



Научная статья

УДК 517.9:539.3:532.5

Исследование математической модели системы измерения давления в авиационных двигателях

П. А. Вельмисов[✉], А. В. Анкилов, Ю. В. Покладова

Ульяновский государственный технический университет, Россия, 432027, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32

Вельмисов Петр Александрович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, velmisov@ulstu.ru, <https://orcid.org/0000-0001-7825-7015>, AuthorID: 7922

Анкилов Андрей Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, ankil@ulstu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-5946-8535>, AuthorID: 16512

Покладова Юлия Валерьевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, pokladovau@inbox.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9876-4038>, AuthorID: 606694

Аннотация. В работе исследуется механическая система, состоящая из трубопровода с камерой сгорания авиационного двигателя на одном конце и с датчиком, предназначенным для измерения давления в камере сгорания, на другом конце. Чувствительным элементом датчика, передающим информацию о давлении, является упругая пластина. Предложена математическая модель системы измерения давления с учетом передачи теплового потока по трубопроводу с рабочей средой (газом или жидкостью) от двигателя к упругому элементу. Для описания колебаний чувствительного элемента датчика рассмотрена линейная модель твердого деформируемого тела, учитывающая распределение температуры по толщине упругого элемента. С помощью метода малого параметра получена связанная система асимптотических дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая совместную динамику газожидкостной среды в трубопроводе и упругого чувствительного элемента датчика давления. Исследовались случаи шарнирного и жесткого закрепления концов чувствительного элемента. На основе метода Бубнова – Галёркина задача сведена к исследованию связанной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. С помощью системы компьютерной алгебры Mathematica 12.0 произведены численные эксперименты для конкретных параметров механической системы.

Ключевые слова: аэрогидроупругость, трубопровод, упругий элемент, датчик давления, дифференциальные уравнения, метод Бубнова – Галёркина

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00517).

Для цитирования: Вельмисов П. А., Анкилов А. В., Покладова Ю. В. Исследование математической модели системы измерения давления в авиационных двигателях // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 4. С. 567–577. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-567-577>, EDN: TTEUАН

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Investigation of mathematical model of pressure measurement system in aircraft engines

Р. А. Velmisov[✉], А. V. Ankilov, Yu. V. Pokladova

Ulyanovsk State Technical University, 32 Severny Venets St., Ulyanovsk 432027, Russia

Petr A. Velmisov, velmisov@ulstu.ru, <https://orcid.org/0000-0001-7825-7015>, AuthorID: 7922

Andrey V. Ankilov, ankil@ulstu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-5946-8535>, AuthorID: 16512



Yuliya V. Pokladova, pokladovau@inbox.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9876-4038>, AuthorID: 606694

Abstract. A mechanical system consisting of a pipeline connected at one end to the combustion chamber of an aircraft engine, and with a sensor designed to measure the pressure in the combustion chamber at the other end is investigated in the work. The sensitive element of the sensor, which transmits information about pressure, is an elastic plate. A mathematical model of a pressure measurement system, taking into account the transfer of heat flow through a pipeline with a working medium (gas or liquid) from the engine to the elastic element, is proposed. To describe the vibrations of the sensitive element of the sensor, a linear model of a solid deformable body is considered, taking into account the temperature distribution over the thickness of the elastic element. Using the small parameter method, a coupled system of asymptotic partial differential equations was obtained that describes the joint dynamics of the gas-liquid medium in the pipeline and the elastic sensitive element of the pressure sensor. The cases of hinged and rigid fastening of the ends of the sensing element were studied. Based on the Bubnov – Galerkin method, the problem is reduced to the study of a coupled system of ordinary differential equations. Using the computer algebra system *Mathematica 12.0*, numerical experiments were carried out for specific parameters of the mechanical system.

Keywords: aeroelastocity, pipeline, elastic element, pressure sensor, differential equations, Bubnov – Galerkin method

Acknowledgements: The work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 23-21-00517).

For citation: Velmisov P. A., Ankilov A. V., Pokladova Yu. V. Investigation of mathematical model of pressure measurement system in aircraft engines. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 4, pp. 567–577 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-567-577>, EDN: TTEUAH

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

При проектировании приборов, взаимодействующих с газожидкостной средой, особое значение имеет анализ динамики и устойчивости их деформируемых элементов [1–15]. При конструировании датчиков давления рабочих сред необходимо учитывать, что тепловое и аэрогидродинамическое воздействия могут повышать амплитуду и частоту колебаний упругих элементов до критических значений, не позволяющих обеспечивать необходимую точность их работы. Практическим и теоретическим вопросам проектирования датчиков давления газожидкостных сред посвящено много научных работ, в частности, отметим [11–14, 16–21]. Научные исследования [11–17, 20, 21] посвящены описанию принципов работы датчиков давления и определению их технических характеристик. В [11, 12, 18] приводятся основные принципы проектирования датчиков давления.

Агрессивное воздействие на чувствительный элемент датчика давления высоких температур и повышенных уровней виброускорений, проявляющихся при некоторых режимах работы двигателя, является основной проблемой при проектировании, конструировании и эксплуатации датчиков давления газожидкостных сред в авиационных и ракетных двигателях. Такие эксплуатационные условия ведут к завышенной погрешности измерений и к преждевременному разрушению упругого чувствительного элемента датчика. Одним из основных направлений решения этой проблемы является оптимальное проектирование механической системы «трубопровод – датчик давления». При проектировании датчик с помощью трубопровода отводится на расстояние от камеры сгорания двигателя, что позволяет ослабить агрессивное воздействие на него температур и виброускорений. Такие математические модели, в которых датчик расположен на конце отводного трубопровода, исследовались в работах авторов [6–9].



1. Постановка задачи

Исследуется математическая модель системы, состоящей из трубопровода и датчика давления и учитывающей, в отличие от [8], передачу теплового потока по трубопроводу с газожидкостной средой от авиационного двигателя к датчику, измеряющему давление этой среды. Поле скоростей газожидкостной среды в трубопроводе считается плоским (рис. 1). На конце трубопровода, закрепленном на выходе из камеры сгорания двигателя, задан закон изменения давления рабочей среды. На другом конце трубопровода закреплен датчик, предназначенный для измерения этого давления. Чувствительным элементом датчика является упругая пластина.

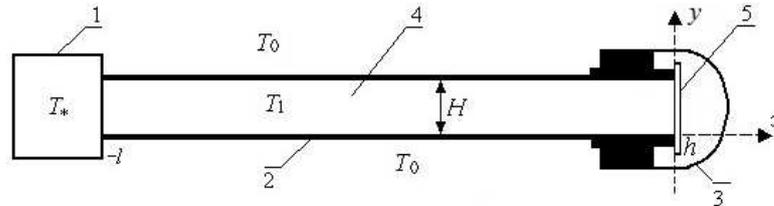


Рис. 1. Трубопровод, соединяющий двигатель с датчиком давления
Fig. 1. Pipe, connecting the engine to the pressure sensor

На рис. 1 введены следующие обозначения: l, H — длина и ширина трубопровода соответственно; h — толщина упругого чувствительного элемента; $T_1(x, t)$ — функция, описывающая закон изменения температуры газожидкостной среды внутри трубопровода; T_0 — постоянная температура окружающей трубопровод среды ($T_0 = \text{const}$); $T_*(t)$ — функция, описывающая закон изменения температуры на выходе из камеры сгорания двигателя (на входе в трубопровод); 1 — камера сгорания двигателя; 2 — трубопровод; 3 — датчик давления; 4 — газожидкостная среда в трубопроводе; 5 — чувствительный элемент датчика (упругая пластина).

Введем обозначения: $\Phi(x, y, t)$ — потенциал скорости газожидкостной среды; $P(x, y, t)$ — функция, описывающая давление в этой среде; $w(y, t)$ — функция, описывающая деформацию чувствительного элемента датчика; $T_2(x, t)$ — закон изменения температуры по толщине элемента; $F(y, t)$ — закон изменения давления рабочей среды на выходе из камеры сгорания (на входе в трубопровод). Уравнение $g(x, y, t) = 0$ описывает поверхность элемента. Тогда в модели несжимаемой среды математическая постановка задачи примет вид

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0, \quad x \in (-l, 0), \quad y \in (0, H), \quad (1)$$

$$\Phi_x g_x + \Phi_y g_y = -gt, \quad g(x, y, t) = 0, \quad y \in (0, H), \quad (2)$$

$$m\ddot{w} + Dw'''' + N(t)w'' + \gamma w = P - \bar{P}, \quad g(x, y, t) = 0, \quad y \in (0, H), \quad (3)$$

$$P = P_0 - \rho \left(\Phi_t + \frac{1}{2} \Phi_x^2 + \frac{1}{2} \Phi_y^2 \right), \quad x \in (-l, 0), \quad y \in (0, H), \quad (4)$$

$$P(-l, y, t) = F(y, t), \quad y \in (0, H), \quad (5)$$

$$\rho c_1 T_{1t} = k_1 T_{1xx} - \beta_1 (T_1 - T_0), \quad x \in (-l, 0), \quad (6)$$

$$T_1(-l, t) = T_*(t), \quad (7)$$

$$T_{1x}(0, t) = 0, \quad (8)$$

$$\rho_0 c_2 T_{2t} = k_2 T_{2xx}, \quad x \in (0, h), \quad (9)$$

$$T_{2x}(h, t) = 0, \quad (10)$$

$$-k_2 T_{2x}(0, t) = \alpha_0 (T_1 - T_2)|_{x=0}, \quad (11)$$

$$N(t) = N_0 + \frac{E\alpha_T}{1-\nu} \int_0^h T_2(x, t) dx. \quad (12)$$



Штрих и точка обозначают частные производные по координате y и времени t , а индексы x, y, t снизу – частные производные по координатам x, y и времени t . Коэффициенты системы: \bar{P} – распределенная внешняя нагрузка, действующая на элемент; P_0 – давление в покоящейся газожидкостной среде, ρ – плотность этой среды; ρ_0, E, ν, m, D – плотность, модуль упругости, коэффициент Пуассона, погонная масса и изгибная жесткость пластины (упругого элемента); $N(t)$ – сжимающее (растягивающее) пластину усилие, вычисляемое по формуле (12); N_0 – постоянная составляющая усилия, созданная при закреплении пластины; γ – коэффициент жесткости слоя обжатия пластины (основания); α_T – температурный коэффициент линейного расширения; k_1, k_2 – коэффициенты теплопроводности среды и материала пластины соответственно; c_1, c_2 – коэффициенты теплоемкости среды и пластины; α_0, β_1 – коэффициенты теплообмена между рабочей средой и пластиной и между поверхностью трубопровода и окружающей средой.

Уравнение Лапласа (1) описывает движение несжимаемой среды в трубопроводе; граничное условие (2) задает закон непротекания газожидкостной среды через поверхность элемента; уравнение (3) описывает динамику упругого элемента; давление в рабочей среде (4) определяется интегралом Лагранжа – Коши; условие (5) задает закон равенства давлений на входе в трубопровод и на выходе из камеры сгорания двигателя; уравнения (6), (9) описывают закон распределения температуры по длине трубопровода и по толщине пластины соответственно; условие (7) задает закон изменения температуры на выходе из двигателя; условие (8) означает, что тепловой поток, проникающий через левую границу пластины $x = 0$, пренебрежимо мал вследствие малости толщины пластины и наличия вакуума справа от нее; (10) условия теплоизоляции внешней стороны пластины, справа от которой находится вакуум; (11) условие теплообмена между пластиной и рабочей средой в полости датчика.

2. Метод малого параметра

Произведем разложение функций $\Phi(x, y, t), g(x, y, t), w(y, t), F(y, t)$ по малому параметру ε :

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, t) &= \varepsilon\varphi(x, y, t) + \dots, & g(x, y, t) &= x - w_0(y) - \varepsilon w_1(y, t) - \dots, \\ w(y, t) &= w_0(y) + \varepsilon w_1(y, t) + \dots, & F(y, t) &= P_0 + \varepsilon P_*(y, t) + \dots \end{aligned} \quad (13)$$

В силу малости температурного коэффициента линейного расширения материала пластины считаем его порядка ε :

$$\alpha_T = \varepsilon\alpha_{T1} + \dots \quad (14)$$

Подставим разложения (13) в систему (1)–(4), а разложение (14) в коэффициент (12) и ограничимся членами порядка ε . Тогда получим математическую модель задачи в первом асимптотическом приближении:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad x \in (-l, 0), \quad y \in (0, H), \quad (15)$$

$$Dw_0'''' + N_0w_0'' + \gamma w_0 = P_0 - \bar{P}, \quad y \in (0, H), \quad (16)$$

$$m\ddot{w}_1 + Dw_1'''' + N_1(t)w_0'' + N_0w_1'' + \gamma w_1 = -\rho\varphi_t(w_0(y), y, t), \quad y \in (0, H), \quad (17)$$

$$\varphi_x(w_0(y), y, t) - \varphi_y(w_0(y), y, t)w_0'(y) = \dot{w}_1(y, t), \quad y \in (0, H), \quad (18)$$

$$-\rho\varphi_t(-l, y, t) = P_*(y, t), \quad y \in (0, H), \quad (19)$$

где $P_*(y, t)$ – функция, описывающая избыточное давление на входе в трубопровод (в сечении $x = -l$), а коэффициент

$$N_1(t) = \frac{E\alpha_{T1}}{1-\nu} \int_0^h T_2(z, t) dz. \quad (20)$$



3. Метод Бубнова – Галёркина

Предположим, что выполняется условие $P_*(y, t) = P_*(t)$. Для того чтобы потенциал скорости $\varphi(x, y, t)$ удовлетворял уравнению (15) и условию (19), возьмем его в виде разложения

$$\varphi(x, y, t) = -\frac{1}{\rho} \int_0^t P_*(z) dz + (x + l)\alpha(t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \cos \lambda_n y \cdot \text{sh } \lambda_n(x + l), \quad (21)$$

где $\lambda_n = \frac{n\pi}{H}$.

Считаем, что концы упругого элемента закреплены либо жестко, либо шарнирно. При шарнирном закреплении должны выполняться условия

$$w_0(0) = w_0''(0) = w_0(H) = w_0''(H) = w_1(0, t) = w_1''(0, t) = w_1(H, t) = w_1''(H, t) = 0, \quad (22)$$

а при жестком закреплении –

$$w_0(0) = w_0'(0) = w_0(H) = w_0'(H) = w_1(0, t) = w_1'(0, t) = w_1(H, t) = w_1'(H, t) = 0. \quad (23)$$

В случае отсутствия постоянной составляющей усилия $N_0 = 0$ и отсутствия обжимного слоя $\gamma = 0$ функция $w_0(y)$, удовлетворяющая уравнению (16), для граничных условий (22) примет вид

$$w_0(y) = \frac{P_0 - \bar{P}}{24D} (y^4 - 2Hy^3 + H^3y),$$

а для граничных условий (23) –

$$w_0(y) = \frac{P_0 - \bar{P}}{24D} (y^4 - 2Hy^3 + H^3y^2).$$

Согласно методу Бубнова – Галёркина решение уравнения (17) ищется в виде

$$w_1(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_{1n}(t) \xi_n(y), \quad (24)$$

где $\xi_n(y)$ – полная система базисных функций, подобранных так, чтобы выполнялись условия (22) для шарнирного закреплении и (23) для жесткого закреплении, а функции $w_{1n}(t)$ определяются из условия ортогональности невязки уравнения (17) к системе поверочных функций $\{h_n(y)\}$. В качестве поверочных функций для вывода системы обыкновенных дифференциальных уравнений возьмем базисные.

Базисные функции, являющиеся решением уравнения $\xi_n^{IV}(y) = \gamma^4 \xi_n(y)$, примут вид

$$\xi_n(y) = A_n \cos \gamma_n y + B_n \sin \gamma_n y + C_n \text{ch } \gamma_n y + D_n \text{sh } \gamma_n y, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Чтобы функция $w_1(y, t)$ в виде (24) удовлетворяла условиям (22) или (23), найдены коэффициенты A_n, B_n, C_n, D_n и параметр γ_n . Для случая шарнирного закреплении получим

$$\xi_n(y) = \sin \gamma_n y, \quad \gamma_n = \frac{n\pi}{H}, \quad (25)$$

а для случая жесткого закреплении –

$$\xi_n(y) = \text{ch}(\gamma_n y) - \cos(\gamma_n y) - \frac{\text{ch}(\gamma_n H) - \cos(\gamma_n H)}{\text{sh}(\gamma_n H) - \sin(\gamma_n H)} (\text{sh}(\gamma_n y) - \sin(\gamma_n y)), \quad (26)$$

где γ_n находятся как корни уравнения $\text{ch}(\gamma_n H) \cos(\gamma_n H) = 1$.

Системы функций в виде (25), (26) ортогональны на $[0, H]$, т. е. справедливы равенства

$$\int_0^H \xi_k(y)\xi_j(y) dy = 0, \quad \int_0^H \xi_k(y)\xi_j^{IV}(y) dy = 0, \quad k \neq j. \tag{27}$$

Подставляя (21), (24) в (17) и проецируя это уравнение на систему функций $\{\xi_n(y)\}_{n=1}^\infty$, а условие (18) на систему функций $\{\cos \lambda_n y\}_{n=0}^\infty$, с учетом (27) согласно методу Бубнова – Галёркина получим

$$\begin{aligned} & (m\ddot{w}_{1k}(t) + (D\mu_k^4 + \gamma) w_{1k}(t)) \int_0^H \xi_k^2(y) dy + N_0 \sum_{n=1}^\infty w_{1n}(t) \int_0^H \xi_n''(y)\xi_k(y) dy = \\ & = P_*(t) \cdot \int_0^H \xi_k(y) dy - N_1(t) \int_0^H w_0''(y)\xi_k(y) dy - \rho\dot{\alpha}(t) \int_0^H (w_0(y) + l) \xi_k(y) dy - \\ & - 2\rho \sum_{n=1}^\infty \dot{\varphi}_n(t) \cdot \int_0^H \cos \lambda_n y \cdot \text{sh } \lambda_n (w_0(y) + l) \xi_k(y) dy, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{n=1}^\infty \varphi_n(t) \lambda_n \int_0^H (\cos \lambda_n y \cdot \text{ch } \lambda_n (w_0(y) + l) + w_0'(y) \sin \lambda_n y \cdot \text{sh } \lambda_n (w_0(y) + l)) dy + \\ & + \alpha(t) \cdot H = \sum_{n=1}^\infty \dot{w}_{1n}(t) \int_0^H \xi_n(y) dy, \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{n=1}^\infty \varphi_n(t) \lambda_n \int_0^H (\cos \lambda_n y \cdot \text{ch } \lambda_n (w_0(y) + l) + w_0'(y) \sin \lambda_n y \cdot \text{sh } \lambda_n (w_0(y) + l)) \times \\ & \times \cos \lambda_k y dy = \sum_{n=1}^\infty \dot{w}_{1n}(t) \int_0^H \xi_n(y) \cos \lambda_k y dy, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{30}$$

Из уравнения (29) находим функцию $\alpha(t)$. Подставляя $\alpha(t)$ в уравнения (28) и дифференцируя уравнения (30) по переменной t , получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения неизвестных функций $\varphi_n(t)$, $w_{1n}(t)$:

$$\begin{aligned} & m\ddot{w}_{1k}(t) \int_0^H \xi_k^2(y) dy - \frac{\rho}{H} \left(\int_0^H (w_0(y) + l) \xi_k(y) dy \right) \sum_{n=1}^\infty \ddot{w}_{1n}(t) \int_0^H \xi_n(y) dy + \\ & + (D\mu_k^4 + \gamma) w_{1k}(t) \int_0^H \xi_k^2(y) dy + N_0 \sum_{n=1}^\infty w_{1n}(t) \int_0^H \xi_n''(y)\xi_k(y) dy = P_*(t) \int_0^H \xi_n(y) dy - \\ & - N_1(t) \int_0^H w_0''(y)\xi_k(y) dy - 2\rho \sum_{n=1}^\infty \dot{\varphi}_n(t) \int_0^H \cos \lambda_n y \cdot \text{sh } \lambda_n (w_0(y) + l) \xi_k(y) dy + \\ & + \frac{2\rho}{H} \left(\int_0^H (w_0(y) + l) \xi_k(y) dy \right) \sum_{n=1}^\infty \dot{\varphi}_n(t) \lambda_n \int_0^H (\cos \lambda_n y \cdot \text{ch } \lambda_n (w_0(y) + l) + \\ & + w_0'(y) \sin \lambda_n y \cdot \text{sh } \lambda_n (w_0(y) + l)) dy, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \tag{31}$$



$$\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{w}_{1n}(t) \int_0^H \xi_n(y) \cos \lambda_k y dy = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \dot{\varphi}_n(t) \lambda_n \int_0^H (\cos \lambda_n y \cdot \operatorname{ch} \lambda_n (w_0(y) + l) + w'_0(y) \sin \lambda_n y \cdot \operatorname{sh} \lambda_n (w_0(y) + l)) \cos \lambda_k y dy, \quad k = 1, 2, \dots \quad (32)$$

4. Решение тепловой задачи

При решении тепловой задачи (6)–(11) вначале, решая задачу (6)–(8), определяем закон распределения температуры рабочей среды по длине трубопровода, затем, решая задачу (9)–(11), находим закон распределения температуры по толщине пластины.

Методом разделения переменных получим решение задачи (6)–(8), вывод которого дан в [9]:

$$T_1(x, t) = T_*(t) - \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n \cdot e^{-\gamma_n t} \sin \nu_n(x + l) \left[\frac{\beta_1^0 T_0}{\gamma_n} - T_1^0 + e^{\gamma_n t} \left(T_*(t) - \frac{\beta_1^0 T_0}{\gamma_n} \right) - a_1^2 \nu_n^2 \int_0^t e^{\gamma_n \tau} T_*(\tau) d\tau \right], \quad (33)$$

где $T_1^0 = T_1(x, 0) = \text{const}$, $\gamma_n = a_1^2 \nu_n^2 + \beta_1^0$,

$$\nu_n = \frac{\pi(2n + 1)}{2l}, \quad \chi_n = \frac{4}{\pi(2n + 1)}, \quad a_1^2 = \frac{k_1}{\rho c_1}, \quad \beta_1^0 = \frac{\beta_1}{\rho c_1}.$$

Если известен закон изменения температуры $T_*(t)$ на выходе из камеры сгорания двигателя, то по формуле (33) можно определить значение температуры в любой момент времени t в любой точке трубопровода.

Решение задачи (9)–(11), позволяющее найти распределение температуры по толщине пластины в произвольный момент времени, имеет вид

$$T_2(x, t) = \tilde{T}(t) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\delta_n t} \cos \mu_n(x - h) \left[T_2^0 - T_1^0 - \int_0^t e^{\delta_n \tau} \tilde{T}'(\tau) d\tau \right], \quad (34)$$

где

$$T_2^0 = T_2(x, 0) = \text{const}, \quad a_2^2 = \frac{k_2}{\rho_0 c_2}, \quad A_n = \frac{(-1)^n 2\alpha_0 \sqrt{\alpha_0^2 + k_2^2 \mu_n^2}}{\mu_n [h(\alpha_0^2 + k_2^2 \mu_n^2) + k_2 \alpha_0]}, \quad \delta_n = a_2^2 \mu_n^2,$$

а значения μ_n ($n = 0 \div \infty$) – положительные корни уравнения

$$\operatorname{tg} \mu_n h = \frac{\alpha_0}{k_2 \mu_n}.$$

Функция $\tilde{T}(t) = T_1(0, t)$ определяется по формуле (33).

Подставляя (34), окончательно найдем коэффициент (20) системы (31), (32):

$$N_1(t) = \frac{E\alpha_{T1}}{1 - \nu} \left(\tilde{T}(t)h + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{\mu_n} e^{-\delta_n t} \sin \mu_n h \left[T_2^0 - T_1^0 - \int_0^t e^{\delta_n \tau} \tilde{T}'(\tau) d\tau \right] \right).$$

5. Численный эксперимент

Пусть окружающей трубопровод средой является воздух с температурой $T_0 = 293.15$ (20°C). Коэффициент теплообмена между поверхностью трубопровода и окружающей средой $\beta_1 = 15.5$. Считаем, что температура на входе в трубопровод постоянна $T_* = 1800$, а избыточное давление переменное $P_*(t) = 10^6(5 - \cos 10t)$. Рабочей средой в трубопроводе длиной $l = 0.5$ и шириной $H = 0.01$ является вода, тогда плотность $\rho = 1000$, коэффициент теплоемкости $c_1 = 4182$, коэффициент теплопроводности $k_1 = 0,683$. Пусть разность между давлением в покоящейся среде и распределенной по пластине внешней нагрузкой $P_0 - \bar{P} = 10^4$. Предположим, что пластина толщиной $h = 2.5 \cdot 10^{-4}$ изготовлена из алюминия, тогда плотность $\rho_0 = 2700$, модуль упругости $E = 7 \cdot 10^{10}$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.34$, температурный коэффициент линейного расширения $\alpha_T = 12.3 \cdot 10^{-6}$, коэффициент теплоемкости $c_2 = 897$, коэффициент теплопроводности $k_2 = 209.3$, изгибная жесткость $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} = 0.103$, погонная масса $m = \rho_0 h = 0.675$. Считаем, что отсутствуют постоянная составляющая усилиия $N_0 = 0$ и обжимной слой (основание) $\gamma = 0$. Все значения даны в системе СИ.

Возьмем начальные условия $T_1^0 = 293.15, T_2^0 = 293.15, w_k(0) = 0, \dot{w}_k(0) = 0, k = 1, 2, \dots$

В системе компьютерной алгебры Mathematica 12.0, взяв отрезки рядов в формулах (21), (24) длиной M , для различных видов закрепления концов чувствительного элемента датчика построены графики функции деформации $w(y, t) = w_0(y) + \varepsilon \sum_{n=1}^M w_{1n}(t)\xi_n(y)$.

На рис. 2 приведены примеры расчетов для случая шарнирного и жесткого закрепления концов элемента.

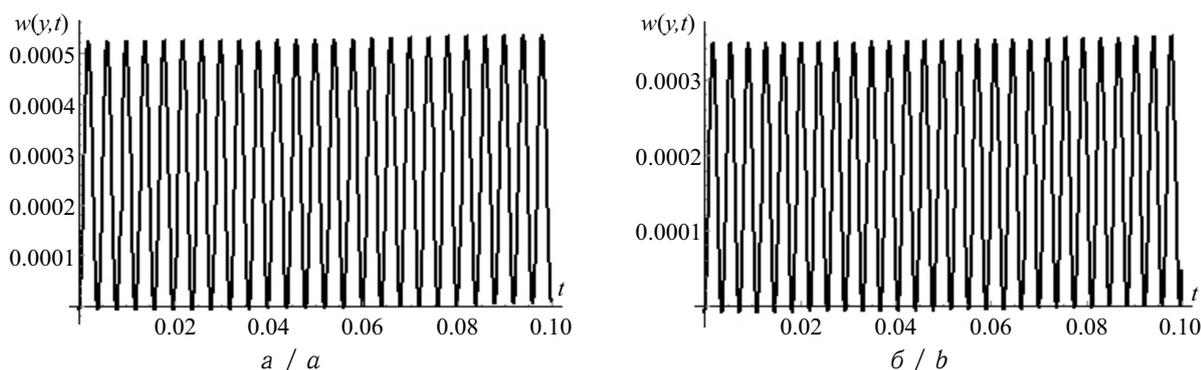


Рис. 2. Графики функции $w(y, t)$ в точке $y = 0.005$ в случае шарнирного (а) и жесткого (б) закрепления концов элемента при $\varepsilon = h/H, M = 2$ на временном отрезке $t \in [0; 0.1]$

Fig. 2. Graphs of the function $w(y, t)$ at $y = 0.005$ in the case of hinged (a) and rigid (b) fastening of the ends of the element at $\varepsilon = h/H, M = 2$ on the time interval $t \in [0; 0.1]$

На основании полученных графиков, аналогичных рис. 2, проводится анализ частоты и амплитуды колебаний упругого элемента датчика давления.

6. Другие модели деформируемого твердого тела

Для описания динамики чувствительного элемента датчика давления можно предложить несколько нелинейных математических моделей твердого деформируемого тела. Поэтому уравнение (3), описывающее динамику элемента, в зависимости от выбранной модели примет один из следующих видов:

$$mw_{tt} + Dw_{yyyy} + N(t)w_{yy} + \beta w_{yyyyt} + f(w_t, w) = P - \bar{P},$$

$$mw_{tt} + Dw_{yyyy} + N(t)w_{yy} + \beta w_{yyyyt} + f(w_t, w) - w_{yy} \left(\mu \int_0^H w_y^2 dy + \eta \frac{d}{dt} \int_0^H w_y^2 dy \right) = P - \bar{P},$$



$$mw_{tt} + \left[Dw_{yy} \left(1 - \frac{3}{2}w_y^2 \right) \right]_{yy} + N(t)w_{yy} + \beta w_{yyyyt} + f(w_t, w) = P - \bar{P},$$

$$mw_{tt} + \left[Dw_{yy} \left(1 - \frac{3}{2}w_y^2 \right) \right]_{yy} + N(t)w_{yy} + \beta \left[w_{yy} \left(1 - \frac{3}{2}w_y^2 \right) \right]_{yyt} + f(w_t, w) = P - \bar{P},$$

где $f(w_t, w)$ — нелинейная функция, зависящая от деформации и ее скорости; β , η — коэффициенты демпфирования; μ — коэффициент, зависящий от геометрических и прочностных характеристик упругого элемента и типа закрепления его концов.

Заключение

На основе разработанной математической модели, учитывающей тепловой поток от авиационного двигателя, в работе произведено исследование совместной динамики газожидкостной среды в трубопроводе и упругого элемента датчика давления. Математическая модель позволяет отслеживать в режиме реального времени взаимосвязь давления в камере сгорания и деформации чувствительного элемента датчика. Применялись методы малого параметра и Бубнова – Галёркина. Численный эксперимент произведен в системе Mathematica 12.0. Рассмотрены случаи шарнирного и жесткого закрепления концов элемента. Также предложены новые математические модели деформируемого твердого тела, описывающие динамику упругого элемента датчика давления. Результаты исследования можно использовать на стадии проектирования датчиков давления для авиационных и ракетных двигателей.

Список литературы

1. *Aulisa E., Ibragimov A., Kaya-Cekin E. Y.* Fluid structure interaction problem with changing thickness beam and slightly compressible fluid // *Discrete and Continuous Dynamical Systems – S.* 2014. Vol. 7, № 6. P. 1133–1148. <https://doi.org/10.3934/dcdss.2014.7.1133>
2. *Faal R. T., Derakhshan D.* Flow-induced vibration of pipeline on elastic support // *Procedia Engineering.* 2011. Vol. 14. P. 2986–2993. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2011.07.376>
3. *Kheiri M., Paidoussis M. P.* Dynamics and stability of a flexible pinned-free cylinder in axial flow // *Journal of Fluids and Structures.* 2015. Vol. 55. P. 204–217. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2015.02.013>
4. *Giacobbi D. B., Semler C., Paidoussis M. P.* Dynamics of pipes conveying fluid of axially varying density // *Journal of Sound and Vibration.* 2020. Vol. 473. Art. 115202. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115202>
5. *Abdelbaki A. R., Paidoussis M. P., Misra A. K.* A nonlinear model for a hanging cantilevered pipe discharging fluid with a partially-confined external flow // *International Journal of Non-Linear Mechanics.* 2020. Vol. 118. Art. 103290. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2019.103290>
6. *Velmisov P. A., Pokladova Yu. V., Mizher U. J.* Mathematical modeling of the mechanical system “pipeline – pressure sensor” // *AIP Conference Proceedings.* 2019. Vol. 2172. P. 030006-1–030006-12. <https://doi.org/10.1063/1.5133495>, EDN: PJPWYD
7. *Velmisov P. A., Pokladova Yu. V.* Mathematical modelling of the “pipeline – pressure sensor” system // *Journal of Physics: Conference Series.* 2019. Vol. 1353. Art. 012085. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1353/1/012085>, EDN: QDIGJK
8. *Вельмисов П. А., Покладова Ю. В.* Математическое моделирование систем измерения давления // *Вестник Ульяновского государственного технического университета.* 2020. № 2–3 (90–91). С. 10–19. EDN: CCGTAB
9. *Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Горбоконенко В. Д., Покладова Ю. В.* Математическое моделирование механической системы «трубопровод – датчик давления». Ульяновск : УлГТУ, 2008. 188 с. EDN: QNVYPF
10. *Вельмисов П. А., Покладова Ю. В.* Исследование динамики деформируемых элементов некоторых аэрогидроупругих систем. Ульяновск : УлГТУ, 2018. 152 с. EDN: VNPZJX
11. *Михайлов П. Г., Мокров Е. А., Митрохин С. В., Сергеев Д. А.* Особенности метрологического обеспечения современных датчиков пульсаций давлений // *Известия Южного федерального университета. Технические науки.* 2012. № 5 (130). С. 174–179. EDN: OYDWKL
12. *Михайлов П. Г., Мокров Е. А., Сергеев Д. А., Скотников В. В., Петрин В. А., Чернецов М. А.* Чувствительные элементы высокотемпературных датчиков давления. Материалы и технологии



- изготовления // Известия Южного федерального университета. Технические науки. 2014. № 4 (153). С. 204–213. EDN: [SDJKNB](#)
13. *Пирогов С. П.* Манометрические трубчатые пружины. Санкт-Петербург : Недра, 2009. 276 с.
 14. *Pirogov S. P., Cherentsov D. A., Chuba A. Yu., Ustinov N. N.* Simulation of forced oscillations of pressure monitoring devices // *International Journal of Engineering Trends and Technology*. 2022. Vol. 70, № 2. P. 32–36. <https://doi.org/10.14445/22315381/IJETT-V70I2P205>, EDN: [BYSORN](#)
 15. *Эткин Л. Г.* Виброчастотные датчики. Теория и практика. Москва : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. 408 с.
 16. *Белозубов Е. М., Васильев В. А., Запевалин А. И., Чернов П. С.* Проектирование упругих элементов нано- и микроэлектромеханических систем // *Измерительная техника*. 2011. № 1. С. 17–19. EDN: [NDWZHT](#)
 17. *Дмитриенко А. Г., Исаков С. А., Белозубов Е. М.* Датчики давления на основе нано- и микроэлектромеханических систем для ракетной и авиационной техники // *Датчики и системы*. 2012. № 9. С. 19–25. EDN: [PCIXWT](#)
 18. *Белозубов Е. М., Мокров Е. А., Тихомиров Д. В.* Минимизация погрешности тонкопленочных тензорезисторных датчиков давления при воздействии нестационарной температуры // *Датчики и системы*. 2004. № 1. С. 26–29. EDN: [KWKNDB](#)
 19. *Стучебников В., Васьков Ю., Савченко Е.* Специальные датчики давления промышленной группы «МИДА» // *Компоненты и технологии*. 2021. № 5 (238). С. 12–15. EDN: [BTNIBZ](#)
 20. *Казарян А. А., Грошев Г. П.* Универсальный датчик давления // *Измерительная техника*. 2008. № 3. С. 26–30. EDN: [MVJYGR](#)
 21. *Савченко Е. Г., Стучебников В. М., Устинов А. А.* Особенности проектирования высокотемпературных тензопреобразователей давления на основе структур КНС // *Приборы*. 2016. № 3 (189). С. 1–7. EDN: [VSELAP](#)

References

1. Aulisa E., Ibragimov A., Kaya-Cekin E. Y. Fluid structure interaction problem with changing thickness beam and slightly compressible fluid. *Discrete and Continuous Dynamical Systems – S*, 2014, vol. 7, iss. 6, pp. 1133–1148. <https://doi.org/10.3934/dcdss.2014.7.1133>
2. Faal R. T., Derakhshan D. Flow-induced vibration of pipeline on elastic support. *Procedia Engineering*, 2011, vol. 14, pp. 2986–2993. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2011.07.376>
3. Kheiri M., Paidoussis M. P. Dynamics and stability of a flexible pinned-free cylinder in axial flow. *Journal of Fluids and Structures*, 2015, vol. 55, pp. 204–217. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2015.02.013>
4. Giacobbi D. B., Semler C., Paidoussis M. P. Dynamics of pipes conveying fluid of axially varying density. *Journal of Sound and Vibration*, 2020, vol. 473, art. 115202. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115202>
5. Abdelbaki A. R., Paidoussis M. P., Misra A. K. A nonlinear model for a hanging cantilevered pipe discharging fluid with a partially-confined external flow. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2020, vol. 118, art. 103290. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2019.103290>
6. Velmisov P. A., Pokladova Yu. V., Mizher U. J. Mathematical modeling of the mechanical system “pipeline – pressure sensor”. *AIP Conference Proceedings*, 2019, vol. 2172, pp. 030006-1–030006-12. <https://doi.org/10.1063/1.5133495>, EDN: [PJPWYD](#)
7. Velmisov P. A., Pokladova Yu. V. Mathematical modelling of the “pipeline – pressure sensor” system. *Journal of Physics: Conference Series*, 2019, vol. 1353, art. 012085. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1353/1/012085>, EDN: [QDIGJK](#)
8. Velmisov P. A., Pokladova Yu. V. Mathematical modeling of pressure measurement systems. *Vestnik Ulyanovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* [Bulletin of Ulyanovsk State Technical University], 2020, iss. 2–3 (90–91), pp. 10–19 (in Russian). EDN: [CCGTAB](#)
9. Ankilov A. V., Velmisov P. A., Gorboconenko V. D., Pokladova Yu. V. *Matematicheskoe modelirovaniye mekhanicheskoy sistemy “truboprovod – datchik davleniya”* [Mathematical modeling of the mechanical system “pipeline – pressure sensor”]. Ulyanovsk, Ulyanovsk State Technical University Publ., 2008. 188 p. (in Russian). EDN: [QNVYFP](#)
10. Velmisov P. A., Pokladova Yu. V. *Issledovanie dinamiki deformiruemyykh elementov nekotorykh aerogidrouprugikh sistem* [Study of the dynamics of deformable elements of some aerohydroelastic systems]. Ulyanovsk, Ulyanovsk State Technical University Publ., 2018. 152 p. (in Russian). EDN: [VNPZJX](#)
11. Mihaiov P. G., Mokrov E. A., Mitrohin S. V., Sergeev D. A. Features of metrological maintenance



- of modern sensors of pulsations of pressure. *Izvestiya SFedU. Engineering Sciences*, 2012, vol. 5 (130), pp. 174–179 (in Russian). EDN: [OYDWKL](#)
12. Mikhailov P. G., Mokrov E. A., Sergeev D. A., Skotnikov V. V., Petrin V. A., Chernetsov M. A. Sensitive elements of high-temperature pressure sensors. Materials and technologies izgotovleniya. *Izvestiya SFedU. Engineering Sciences*, 2014, vol. 4 (153), pp. 204–213 (in Russian). EDN: [SDJKNB](#)
 13. Pirogov S. P. *Manometricheskie trubchatye pruzhiny* [Manometric tubular springs]. St. Petersburg, Nedra, 2009. 276 p. (in Russian).
 14. Pirogov S. P., Cherentsov D. A., Chuba A. Yu., Ustinov N. N. Simulation of forced oscillations of pressure monitoring devices. *International Journal of Engineering Trends and Technology*, 2022, vol. 70, iss. 2, pp. 32–36. <https://doi.org/10.14445/22315381/IJETT-V70I2P205>, EDN: [BYSORN](#)
 15. Etkin L. G. *Vibrochastotnye datchiki. Teoriya i praktika* [Vibration frequency sensors. Theory and practice], Moscow, Bauman MSTU Publ., 2004. 408 p. (in Russian).
 16. Belozubov E. M., Vasiliev V. A., Zapevalin A. I., Chernov P. S. Design of elastic components of nano- and microelectromechanical systems. *Measurement Techniques*, 2011, vol. 54, iss. 1, pp. 21–24. EDN: [NDWZHT](#)
 17. Dmitrienko A. G., Isakov S. A., Belozubov E. M. Pressure sensors based on nano- and microelectromechanical systems for rocket and aviation technology. *Datchiki i sistemy* [Sensors and Systems], 2012, iss. 9, pp. 19–25 (in Russian). EDN: [PCIXWT](#)
 18. Belozubov E. M., Mokrov E. A., Tikhomirov D. V. Minimizing the error of thin-film strain-resistive pressure sensors under the influence of non-stationary temperature. *Datchiki i sistemy* [Sensors and Systems], 2004, iss. 1, pp. 26–29 (in Russian). EDN: [KWKNDB](#)
 19. Stuchebnikov V., Vaskov Yu., Savchenko E. Special pressure sensors of the MIDA industrial group. *Komponenty i tekhnologii* [Components and Technologies], 2021, iss. 5 (238), pp. 12–15 (in Russian). EDN: [BTNIBZ](#)
 20. Kazaryan A. A., Groshev G. P. Universal pressure transducer. *Measurement Techniques*, 2008, vol. 51, iss. 3, pp. 269–275. EDN: [MVJYGR](#)
 21. Savchenko E. G., Stuchebnikov V. M., Ustinov A. A. Features of the design of high-temperature strain gauge pressure transducers based on SNS structures. *Pribory* [Instruments], 2016, iss. 3 (189), pp. 1–7 (in Russian). EDN: [VSELAP](#)

Поступила в редакцию / Received 04.12.2023

Принята к публикации / Accepted 13.03.2024

Опубликована / Published 29.11.2024