются параллельными. \square

Замечание 7. Так как в особых точках конфигурационного пространства «парадоксального» механизма стержни DO_1 и MD являются параллельными, то в этих положениях ранг матрицы связей C меньше максимального. Вырождение матрицы связей может приводить к неограниченному возрастанию множителей Лагранжа при движении системы к особой точке конфигурационного пространства.

Уравнения движения «парадоксального» механизма (по инерции) являются объединением систем уравнений (12) и (19), к которым добавлены две голономные связи (22). В матричном виде

$$A(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + B(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \lambda_1 \nabla f_1 + \lambda_2 \nabla f_2 = C^T \Lambda, \quad (25)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2a & b \cos(\xi - \eta) & 0 \\ b \cos(\xi - \eta) & 2c & 0 \\ 0 & 0 & J_\lambda(\alpha) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b \sin(\xi - \eta)(\dot{\eta})^2 \\ -b \sin(\xi - \eta)(\dot{\xi})^2 \\ 1/2 J'_\lambda(\alpha)(\dot{\alpha})^2 \end{pmatrix}, \\ \nabla f_1 &= \begin{pmatrix} -DO_1 \sin \xi \\ -MD \sin \eta \\ y'_M(\alpha) \end{pmatrix}, \quad \nabla f_2 = \begin{pmatrix} DO_1 \cos \xi \\ MD \cos \eta \\ -x'_M(\alpha) \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Для получения замкнутой системы уравнений нужно к (25) добавить уравнения связей. При дифференцировании уравнений связей f_1 и f_2 дважды по времени как одно из слагаемых получается матрица G , которая содержит квадраты скоростей обобщенных координат:

$$G = \begin{pmatrix} -DO_1 \cos \xi (\dot{\xi})^2 - MD \cos \eta (\dot{\eta})^2 + y_M'' (\dot{\alpha})^2 \\ -DO_1 \sin \xi (\dot{\xi})^2 - MD \sin \eta (\dot{\eta})^2 - x_M'' (\dot{\alpha})^2 \end{pmatrix}.$$

Силы реакции идеальных голономных связей $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2)^T$ можно выразить из (25) через обобщенные координаты и скорости *вне* особых точек:

$$\Lambda = (CA^{-1}C^T)^{-1}(CA^{-1}B - G). \quad (26)$$

Выражения для множителей Лагранжа (26) формально определены вне особых точек конфигурационного пространства.

7. Моделирование

Согласно анализу «парадоксального» механизма возможны два варианта моделирования. В первом варианте длины всех стержней «парадоксального» механизма (AO , AM , BC , MD и DO_1) находятся по *точным* формулам (7) и (13). Тогда две кривые (16) в конфигурационном пространстве, которым соответствует движение двойного маятника O_1DM всегда по одну сторону от прямой MO_1 , пересекаются в шести особых точках. Гладкое движение механизма происходит при смене типа движения в особых точках: после прохождения особых точек «правый» маятник O_1DM становится «левым» и наоборот. Для моделирования смены знака углов θ_1 и θ_2 используется функция знака $\text{sign}(\alpha)$ для углов (21) по замечанию 4.

Точное моделирование длин всех стержней на практике невозможно. Поэтому второй вариант моделирования соответствует некоторым «погрешностям» в длинах стержней. Далее рассматривается модель, в которой лямбда-механизм построен по «точным» значениям длин стержней, а звено DO_1 в двойном маятнике DO_1M больше «точного» значения на малую величину ε . Выбор такого типа «погрешности» механизма во многом является произвольным, но позволяет найти некоторые свойства модели движения. Новое положение вершины D обозначается как D' . В результате получается «возмущенный» двойной маятник $O_1D'M$ с длиной звена $D'O_1 = DO_1 + \varepsilon$.

Так как звено $D'O_1$ больше «точного» значения DO_1 , то сумма длин стержней MD' и $D'O_1$ больше максимального расстояния MO_1 , поэтому стержни MD и DO_1 не образуют развернутый угол в «парадоксальном» механизме. Аналогично стержни MD' и $D'O_1$ не могут иметь нулевой угол, так как в этом случае разность $MD' - D'O_1$ меньше минимального значения MO_1 . Следовательно, при возмущении звена DO_1 конфигурационное пространство «парадоксального» механизма распадается на две кривые без точек пересечения (особых точек). В этом случае геометрически механизм может двигаться только по одной из двух кривых: Γ_1 или Γ_2 .

Для движения по кривой Γ_1 делается численное моделирование. Кинетическая энергия для лямбда-механизма определяется по формуле (12). Кинетическая энергия двойного маятника определяется по выражениям (18). Углы ξ и η выражаются как функции угла α по формулам (16), при этом получаются зависимости $\xi_{1,2} = \xi_{1,2}(\alpha)$ и $\eta_{1,2} = \eta_{1,2}(\alpha)$. Плотность материала стержней в механизме считается равной 7700 kg/m^3 , длина $BC = 1 \text{ m}$, поперечное сечение стержней составляет $2 \times 1 \text{ cm}^2$.

Уравнение Лагранжа второго рода интегрируется по методу Рунге – Кутта порядка 4 (5) при начальных условиях $\alpha_0 = 0$ рад, $\dot{\alpha}_0 = 1$ рад/с. Движение механизма исследуется на интервале в 10 с, за которые «парадоксальный» механизм делает немного больше полного оборота. После нахождения зависимости $\alpha = \alpha(t)$ определяются соответствующие множители Лагранжа λ_1 и λ_2 по формулам (26). Полученные графики показаны на рис. 6 и 7. При других начальных условиях были получены аналогичные графики для множителей Лагранжа.

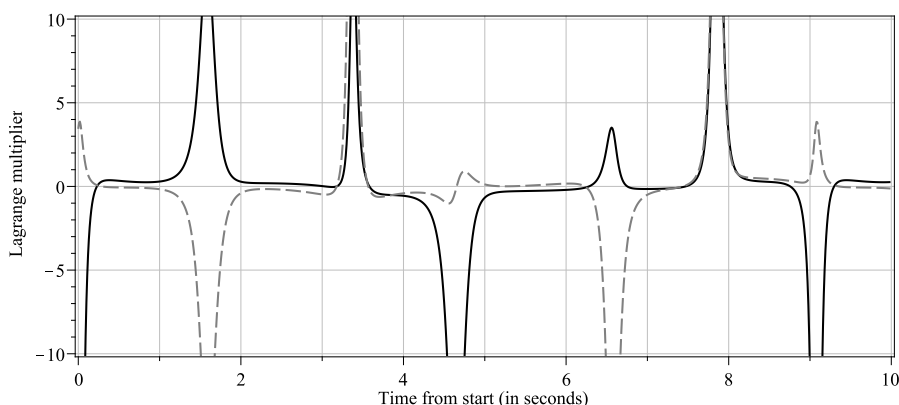


Рис. 6. Множители Лагранжа λ_1 (сплошная линия) и λ_2 (пунктирная линия) для случая движения по инерции по кривой Γ_1 , когда звено DO_1 увеличено на 0.01 м. Реакции меняются плавно, траектория не проходит вблизи особенности

Fig. 6. The Lagrange multipliers λ_1 (solid line) and λ_2 (dotted line) for the case of inertial motion along the Γ_1 curve, when the rod DO_1 is increased by 0.01 m. The reactions change smoothly, the trajectory does not pass near singularity

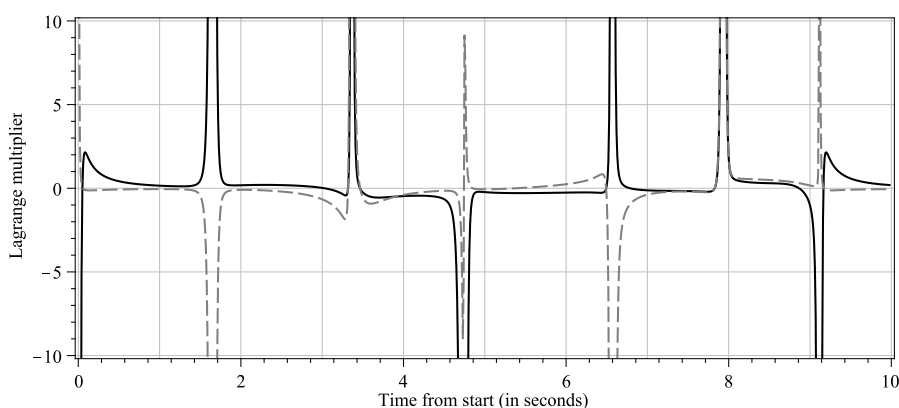


Рис. 7. Множители Лагранжа λ_1 (сплошная линия) и λ_2 (пунктирная линия) для случая движения по инерции по кривой Γ_1 , когда звено DO_1 увеличено на 0.0001 м. Множители Лагранжа имеют значительно большую величину в конфигурациях, которые близки к особым

Fig. 7. The Lagrange multipliers λ_1 (solid line) and λ_2 (dotted line) for the case of inertial motion along the Γ_1 curve, when the DO_1 link is increased by 0.0001 m. Lagrange multipliers have significantly larger values in the configurations which are close to singular

Заключение

В статье рассмотрена кинематика и динамика «парадоксального» механизма П. Л. Чебышёва. Данный шарнирный механизм представлен как объединение двух механических систем: лямбда-механизма и двойного маятника. При таком подходе «парадоксальный» механизм рассматривается как механическая система с тремя степенями свободы и двумя голономными связями. Число степеней свободы механизма в регулярных точках конфигурационного пространства равно 1. Уравнения связей соответствуют совпадению свободных вершин лямбда-механизма и двойного маятника. Записаны уравнения движения для системы со связями и выражения для множителей Лагранжа. Показано, что в конфигурационном пространстве «парадоксального» механизма возникают особые точки, или точки ветвления. Геометрические особенности соответствуют положению механизма, когда стержни двойного



маятника становятся параллельными. Двойной маятник может выйти двумя различными способами (зеркально симметричными) из особых конфигураций, поэтому в особых точках геометрически возникают дополнительные степени свободы. Теоретически показано, что для точных параметров оригинального «парадоксального» механизма в конфигурационном пространстве есть шесть особых точек, которые имеют тип двух пересекающихся кривых. При малом изменении длин стержней происходит перестройка конфигурационного пространства, которое распадается на две непересекающиеся кривые. При малом увеличении длины одного из звеньев двойного маятника его стержни не могут стать параллельными, поэтому двойной маятник в возмущенном «парадоксальном» механизме движется по одну сторону от некоторой прямой. В численном моделировании показано, что для возмущенного «парадоксального» механизма множители Лагранжа значительно возрастают при движении около критических положений механизма.

Список литературы

1. *Чебышёв П. Л.* О простейшей суставочной системе, доставляющей движения, симметричные около оси // Полное собрание сочинений П. Л. Чебышева : в 5 т. Т. 4. Теория механизмов. Москва ; Ленинград : Изд-во АН СССР, 1948. С. 167–211.
2. *Чебышёв П. Л.* Теория механизмов, известных под названием параллелограммов // Успехи математических наук. 1946. Т. 1, вып. 1. С. 12–37.
3. Научное наследие П. Л. Чебышёва. Вып. 2. Теория механизмов / под ред. И. Г. Бруевича, И. И. Артоболевского. Москва ; Ленинград : Изд-во АН СССР, 1945. 192 с.
4. *Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П.* Теоретическая механика. Москва : Юрайт, 2016. 592 с.
5. *Зегжда С. А., Солтаханов Ш. С., Юшков М. П.* Уравнения движения неголономных систем и вариационные принципы механики. Новый класс задач управления. Москва : Физматлит, 2005. 268 с.
6. *Кутеева Г. А.* О кабинете практической механики в Санкт-Петербургском государственном университете // Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки. 2013. № 7. С. 177–185. EDN: [XXEBHV](#)
7. *Самсонов В. А., Михалев А. А.* Перестройка пространства положений механической системы // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2005. № 4. С. 13–16. EDN: [HRVSYR](#)
8. *Закалюкин Г. А.* Динамика балки с двумя коньками и системы неявных дифференциальных уравнений // Труды МАИ. 2011. № 42. С. 1–25.
9. *Борисов А. В., Мамаев И. С., Килин А. А.* О проблеме Адамара – Гамеля и динамике колесных экипажей // Нелинейная динамика. 2016. Т. 12, № 1. С. 145–163. <https://doi.org/10.20537/nd1601009>, EDN: [VTZNOH](#)
10. *Доронин Ф. А., Доев В. С.* Исследование движения плоского механизма с помощью пакета программ Mathcad // Теория механизмов и машин. 2011. Т. 9, № 1. С. 77–87. EDN: [NUZKFV](#)
11. *Burian S. N., Kalnitsky V. S.* On the motion of one-dimensional double pendulum // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 1959, iss. 1. Art. 030004. <https://doi.org/10.1063/1.5034584>
12. *Бурьян С. Н.* Силы реакции сингулярного маятника // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9, № 2. С. 278–293. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.209>, EDN: [GCBILE](#)
13. *Бурьян С. Н.* Особенности динамики прямолинейного движения механизма Дарбу // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63), вып. 4. С. 658–669. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.412>

References

1. Chebyshev P. L. On the simplest articular system that delivers movements that are symmetrical about the axis. In: *Polnoye sobraniye sochineniy P. L. Chebysheva. T. 4. Teoriya mekhanizmov* [Complete works of P. L. Chebyshev. Vol. 4. Theory of mechanisms]. Moscow, Leningrad, Academy of Sciences of the USSR Publ., 1948, pp. 167–211 (in Russian).
2. Chebyshev P. L. Theory of mechanisms known as parallelograms. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 1946, vol. 1, iss. 1, pp. 12–37 (in Russian).
3. Bruevich I. G., Artobolevsky I. I. (eds.) *Nauchnoye naslediyе P. L. Chebyshyeva. Vyp. 2. Teoriya mekhanizmov* [Scientific legacy of P. L. Chebyshev. Iss. 2. Theory of mechanisms]. Moscow, Leningrad, Academy of Sciences of the USSR Publ., 1945. 192 p. (in Russian).



4. Polyakhov N. N., Zegzhda S. A., Yushkov M. P., Tovstik P. E. *Rational and applied mechanics*. Springer Nature, 2021. 520 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-64118-4> (Russ. ed.: Moscow, Yurayt, 2016. 592 p.).
5. Zegzhda S. A., Soltakhanov Sh. S., Yushkov M. P. *Mechanics of non-holonomic systems: A new class of control systems*. Springer Science & Business Media, 2009. 332 p. (Russ. ed.: Moscow, Fizmatlit, 2005. 268 p.).
6. Kuteeva G. A. The Cabinet of applied mechanics in Saint-Petersburg State University. *Mechanics. Scientific Research and Educational Development*, 2013, vol. 7, pp. 177–185 (in Russian). EDN: [XXEBHV](#)
7. Samsonov V. A., Mikhalev A. A. Restructuring of the position space of a mechanical system. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2005, vol. 4, pp. 13–16 (in Russian). EDN: [HRVSYR](#)
8. Zakalyukin I. V. Dynamics of a beam with two sleights via system of implicit differential equations. *Trudy MAI*, 2011, vol. 42, pp. 1–25 (in Russian).
9. Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. On the Hadamard–Hamel problem and the dynamics of wheeled vehicles. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2015, vol. 20, iss. 6, pp. 752–766. <https://doi.org/10.1134/S1560354715060106>
10. Doronin F. A., Doev V. S. Investigation of the movement of a flat mechanism using the Mathcad software package. *Theory of Mechanisms and Machines*, 2011, vol. 9, iss. 1, pp. 77–87 (in Russian). EDN: [NUZKFV](#)
11. Burian S. N., Kalnitsky V. S. On the motion of one-dimensional double pendulum. *AIP Conference Proceedings*, 2018, vol. 1959, iss. 1, art. 030004. <https://doi.org/10.1063/1.5034584>
12. Burian S. N. Reaction forces of a singular pendulum. *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics*, 2022, vol. 55, pp. 192–202. <https://doi.org/10.1134/S1063454122020054>
13. Burian S. N. Specificity of the Darboux mechanism rectilinear motion. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), iss. 4, pp. 658–669 (in Russian). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.412>

Поступила в редакцию / Received 01.04.2023

Принята к публикации / Accepted 15.12.2023

Опубликована / Published 29.11.2024