



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 4. С. 552–566
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 4, pp. 552–566
<https://mmi.sgu.ru> <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-552-566>, EDN: PNYSJH

Научная статья

УДК 539.3

Оптимизация механических свойств вязкоупругих конструкций

А. О. Ватульян¹, О. В. Явруян^{1,2}✉

¹Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета, Россия, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, д. 8а

²Южный математический институт – филиал Владикавказского научного центра РАН, Россия, 362025, г. Владикавказ, ул. Ватулина, д. 53

Ватульян Александр Ованесович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости, aovatulyan@sfnu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0444-4496>, AuthorID: 3469

Явруян Оксана Вячеславовна, доктор физико-математических наук, ¹доцент кафедры теории упругости; ²ведущий научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений, yavruyan@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3443-0837>, AuthorID: 488272

Аннотация. Проведено исследование спектральной задачи об определении оптимального распределения механических свойств произвольного неоднородного тела с учетом затухания в рамках модели линейной вязкоупругости, при которых первая собственная частота максимальна. Учет затухания осуществляется на основе концепции комплексных модулей в рамках модели стандартного вязкоупругого тела. В качестве управляющих функций выступают функции, характеризующие мгновенный и длительный модули. Постановка задачи включает в себя изопериметрические условия, которые накладываются на управляющие функции и определяют их среднее распределение по объему. Построен функционал типа Релея, вариационным образом найдено условие оптимальности, которое состоит в постоянстве условной потенциальной энергии. В качестве модельной задачи рассмотрены задачи о максимизации первой собственной частоты (изгибные и продольные колебания) функционально-градиентного стержня с учетом затухания на основе принципа соответствия. Получены аналитические выражения для законов изменения мгновенного и длительного модулей. Проверено, что задача в предельном случае (при равенстве нулю времени релаксации) сводится к упругому случаю. Для определения оптимального значения первой собственной частоты построено кубическое уравнение, которое решалось численно. Получены асимптотические формулы для определения оптимальной собственной частоты при малых значениях времени релаксации. Проведены расчеты по оценке оптимальности полученного решения. Например, при сравнении со случаем постоянных модулей выигрыш в значении первой собственной частоты составляет около 27% для случая изгиба.

Ключевые слова: оптимизация, первая собственная частота, механические свойства, неоднородность, вязкоупругость, консольная балка, изгибные колебания, продольные колебания

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-11-00265, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/>).

Для цитирования: Ватульян А. О., Явруян О. В. Оптимизация механических свойств вязкоупругих конструкций // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 4. С. 552–566. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-552-566>, EDN: PNYSJH

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Article

Optimisation of mechanical properties of viscoelastic structures

A. O. Vatulyan¹, O. V. Yavruyan^{1,2}✉

¹Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences named after I. I. Vorovich, Southern Federal University, 8a Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia

²Southern Mathematical Institute – the Affiliate of Vladikavkaz Scientific Centre of Russian Academy of Sciences, 53 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia

Alexander O. Vatulyan, aovatulyan@sfnu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0444-4496>, AuthorID: 3469

Oksana V. Yavruyan, yavruyan@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3443-0837>, AuthorID: 488272

Abstract. The spectral problem of determining the optimal distribution of mechanical properties of an arbitrary inhomogeneous body taking into account damping is investigated. The optimisation problem consists in finding the maximum first natural frequency. Damping is taken into account in the framework of the linear viscoelasticity model on the basis of the complex modules concept for the standard viscoelastic body model. The functions characterising the instantaneous and long-time modules are used as control functions. The problem formulation includes isoperimetric conditions that are imposed on the control functions and determine their average volume distribution. A Relye functional is constructed, and the optimality condition, which consists in the constancy of the potential energy, is found in a variational manner. As a model problem the problems of maximisation of the first natural frequency (bending and longitudinal vibrations) of a functionally graded cantilever beam with consideration of damping are considered. Analytical expressions for the laws of variation of the instantaneous and long-range modules are obtained. It is checked that the problem in the limiting case (when the relaxation time is equal to zero) is reduced to the elastic case. To determine the optimal value of the first natural frequency, a cubic equation is constructed and solved numerically. Asymptotic formulae for determining the optimal natural frequency at small values of relaxation time are obtained. Calculations have been carried out to evaluate the optimality of the obtained solution. For example, in comparison with the case of constant modules, the gain in the value of the first natural frequency is about 27% for the case of bending.

Keywords: optimisation, first natural frequency, mechanical properties, inhomogeneity, viscoelasticity, cantilever beam, bending vibrations, longitudinal vibrations

Acknowledgements: The work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-11-00265, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/>).

For citation: Vatulyan A. O., Yavruyan O. V. Optimisation of mechanical properties of viscoelastic structures. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 4, pp. 552–566 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-552-566>, EDN: PNYSJH

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Задачи оптимального проектирования привлекают внимание ученых начиная с середины прошлого века. Интерес к задачам оптимизации конструкции был вызван, в первую очередь, в связи с быстрым развитием авиастроения, космической техники, кораблестроения. На основе оптимального проектирования удалось достичь значительных результатов, позволяющих улучшить механические свойства конструкции, снизить вес и увеличить несущую способность [1]. Среди базовых работ того периода стоит отметить исследования таких ученых, как Н. В. Баничук [1], Н. Ольхофф [2], И. Ф. Ниордсон [3], а также работы [4–7]. На первых порах это были задачи оптимизации геометрических характеристик конструкций, удовлетворяющих рассматриваемому критерию качества, при этом внешние воздействия, условия закрепления границ и внутренняя структура элементов конструкций известны.



Дальнейшее развитие задач оптимального проектирования стало возможным благодаря широкому применению новых современных материалов с улучшенными свойствами — композиционных материалов, материалов с памятью формы, пьезо- и термоупругих материалов, а также в связи с возможностью создания новых функционально-градиентных материалов с заранее заданными свойствами. Именно в этот период интерес ученых обратился к постановкам оптимизационных задач, в которых в качестве управляющих функций выступают характеристики материала и внутренняя структура элементов конструкций.

Возможны различные постановки задач оптимизации свойств материалов, это и задачи устойчивости конструкций, задачи увеличения прочности (жесткости/податливости) конструкций, задачи, связанные с несущей способностью и прочностью конкретного участка конструкции. В отдельный широкий класс выделяются спектральные задачи оптимизации частотных параметров конструкции, среди которых наиболее популярными являются задачи максимизации первой собственной частоты колебаний, максимизации n -й резонансной частоты [5], задачи исключения резонансных частот в интересующем диапазоне частот, задачи максимизации частотных зазоров [8]. Так, в [8] исследована задача максимизации частотных зазоров путем оптимизации формы поперечно колеблющихся упругих балок в рамках модели Бернулли – Эйлера, а также изучено связанное с этим создание периодичности оптимизированных конструкций балок.

Большая часть задач оптимального проектирования выполнена с применением классических методов вариационного исчисления (вариационные принципы, метод сопряженных функций) или методов теории управления (принцип максимума Л. С. Понтрягина [5]).

Применение определенных вариационных методов обусловлено постановкой задачи, характером изопериметрических условий, а также линейностью/нелинейностью дифференциальных операторов, описывающих динамику объекта исследования. В последнем случае часто используются метод возмущений [4, 5], методы линеаризации с последующим построением итерационных последовательностей [3].

К настоящему моменту достаточно подробно исследованы задачи оптимизации первой собственной частоты для упругих балок [9], пластин и оболочек за счет управления формой поперечного сечения.

Так, оптимизация геометрических параметров однородных упругих балок рассмотрена в работах [1–6]. В статье [3] исследована задача оптимизации геометрических параметров консольной балки. Для определения оптимального решения задачи получено нелинейное дифференциальное уравнение, предложена итерационная схема для его решения на основе метода последовательных приближений. Эта работа в дальнейшем легла в основу многих других, в числе которых отметим исследование, где изучены двумерные задачи оптимального управления геометрией пластин и оболочек [4].

Спектральные вариационные задачи, в которых в качестве управляющих функций выступают механические характеристики, рассмотрены в работах [5–10].

Так, в статье [8] получены аналитические решения спектральной задачи о максимизации первой собственной частоты для неоднородной балки с различными способами закрепления на основе вариационного подхода, в качестве управляющих функций выступают упругие характеристики балки.

В работе [10] разработан обобщенный метод расчета консольной балки круглого сечения в условиях изгибных колебаний. Определено, что динамическую жесткость консоли можно увеличить, если основная часть стержня изготовлена из материала с высоким модулем упругости, а часть свободного конца — из материала с низкой плотностью. Следовательно, разработанный метод предназначен для составной балки, состоящей из двух материалов на разных концах.

Задачи оптимального проектирования внутренней структуры неоднородных анизотропных пластин и оболочек изучены в [9]. В работе исследована спектральная задача максимизации первой резонансной частоты, получено оптимальное решение в виде функции от двух пере-



менных, через которое выражены все упругие модули. Вариационная задача решена на основе метода малого физического параметра, в основе которого лежит предположение о слабой неоднородности исследуемых объектов.

Имеются также работы (например, [11]) оптимального проектирования механических характеристик в спектральных задачах, в которых осуществляются гомогенизация внутренней структуры и подбор параметров соответствующей эквивалентной модели с привлечением генетических алгоритмов.

В статье [12] оптимальное проектирование механических свойств сведено к определению ориентации волокон и граничной жесткости многослойной цилиндрической оболочки, которые определяются с помощью эвристических алгоритмов.

Отметим также более современные работы [13–17], связанные с многокритериальной оптимизацией материалов сложной внутренней структуры, сложных периодических структур типа метаматериалов. Проектированию структур с запрещенной резонансной зоной уделяется все больше внимания во многих приложениях по снижению нежелательных уровней вибрации и шума. Однако, как правило, в таких сложных конструкциях получить аналитическое решение не представляется возможным, и оптимизационный поиск сводится к подбору оптимальных характеристик на основе множественных экспериментов (вычислительных и реальных) с привлечением эвристических оптимизационных алгоритмов и метода конечных элементов для проведения расчетов механических полей.

Отметим также ряд работ [18, 19], которые направлены на оптимальную резонансную настройку объекта (расположение, размеры пьезоэлементов) с целью гашения колебаний (виброразгрузка). В [19] предложена конечно-элементная модель объекта, с помощью которой можно проектировать модульные системы управления без подключения экспериментальной базы.

В [20] определены оптимальные настройки ультразвуковой системы, состоящей из двух стержней, между которыми расположен жестко связанный с ними пьезоэлектрический возбудитель колебаний.

Вместе с тем, несмотря на неугасающий интерес к оптимизационным спектральным задачам, задачи, в которых осуществляется учет затухания, практически не исследованы [21].

В настоящей работе рассматривается задача максимизации первой собственной частоты для вязкоупругого неоднородного тела. Оптимизируются механические свойства тела при изопериметрическом условии, представлены примеры для стержневых конструкций.

1. Постановка оптимизационной задачи для произвольного вязкоупругого тела

Рассмотрим оптимизационную задачу максимизации первой резонансной частоты произвольного вязкоупругого неоднородного тела, занимающего объем V и ограниченного кусочно-гладкой поверхностью $S = S_u \cup S_\sigma$.

Вязкоупругие свойства тела учитываются на основе принципа соответствия Вольтерра [22], согласно которому решение вязкоупругой задачи может быть получено из решения соответствующей упругой задачи путем замены упругих модулей на комплексные, характеризующие физико-механические свойства вязкоупругого материала в зависимости от частоты колебаний. Для учета затухания используем следующий вариант представления комплексных модулей:

$$C_{lmjr}^*(x, ik) = C_{lmjr} G(x, ik), \quad C_{lmjr} = E R_{lmjr}, \quad G(x, ik) = \frac{h(x) + ik\tau g(x)}{1 + ik\tau}, \quad (1)$$

где R_{lmjr} — компоненты безразмерного тензора модулей упругости, E — характерный упругий модуль, $g(x)$, $h(x)$ — безразмерные характеристики, описывающие переменные безразмерные мгновенный и длительный модули, n — время релаксации, k — безразмерная частота колебаний $k\tau = \omega n$. При проведении вычислительных экспериментов важно учитывать условие модели $g(x) > h(x)$.

Уравнения движения и однородные граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i &= 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \\ u_i|_{S_u} &= 0, \quad \sigma_{ij}n_j|_{S_\sigma} = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где ρ — плотность среды.

Определяющие соотношения имеют вид

$$\sigma_{lm} = C_{lmjr}^* u_{j,r}.$$

В качестве управляющих функций в оптимизационной задаче выступают функции $h(x)$, $g(x)$, при этом оптимальному распределению характеристик $h_*(x)$, $g_*(x)$ соответствует максимальная первая собственная частота. Управляющие функции выбираются из класса функций, для которых выполняются изопериметрические условия (например, ограничения на их среднее значение)

$$\frac{1}{V} \int_V h(x) dx = h_0, \quad \frac{1}{V} \int_V g(x) dx = g_0. \tag{3}$$

Составим соотношение Релея аналогично упругому случаю [3] для нахождения первой собственной частоты для произвольного вязкоупругого тела. Для этого умножим каждое из уравнений (2) на соответствующую сопряженную функцию \bar{u}_i и проинтегрируем по области V :

$$\omega^2 = \frac{\int_V \sigma_{mj,j} \bar{u}_m dV}{\int_V \rho u_m \bar{u}_m dV} = \frac{\int_V G(x, ik) C_{mjrl} u_{r,l} \bar{u}_{m,j} dV}{\int_V \rho u_m \bar{u}_m dV} \rightarrow \min_{g,h}.$$

Отметим свойство вещественности формы, характеризующей условную потенциальную энергию, которое следует из симметрии соответствующего тензора упругих модулей:

$$2\Pi = C_{mjrl} \bar{\varepsilon}_{mj} \varepsilon_{rl} = C_{mjrl} \bar{u}_{m,j} u_{r,l} = 2\bar{\Pi}.$$

Далее исследование будем проводить для величины k , отличающейся от ω лишь множителем — $k = \omega a \sqrt{\frac{\rho_0}{h_0}}$, a — характерный размер области. Для определения резонансной частоты вязкоупругого тела условно представим k как комплексную величину $k = k_0 + ik_1$, тогда спектральная оптимизационная задача сведется к максимизации ее вещественной и мнимой частей. Введем обозначение

$$K = \frac{1}{2} \int_V \rho u_j \bar{u}_j dV.$$

Изопериметрические условия (3) в рассматриваемой постановке можно трансформировать, разыскивая оптимальное распределение модулей, подчиненных комплексному условию

$$\frac{1}{V} \int_V G(x, ik) dV = \frac{h_0 + ik\tau g_0}{1 + ik\tau}, \tag{4}$$

при этом в предельных случаях имеем

$$\frac{1}{V} \int_V G(x, ik) dx = \begin{cases} h_0, & \tau \rightarrow 0, \\ g_0, & \tau \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Для решения вариационной задачи построим общий функционал, в котором учет изопериметрического условия осуществлен методом множителей Лагранжа [1, 2]:

$$J[g, h, u] = K^{-1} \int_V G(x, ik) \Pi dV - \lambda \frac{1}{V} \int_V G(x, ik) dV. \tag{5}$$

Отметим, что при предельном переходе при $\tau \rightarrow 0$ получаем функционал, соответствующий упругому случаю.



Найдем вариацию функционала (5):

$$\begin{aligned} \delta J[g, h, u] &= \left. \frac{d}{dt} J[g + t\delta g, h + t\delta h, u + t\delta u] \right|_{t=0}, \\ \delta J[g, h, u] &= K^{-1} \int_V \Pi \delta G dV - \lambda \int_V \delta G dV - R, \\ R &= 2K^{-1} \left(\int_V (C_{ijrl} \bar{u}_{i,j} G)_{,l} \delta u_r dV + k^2 \int_V \rho \bar{u}_i \delta u_i dV \right), \\ \delta G &= \frac{\delta h + i\tau k \delta g}{1 + i\tau k}. \end{aligned}$$

Таким образом, оптимальное решение достигается на функциях, удовлетворяющих условию $\delta J[g, h, u] = 0$.

Ввиду независимости вариаций δh , δg , δu_r , приравнивая к нулю коэффициенты при них, имеем уравнения движения и условие $\Pi - \lambda K = 0$, откуда получим условие оптимальности

$$\Pi(x) = C^2 = \text{const}. \quad (6)$$

Например, в случае изгибных колебаний балки, учет затухания в которой осуществляется согласно (1), квадратичная форма, характеризующая условную потенциальную энергию деформации, для балки Бернулли – Эйлера постоянного поперечного сечения $2\Pi = w''\bar{w}'' = \text{const}$ и соответствующие оптимальные решения являются квадратичными. В случае продольных колебаний стержня условия оптимальности, исходя из вида формы для условной потенциальной энергии $2\Pi = u'\bar{u}' = \text{const}$, оптимальные решения линейны.

Рассмотрим модельные задачи и определим оптимальные законы неоднородности.

2. Модельная задача о продольных колебаниях вязкоупругого стержня при различных способах закрепления (Задача 1)

В качестве примера рассмотрим свободные изгибные колебания вязкоупругого неоднородного стержня постоянного поперечного сечения при различных способах закрепления.

Безразмерная краевая задача, описывающая свободные колебания стержня, в общем виде записывается как ($r(x)$ — функция, характеризующая безразмерную плотность)

$$\begin{aligned} (G(x, ik)u')' + k^2 ru &= 0, \\ a_1 u(0) + b_1 G(0, ik)u'(0) &= 0, \\ a_2 u(1) + b_2 G(1, ik)u'(1) &= 0. \end{aligned}$$

При $a_2 = 0$, $b_1 = 0$ имеем случай закрепленного на левом торце стержня (Задача 1а).

При $b_1 = b_2 = 0$ имеем случай закрепленного с обоих торцов стержня (Задача 1б).

Постановку оптимизационной задачи замыкают изопериметрические условия вида (3).

Соотношение Релея для первой собственной частоты запишется в виде

$$k^2 = \frac{\int_0^1 G(x, ik)u'\bar{u}' dx}{\int_0^1 r(x)u\bar{u} dx} \rightarrow \min_{g, h}.$$

Построим основной вариационный функционал, который учитывает изопериметрическое условие в виде (4)

$$J[g, h, u] = \frac{\int_0^1 G(x, ik)u'\bar{u}' dx}{\int_0^1 r(x)u\bar{u} dx} - \lambda \int_0^1 G dx.$$

Учтем вещественность форм $2\Pi = u'\bar{u}' = u_0'^2 + u_1'^2$, $u\bar{u} = u_0^2 + u_1^2$, где $u = u_0 + iu_1$, $K = \frac{1}{2} \int_0^1 r(u_0^2 + u_1^2) dx$, и применим основной вариационный принцип

$$\delta J[g, h, u] = K^{-1} \int_0^1 \delta G (u_0'^2 + u_1'^2) dx - \lambda \int_0^1 \delta G dx +$$

$$+2K^{-1} \left(\int_0^1 G (u'_0 \delta u'_0 + u'_1 \delta u'_1) dx - k^2 \int_0^1 r (u_0 \delta u_0 + u_1 \delta u_1) dx \right) = 0.$$

Выпишем множители перед независимыми вариациями $\delta h(x)$, $\delta g(x)$ и, приравняв их к нулю, получим условие оптимальности:

$$u'^2_0 + u'^2_1 = C^2, \quad C^2 = \lambda K. \tag{7}$$

Из условий равенства нулю множителей перед δu_0 , δu_1 имеем уравнения движения, аналогично упругому случаю, т. е. $(G(x, ik)u')' + k^2ru = 0$.

Из условия оптимальности (7) видно, что собственные функции задачи представлены линейными функциями. Так, в случае Задачи 1а граничные условия имеют вид $u(0) = 0$, $G(1) = 0$ и соответствующее оптимальное смещение имеет вид $u = (1 + iC)x$.

Для определения оптимального модуля $G(x, ik)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение с граничным условием $G(1, ik) = 0$

$$(G(x, ik))' + k^2x = 0,$$

откуда находим $G(x, ik) = \frac{1}{2}k^2(1 - x^2)$.

Таким образом, оптимальные законы распределения длительного и мгновенного модулей имеют вид

$$g(x) = C_1(1 - x^2), \quad h(x) = C_2(1 - x^2).$$

Удовлетворяя изопериметрическому условию (3), получим

$$g_*(x) = \frac{3}{2}g_0(1 - x^2), \quad h_*(x) = \frac{3}{2}h_0(1 - x^2). \tag{8}$$

Для нахождения максимальной первой собственной частоты (вещественной и мнимой частей) получим кубическое уравнение с комплексными коэффициентами:

$$3(i\tau k g_0 + h_0) = k^2(1 + i\tau k). \tag{9}$$

В результате решения (9) получим три комплексных корня, два из которых не удовлетворяют физической постановке задачи, например, в случае $g_0 = 1.75$, $h_0 = 1.333$, $\tau = 0.001$, $k_0 = 2.0$, $k_1 = 0.0006$.

В случае Задачи 1б $u(0) = 0$, $u(1) = 0$, при этом построить непрерывные нетривиальные решения, удовлетворяющие условиям оптимальности, невозможно, поэтому расширим класс искомых функций и представим решение в виде

$$u = \begin{cases} (1 + iC_3)x, & x \in [0, \frac{1}{2}], \\ (1 + iC_3)(1 - x), & x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Оптимальные распределения модулей (при $r(x) = 1$) имеют вид

$$g_*(x) = \begin{cases} 12g_0x^2, & x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 12g_0(x^2 - 2x + \frac{1}{2}), & x \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \quad h_*(x) = \begin{cases} 12h_0x^2, & x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 12h_0(x^2 - 2x + \frac{1}{2}), & x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Максимальная первая собственная частота находится из кубического уравнения

$$6(i\tau k g_0 + h_0) = k^2(1 + i\tau k),$$

например, при $g_0 = 1.75$, $h_0 = 1.333$, $\tau = 0.001$, $k_0 = 2.828429$, $k_1 = 0.00125$.



3. Модельная задача об изгибных колебаниях вязкоупругой балки (Задача 2)

В качестве следующего примера рассмотрим свободные изгибные колебания вязкоупругой консольно закрепленной неоднородной балки (модель Бернулли – Эйлера) постоянного поперечного сечения S с площадью F , моментом инерции I , длиной l и плотностью $r(x)$.

Отметим, что можно сразу использовать условие (6), выписав потенциальную энергию для балки, а можно получить условие оптимальности непосредственно из соответствующей краевой задачи.

Для формулировки безразмерной краевой задачи, учитывающей затухание, используется концепция комплексных модулей, в рамках которой имеем задачу вида

$$\begin{aligned} (G(x, ik)w'')'' - k^2 Arw &= 0, \quad x \in [0, 1], \\ w(0) = w'(0) &= 0, \\ G(1, ik)w''(1) = 0, \quad (G'(x, ik)w''(x))'(1) &= 0, \end{aligned} \tag{10}$$

где $A = \frac{\omega^2 r_0 l^4 F}{h_0 I}$, r_0, h_0 – характерные значения плотности и мгновенного модуля.

Постановку оптимизационной задачи замыкают изопериметрические условия вида (3).

Соотношение Релея для первой собственной частоты и основной функционал запишутся в виде

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{\int_0^1 G(x, ik)w''\bar{w}'' dx}{A \int_0^1 r w \bar{w} dx} \rightarrow \min_{g, h}, \\ J[g, h, w] &= \frac{\int_0^1 G(x, ik)w''\bar{w}'' dx}{A \int_0^1 r(x)w \bar{w} dx} - \lambda \int_0^1 G(x, ik) dx \rightarrow \min_{g, h}. \end{aligned} \tag{11}$$

С учетом вещественности форм $2\Pi = w''\bar{w}'' = w_0''^2 + w_1''^2$, $w\bar{w} = w_0^2 + w_1^2$, где $w = w_0 + iw_1$, $K = \frac{1}{2}A \int_0^1 r(w_0^2 + w_1^2) dx$, имеем

$$\begin{aligned} \delta J[g, h] &= K^{-1} \int_0^1 \delta G(w_0''^2 + w_1''^2) dx - \lambda \int_0^1 \delta G dx + \\ &+ 2K^{-1} \left(\int_0^1 G(w_0''\delta w_0'' + w_1''\delta w_1'') dx - k^2 A \int_0^1 r(w_0\delta w_0 + w_1\delta w_1) dx \right). \end{aligned}$$

Выписав множители перед независимыми вариациями δg , δh и приравняв их к нулю, получим основные соотношения вариационной задачи (при $r(x) = 1$)

$$\begin{aligned} w_0''^2 + w_1''^2 &= C^2, \\ (Gw'')'' - k^2 Aw &= 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Из (12) находим вид собственных функций с учетом граничных условий при $x = 0$:

$$w_* = (1 + iC)x^2. \tag{13}$$

Для удовлетворения условиям на свободном конце консольного стержня примем условия в виде $G(1) = G'(1) = 0$.

Подставив (13) в (12) и решив соответствующее дифференциальное уравнение, найдем оптимальное распределение комплексного модуля. Заметим, что полученная задача при $\tau = 0$ аналогична упругому случаю, когда оптимальное распределение модуля упругости $E_*(x)$ с точностью до постоянного множителя определяется по закону:

$$E_*(x) = f_*(x) = \left(\frac{x^4}{24} - \frac{x}{6} + \frac{1}{8} \right).$$

В случае, когда учитывается затухание, оптимальное решение принимает вид

$$\begin{aligned} G(x, ik) &= k^2 Af_*(x), \\ \alpha_1 g(x) + \alpha_2 h(x) &= k^2 Af_*(x), \\ \alpha_1 &= \frac{1}{1 + ik\tau}, \quad \alpha_2 = \frac{ik\tau}{1 + ik\tau}. \end{aligned}$$

Отсюда найдем законы распределения модулей

$$g(x) = C_1 f_*(x), \quad h(x) = C_2 f_*(x).$$

Удовлетворим изопериметрическим условиям, а также с учетом того, что

$$f_0 = \int_0^1 f_*(x) dx = 1/20,$$

получим $C_1 = g_0/f_0$, $C_2 = h_0/f_0$. Таким образом, оптимальные законы распределения длительного и мгновенного модулей имеют вид

$$g_*(x) = 20g_0 \left(\frac{x^4}{24} - \frac{x}{6} + \frac{1}{8} \right), \quad h_*(x) = 20h_0 \left(\frac{x^4}{24} - \frac{x}{6} + \frac{1}{8} \right). \quad (14)$$

Для нахождения максимальной первой собственной частоты (вещественной и мнимой частей) получим кубическое уравнение с комплексными коэффициентами:

$$i\tau k g_0 + h_0 = k^2 A f_0 (1 + i\tau k). \quad (15)$$

Стоит также отметить, что поведение оптимальных решений (8), (14) на свободном конце консоли $g_*(1) = 0$, $h_*(1) = 0$ может быть подвергнуто критике с практической точки зрения. Однако заметим, что получено аналитическое решение оптимизационной задачи, что не всегда возможно при других граничных условиях. На практике подобное поведение, не отвечающее традиционным условиям, накладываемым на характеристики балки, может быть исправлено за счет «добавления» на свободном конце элемента с постоянными характеристиками.

4. Асимптотический анализ первой собственной частоты для малых τ для Задачи 2

Проведем асимптотический анализ максимальной первой собственной частоты для малых времен релаксации на основе метода возмущений. Для этого k , w и модуль G разложим в ряд по степеням τ :

$$\begin{aligned} k &= k_{(0)} + i\tau k_{(1)} + O(\tau^2), \\ w &= w_{(0)} + i\tau w_{(1)} + O(\tau^2), \\ G &= h + i\tau k_{(0)}(g - h) + O(\tau^2), \\ k^2 &= k_{(0)}^2 + 2i\tau k_{(0)}k_{(1)} + O(\tau^2). \end{aligned} \quad (16)$$

Подставим (16) в исходную краевую задачу (10) и соберем множители перед одинаковыми степенями τ :

$$\tau^0 : \begin{cases} (hw''_{(0)})'' - k_{(0)}^2 Arw_{(0)} = 0, \\ w_{(0)}(0) = w'_{(0)}(0) = 0, \\ h(1)w''_{(0)}(1) = (hw''_{(0)})'(1) = 0, \end{cases} \quad (17)$$



$$\tau^1 : \begin{cases} \left(hw''_{(1)} + k_{(0)}(g-h)w''_{(0)} \right)'' - \left(k_{(0)}^2 w_{(1)} + 2k_{(0)}k_{(1)}w_{(0)} \right) Ar = 0, \\ w_{(1)}(0) = w'_{(1)}(0) = 0, \\ h(1)w''_{(1)}(1) + k_{(0)}(g(1) - h(1))w''_{(0)}(1) = 0, \\ (hw''_{(1)} + k_{(0)}(g-h)w''_{(0)})'(1) = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Заметим, что задача (17) аналогична упругому случаю [7], соответственно, $k_{(0)}^2 = \frac{h_0}{Af_0}$. Для нахождения k_1 дифференциальные уравнения (17) и (18) умножим на $w_{(1)}$ и на $w_{(0)}$ соответственно, вычтем первое из второго и проинтегрируем полученное уравнение по отрезку $x \in [0, 1]$. В результате несложных математических действий можем получить выражение для определения $k_{(1)}$:

$$k_{(1)} = \frac{\int_0^1 (g-h)w_{(0)}''^2 dx}{2A \int_0^1 r(x)w_{(0)}^2 dx},$$

и в случае $r(x) = 1$ находим $k_{(1)} = \frac{g_0 - h_0}{2Af_0}$. Таким образом, получаем асимптотическую формулу для вычисления оптимальной собственной частоты при малых значениях времени релаксации

$$k = \sqrt{\frac{h_0}{Af_0}} + i\tau \frac{g_0 - h_0}{2Af_0} + O(\tau^2). \quad (19)$$

Асимптотическую формулу (19) можно также получить непосредственно из уравнения (15). Для этого представим k в виде ряда по степеням τ (оставим в этот раз слагаемые до третьего порядка малости)

$$k = k_{(0)} + i\tau k_{(1)} + \tau^2 k_{(2)} + O(\tau^3)$$

и подставим в (15). Выпишем множители перед одинаковыми степенями τ :

$$\begin{aligned} \tau^0 : k_{(0)}^2 Af_0 &= h_0, \\ \tau^1 : Af_0(2k_{(1)} + k_{(0)}^2) &= g_0, \\ \tau^2 : Af_0(2k_{(0)}k_{(2)} - k_{(1)}^2 - k_{(0)}^2 k_{(1)}) &= -k_{(1)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Из уравнений (20) найдем $k_{(j)}$, $j = 0, 1, 2$ и получим асимптотическую формулу для расчета k при малых временах релаксации τ , аналогичную (19):

$$k = \sqrt{\frac{h_0}{Af_0}} + i\tau \frac{g_0 - h_0}{2Af_0} + \tau^2 \frac{6g_0h_0 - g_0^2 - 5h_0^2}{8Af_0\sqrt{Af_0h_0}} + O(\tau^3). \quad (21)$$

5. Численные результаты

Согласно предлагаемой схеме проведены расчеты для неоднородной консольной балки с учетом затухания. Результаты приведены в таблице для случая $g_0 = 1.75$, $h_0 = 1.33$ при различных значениях времени релаксации τ , а также для различных законов изменения модулей.

В таблице приняты следующие обозначения: $h_1(x) = 1 + x^2$; верхним индексом звездочкой «*» отмечены результаты расчета максимальной первой собственной частоты, полученной непосредственно из решения уравнения (15); g_* , h_* — оптимальные распределения модулей в каждой из модельных задач соответственно. Верификация результатов была проведена путем сравнения с результатами, полученными в [23]. Как видно из результатов, при оптимальном распределении модулей достигается максимальное значение первой собственной частоты.

При проведении расчетов для решения краевой задачи (11) использовался метод пристрелки и метод Рунге – Кутты. Результаты расчетов показывают, что первая собственная частота может быть увеличена на 27%.



Результаты оптимизационной задачи
Table. Results of the optimisation problem

τ	$h(x)$	$g(x)$	k_0	k_1
Задача 2				
0	$h_1(x)$		3.614	0
0.1	$h_1(x)$	$1.5 + x^3$	3.704	0.268
0.001	$h_1(x)$	$0.795(2 + x^4)$	3.611	0.003
0.01	h_0	g_0	4.060	0.026
0.01	h_*	g_*	5.166	0.042
0.01	h_*	g_*	5.166*	0.042*
0.1	h_*	g_*	5.339	0.342
Задача 1а				
0.01	h_*	g_*	2.0*	0.006*
Задача 1б				
0.01	h_*	g_*	2.829	0.013

На рис. 1 приведены графики оптимальных модулей для каждой из модельных задач. На рис. 2 приведена зависимость оптимальной частоты от времени релаксации для Задачи 2.

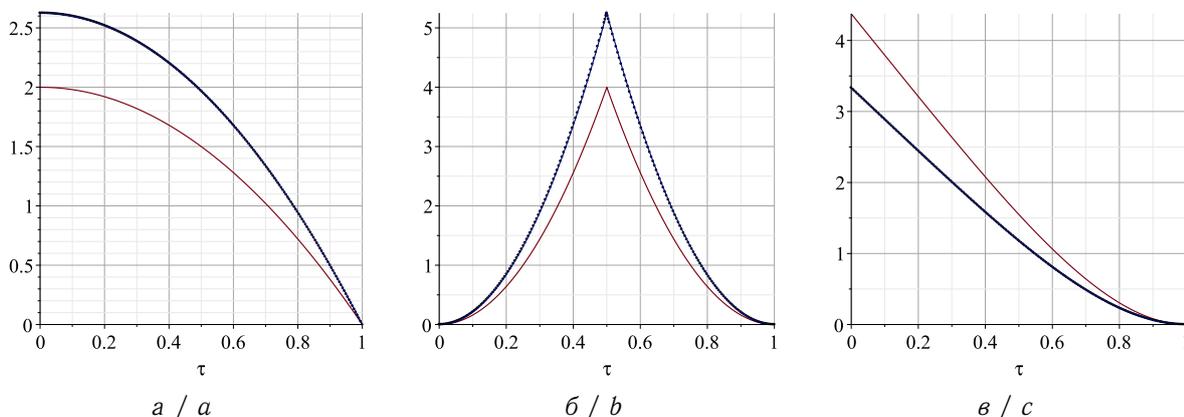


Рис. 1. Графики функций, характеризующих оптимальное распределение длительного (синий) $h(x)$ и мгновенного (красный) $g(x)$ модулей: a — для Задачи 1а; b — для Задачи 1б; c — для Задачи 2 (цвет онлайн)

Fig. 1. Figures of functions characterising the optimal distribution of long (blue) $h(x)$ and instantaneous (red) $g(x)$ modules: a for Problem 1a; b for Problem 1b; c for Problem 2 (color online)

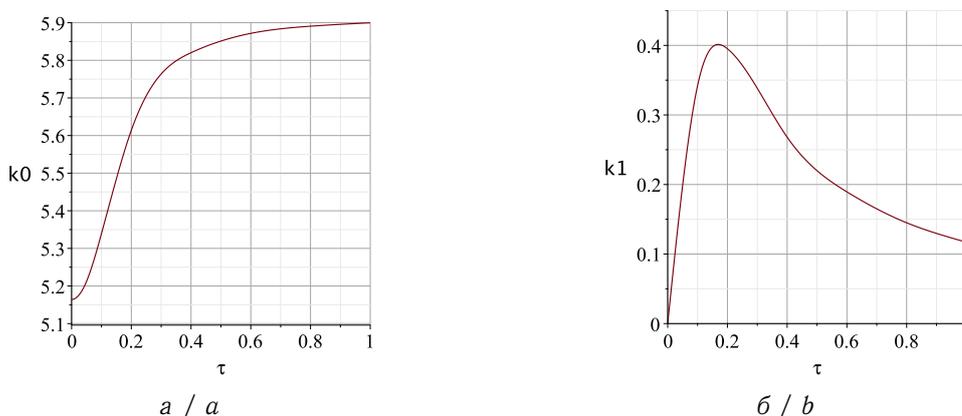


Рис. 2. Графики зависимости вещественной (a) и мнимой (b) частей максимальной частоты k от времени релаксации τ (Задача 2)

Fig. 2. Figures of dependence of real (a) and imaginary (b) parts of the maximal frequency k on the time of relaxation τ (Problem 2)



На рис. 3 приведены результаты, демонстрирующие диапазон применимости асимптотической формулы (21). Как видно из графиков, погрешность асимптотической формулы составляет не более 4% для $\tau < 0.1$.

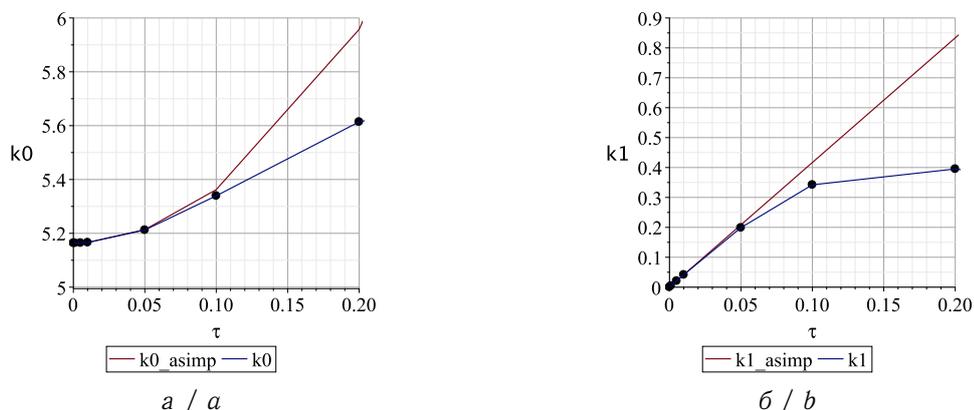


Рис. 3. Графики вещественной (а) и мнимой (б) частей k (цвет онлайн)
 Fig. 3. Figures of real (left) and imaginary (right) parts of k (color online)

Заключение

Проведено исследование спектральной оптимизационной задачи об определении оптимального распределения вязкоупругих модулей произвольного неоднородного тела, при которых первая собственная частота колебаний максимальна. Получено общее условие оптимальности для произвольного тела с учетом затухания. Рассмотрены модельные задачи о продольных и изгибных колебаниях вязкоупругой балки. Построены необходимые функционалы, из вариационного подхода найдены условия оптимальности, которые характеризуются постоянством энергии деформаций. Получены аналитические выражения для законов изменения мгновенного и длительного модулей. Для определения оптимального значения первой собственной частоты сформулировано кубическое уравнение с комплексными коэффициентами.

Получена асимптотическая формула для оптимальной собственной частоты для малых значений времен релаксации.

Сделана серия расчетов, проведено сравнение с асимптотическим подходом. При сравнении с однородным случаем выигрыш в значении первой собственной частоты при изгибных колебаниях консольной балки составляет 27%.

Список литературы

1. Баничук Н. В. Оптимизация форм упругих тел. Москва : Наука, 1980. 256 с.
2. Ольхофф Н. Оптимальное проектирование конструкций. Москва : Мир, 1981. 278 с. (Механика. Новое в зарубежной науке. Вып. 27).
3. Niordson I. F. On the optimal design of a vibrating beam // Quarterly of Applied Mathematics. 1965. Vol. 23. P. 47–53. <https://doi.org/10.1090/qam/175392>
4. Братусь А. С., Картелишвили В. М. Приближенные аналитические решения в задачах оптимизации устойчивости и частот колебаний упругих тонкостенных конструкций // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1981. № 6. С. 119–139. EDN: ZVYSTR
5. Sarkisyan V. S., Gukasyan G. M., Grigoryan A. A. Optimal design of a circular plate with rectilinear anisotropy // Journal of Mathematical Sciences. 2001. Vol. 104, iss. 5. P. 1569–1574. <https://doi.org/10.1023/A:1011300122949>
6. Bratus' A. S., Posvyanskii V. P. The optimum shape of a bending beam // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2000. Vol. 64, iss. 6. P. 993–1004. [https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(00\)00131-3](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(00)00131-3)



7. *Гринев В. Б., Филиппов А. П.* Оптимизация элементов конструкций по механическим характеристикам. Киев : Наукова думка, 1975. 290 с.
8. *Gupta V. K., Murthy P. N.* Optimal design of uniform non-homogeneous vibrating beams // Journal of Sound and Vibration. 1978. Vol. 59, iss. 4. P. 521–531. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(78\)80132-1](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(78)80132-1)
9. *Саркисян В. С., Джулакян Г. М.* Оптимизация первой собственной частоты колебания прямоугольной пластинки со слабой неоднородностью // Механика: межвузовский сборник научных трудов. Ереван : Изд-во Ереванского ун-та, 1984. Вып. 3. С. 120–125.
10. *Liao Y. S.* A generalized method for the optimal design of beams under flexural vibration // Journal of Sound and Vibration. 1993. Vol. 167, iss. 2. P. 193–202. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1993.1329>
11. *Belardi V. G., Trupiano S., Fanelli P., Vivio F.* Overall elastic characterization of equivalent FE models for aluminum foams through computational homogenization approach and genetic algorithm optimization // European Journal of Mechanics – A/Solids. 2024. Vol. 103. Art. 105189. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2023.105189>
12. *Chen Y., Wang Q., Zhong R., Shi X., Qin B.* Fiber orientation and boundary stiffness optimization of laminated cylindrical shells with elastic boundary for maximum the fundamental frequency by an improved sparrow search algorithm // Thin-Walled Structures. 2023. Vol. 193. Art. 111299. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2023.111299>
13. *Yan G., Li Yi., Huang Xi., Yao S., Zhou W.* Multi-objective optimization of elastic metaplates for lightweight and ultrawide bandgaps // International Journal of Mechanical Sciences. 2023. Vol. 259. Art. 108603. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2023.108603>
14. *Hedayatrasa S., Abhary K., Uddin M., Ng Ch.-T.* Optimum design of phononic crystal perforated plate structures for widest bandgap of fundamental guided wave modes and maximized in-plane stiffness // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2016. Vol. 89. P. 31–58. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2016.01.010>
15. *Niu B., Yan J., Cheng G.* Optimum structure with homogeneous optimum cellular material for maximum fundamental frequency // Structural and Multidisciplinary Optimization. 2009. Vol. 39, iss. 2. P. 115–132. <https://doi.org/10.1007/s00158-008-0334-4>
16. *Ni X. H., Teng X. C., Jiang W., Zhang Y., Ren X.* Multi-objective optimization and theoretical analysis of re-entrant structure with enhanced mechanical properties // Thin-Walled Structures. 2024. Vol. 199. Art. 111791. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2024.111791>
17. *Thomes R. L., Mosquera-Sánchez J. A., De Marqui C.* Bandgap widening by optimized disorder in one-dimensional locally resonant piezoelectric metamaterials // Journal of Sound and Vibration. 2021. Vol. 512. Art. 116369. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116369>
18. *Федотов А. В., Беляев А. К., Полянский В. А.* Численное исследование эффективности метода модальных фильтров и метода наблюдателей при реализации модального управления колебаниями упругих систем // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2023. Т. 16, № 3. С. 160–176. <https://doi.org/10.18721/JPM.16313>
19. *Федотов А. В.* Применимость упрощенных моделей пьезоэлементов в задаче активного гашения колебаний // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2020. Т. 63, № 2. С. 126–132. <https://doi.org/10.17586/0021-3454-2020-63-2-126-132>
20. *Асташев В. К., Пичугин К. А.* Резонансная настройка стержневой системы с пьезоэлектрическим возбудителем колебаний // Вестник научно-технического развития. 2017. № 9 (121). С. 2–8.
21. *Мацевич Т. А., Кирьянова Л. В., Смирнов В. А., Иванов П. С.* Оптимизация параметров вязкоупругой модели элементов конструкций из композитных материалов на основе экспериментальных данных // Жилищное строительство. 2023. № 11. С. 32–36. <https://doi.org/10.31659/0044-4472-2023-11-32-36>
22. *Кристенсен Р. М.* Введение в механику композитов. Москва : Мир, 1982. 336 с.
23. *Ватульян А. О., Варченко А. А.* Исследование колебаний балки из функционально-градиентного материала с учетом затухания // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. 2021. Т. 212, № 4. С. 10–18. <https://doi.org/10.18522/1026-2237-2021-4-10-18>



References

1. Banichuk N. V. *Optimizatsiya form uprugikh tel* [Optimization of elastic body shapes]. Moscow, Nauka, 1980. 256 p. (in Russian).
2. Ol'hoff N. *Optimal'noe proektirovanie konstruktsiy* [Optimal design of structures]. Moscow, Mir, 1981. 278 p. (in Russian).
3. Niordson I. F. On the optimal design of a vibrating beam. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1965, vol. 23, pp. 47–53. <https://doi.org/10.1090/qam/175392>
4. Bratus' A. S., Kartelishvili V. M. Approximate analytical solutions in problems of optimization of stability and vibration frequencies of elastic thin-walled structures. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1981, iss. 6, pp. 119–139 (in Russian). EDN: ZVYSTR
5. Sarkisyan V. S., Gukasyan G. M., Grigoryan A. A. Optimal design of a circular plate with rectilinear anisotropy. *Journal of Mathematical Sciences*, 2001, vol. 104, iss. 5, pp. 1569–1574. <https://doi.org/10.1023/A:1011300122949>
6. Bratus' A. S., Posvyanskii V. P. The optimum shape of a bending beam. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2000, vol. 64, iss. 6, pp. 993–1004. [https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(00\)00131-3](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(00)00131-3)
7. Grinev V. B., Filippov A. P. *Optimizatsiya elementov konstruktsiy po mekhanicheskim kharakteristikam* [Optimization of structural elements by mechanical characteristics]. Kiev, Naukova dumka, 1975. 290 p. (in Russian).
8. Gupta V. K., Murthy P. N. Optimal design of uniform non-homogeneous vibrating beams. *Journal of Sound and Vibration*, 1978, vol. 59, iss. 4, pp. 521–531. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(78\)80132-1](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(78)80132-1)
9. Sarkisyan B. C., Dzhulakyan G. M. Optimization of the first natural frequency of oscillation of a rectangular plate with weak inhomogeneity. *Mekhanika: mezhvuzovskiy sbornik nauchnykh trudov* [Mechanics: Interuniversity collection of scientific papers]. Erevan, Erevan State University Publ., 1984, iss. 3, pp. 120–125 (in Russian).
10. Liao Y. S. A generalized method for the optimal design of beams under flexural vibration. *Journal of Sound and Vibration*, 1993, vol. 167, iss. 2, pp. 193–202. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1993.1329>
11. Belardi V. G., Trupiano S., Fanelli P., Vivio F. Overall elastic characterization of equivalent FE models for aluminum foams through computational homogenization approach and genetic algorithm optimization. *European Journal of Mechanics – A/Solids*, 2024, vol. 103, art. 105189. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2023.105189>
12. Chen Y., Wang Q., Zhong R., Shi X., Qin B. Fiber orientation and boundary stiffness optimization of laminated cylindrical shells with elastic boundary for maximum the fundamental frequency by an improved sparrow search algorithm. *Thin-Walled Structures*, 2023, vol. 193, art. 111299. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2023.111299>
13. Yan G., Li Yi., Huang Xi., Yao S, Zhou W. Multi-objective optimization of elastic metaplates for lightweight and ultrawide bandgaps. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2023, vol. 259, art. 108603. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2023.108603>
14. Hedayatrasa S., Abhary K., Uddin M., Ng Ch.-T. Optimum design of phononic crystal perforated plate structures for widest bandgap of fundamental guided wave modes and maximized in-plane stiffness. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2016, vol. 89, pp. 31–58. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2016.01.010>
15. Niu B., Yan J., Cheng G. Optimum structure with homogeneous optimum cellular material for maximum fundamental frequency. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2009, vol. 39, iss. 2, pp. 115–132. <https://doi.org/10.1007/s00158-008-0334-4>
16. Ni X., Teng X. C., Jiang W., Zhang Y., Ren X. Multi-objective optimization and theoretical analysis of re-entrant structure with enhanced mechanical properties. *Thin-Walled Structures*, 2024, vol. 199, art. 111791. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2024.111791>
17. Thomes R. L., Mosquera-Sánchez J. A., De Marqui C. Bandgap widening by optimized disorder in one-dimensional locally resonant piezoelectric metamaterials. *Journal of Sound and Vibration*, 2021, vol. 512, art. 116369. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116369>



18. Fedotov A. V., Belyaev A. K., Polyanskij V. A. Numerical study of the efficiency of modal filter method and observer method for implementation of modal control of vibrations of elastic systems. *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics*, 2023, vol. 16, iss. 3, pp. 160–176 (in Russian). <https://doi.org/10.18721/JPM.16313>
19. Fedotov A. V. Applicability of simplified models of piezoelectric elements in the problem of active vibration damping. *Journal of Instrument Engineering*, 2020, vol. 63, iss. 2, pp. 126–132 (in Russian). <https://doi.org/10.17586/0021-3454-2020-63-2-126-132>
20. Astashev V. K., Pichugin K. A. Resonant tuning of bar system with the piezoelectric exciter of oscillation. *Bulletin of Science and Technical Development*, 2017, vol. 9 (121), pp. 2–8 (in Russian).
21. Maceevich T. A., Kir'yanova L. V., Smirnov V. A., Ivanov P. S. Optimization of parameters of a viscoelastic model of elements of structures made from composite materials based on experimental data. *Zhilishchnoe Stroitel'stvo* [Housing Construction], 2023, vol. 11, pp. 32–36 (in Russian). <https://doi.org/10.31659/0044-4472-2023-11-32-36>
22. Kristensen R. M. *Mechanics of composite materials*. New York, Wiley, 1979. 348 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1982. 336 p.).
23. Vatul'yan A. O., Varchenko A. A. Investigation of vibrations of a beam made of a functionally graded material taking into account attenuation. *Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science*, 2021, vol. 212, iss. 4, pp. 10–18 (in Russian). <https://doi.org/10.18522/1026-2237-2021-4-10-18>

Поступила в редакцию / Received 10.05.2024

Принята к публикации / Accepted 13.06.2024

Опубликована / Published 29.11.2024