



Научная статья

УДК 539.3

Нелинейная статика и динамика пористых функционально-градиентных нанобалок с учетом поперечных сдвигов

А. В. Крысько^{1,2}, А. Н. Кречин³, М. В. Жигалов^{1,2}✉, В. А. Крысько^{1,2}

¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук, Россия, 630090, г. Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, д. 15

²Институт проблем точной механики и управления РАН (ИПТМУ РАН), Россия, 410028, г. Саратов, ул. Рабочая, д. 24

³Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., Россия, 410054, г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77

Крысько Антон Вадимович, доктор физико-математических наук, ¹ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования гетерофазных материалов; ²ведущий научный сотрудник лаборатории комплексных научных исследований, anton.krysko@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-9389-5602>, AuthorID: 357800

Кречин Александр Николаевич, аспирант кафедры «Математика и моделирование», san9.antonov@yandex.ru, AuthorID: 1038886

Жигалов Максим Викторович, доктор физико-математических наук, ¹ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования гетерофазных материалов, ²ведущий научный сотрудник лаборатории комплексных научных исследований, zhigalovm@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0642-7211>, AuthorID: 9130

Крысько Вадим Анатольевич, доктор технических наук, ¹главный научный сотрудник лаборатории моделирования гетерофазных материалов, ²главный научный сотрудник лаборатории комплексных научных исследований, tak@san.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4914-764X>, AuthorID: 3929

Аннотация. В работе построены нелинейные математические модели функционально-градиентных пористых нанобалок с учетом поперечных сдвигов. Поперечные сдвиги описываются с помощью кинематических моделей второго (С. П. Тимошенко) и третьего приближений (Шереметьева – Пелеха). Из модели Шереметьева – Пелеха как частный случай вытекают кинематические модели второго (С. П. Тимошенко) и первого приближений (Бернулли – Эйлера). Геометрическая нелинейность принята по Т. фон Карману, наноэффекты — по модифицированной моментной теории упругости Ф. Янга. Искомые уравнения получены из принципа Остроградского – Гамильтона. Разработан эффективный алгоритм, позволяющий рассматривать задачи как статике, так и хаотической динамики. Приводятся численные примеры.

Ключевые слова: функционально-градиентные пористые нанобалки, кинематическая гипотеза Шереметьева – Пелеха, метод установления, статика, хаотическая динамика

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-11-00160).

Для цитирования: Крысько А. В., Кречин А. Н., Жигалов М. В., Крысько В. А. Нелинейная статика и динамика пористых функционально-градиентных нанобалок с учетом поперечных сдвигов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 4. С. 587–597. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-587-597>, EDN: ZFBSON

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Article

Nonlinear statics and dynamics of porous functional-gradient nanobeam taking into account transverse shifts

A. V. Krysko^{1,2}, A. N. Krechin³, M. V. Zhigalov^{1,2✉}, V. A. Krysko^{1,2}

¹Lavrentiev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 15 Academician Lavrentiev Ave., Novosibirsk 630090, Russia

²Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences (IPTMU RAS), 24 Rabochaya St., Saratov 410028, Russia

³Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77 Politechnicheskaya St., Saratov 410054, Russia

Anton V. Krysko, anton.krysko@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-9389-5602>, AuthorID: 357800

Alexander N. Krechin, san9.antonov@yandex.ru, AuthorID: 1038886

Maxim V. Zhigalov, zhigalovm@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0642-7211>, AuthorID: 9130

Vadim A. Krysko, tak@san.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4914-764X>, AuthorID: 3929

Abstract. In this paper, nonlinear mathematical models of functionally gradient porous nanobeams are constructed taking into account transverse shifts. Transverse shifts are described using kinematic models of the second (S. P. Timoshenko) and third approximations (Sheremetyev – Pelekh). From the Sheremetyev – Pelekh model, as a special case, the kinematic models of the second (S. P. Timoshenko) and first approximation (Bernoulli – Euler) follow. Geometric nonlinearity is accepted according to T. von Karman, nanoeffects are accepted according to the modified Yang moment theory of elasticity. The required equations are derived from the Ostrogradsky – Hamilton principle. An efficient algorithm has been developed that allows us to consider both static and chaotic dynamics problems. Numerical examples are given.

Keywords: functionally gradient porous nanobeams, the Sheremetyev – Pelekh kinematic hypothesis, the method of establishment, statics, chaotic dynamics

Acknowledgements: The research was carried out at the expense of a grant from the Russian Science Foundation (project No. 22-11-00160).

For citation: Krysko A. V., Krechin A. N., Zhigalov M. V., Krysko V. A. Nonlinear statics and dynamics of porous functional-gradient nanobeam taking into account transverse shifts. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 4, pp. 587–597 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-587-597>, EDN: ZFBSON

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Благодаря улучшенным свойствам по сравнению с обычными многослойными конструкциями, такими как устойчивость к коррозии, механическим нагрузкам и высоким температурам, функционально-градиентные материалы (FGM) и пористые функционально-градиентные материалы (PFGM) используются в различных отраслях промышленности: аэрокосмической промышленности, биологии, химии, медицине (диагностика, клеточная нано- и микрохирургия, доставка лекарств пораженное место организма), электронной промышленности, робототехнике [1–4].

Анализ работ, посвященных исследованию балок из PFGM, показывает, что основное внимание уделяется анализу влияния различных характеристик, таких как коэффициенты градиентности и пористости, нанокэффициент, относительная толщина на изгиб, устойчивость и значения собственных частот [5–9]. Исследование вынужденных колебаний PFGM-балок приведено лишь в работе [10]. В статической линейной постановке исследованию влияния пористости функционально-градиентных пластинок посвящена статья [12]. Настоящая работа ставит своей целью проанализировать нелинейную статику и хаотическую динамику пористых функционально-градиентных нанобалок, описываемых кинематическими моделями 1, 2, 3 приближений.



1. Постановка задачи

Рассмотрим в пространстве R^3 : $\Omega = \{x, y, z / (x, y, z) \in [0, a] \times [0, b] \times [-h/2, h/2]\}$ балку (рис. 1), выполненную из композита — функционально-градиентного пористого материала, состоящего из двух фаз: металлической и керамической.

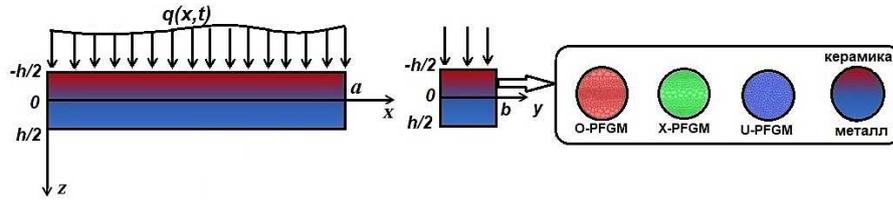


Рис. 1. Расчетная схема и типы PFGM (цвет онлайн)
 Fig. 1. Design scheme and types of PFGM (color online)

Сформулируем следующие гипотезы.

Гипотеза 1. Кинематическая гипотеза третьего приближения — Шереметьева – Пелеха [12, 13]:

$$u_1 = u(x, t) + z\psi(x, t) - \frac{z^3}{3h^2} \left(\psi(x, t) + \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right), \quad u_2 = 0, \quad u_3 = w(x, t), \quad (1)$$

где $u(x, t)$, $w(x, t)$ и $\psi(x, t)$ обозначают осевое смещение срединной линии, прогиб балки и угол вращения поперечного сечения относительно вертикального направления. Здесь и далее член с подчеркиванием сверху относится к учету поворота нормали относительно перпендикуляра при изгибе, член, подчеркнутый снизу, относится к изгибанию нормали.

Замечание 1. Если в (1) пренебречь членами, подчеркнутыми снизу, — модель Тимошенко.

Замечание 2. Если в (1) пренебречь членами, подчеркнутыми снизу, а в члене, подчеркнутым сверху, положить $\psi(x, t) = -\frac{\partial w(x, t)}{\partial x}$, получаем модель Бернулли – Эйлера.

Гипотеза 2. Материал, из которого изготовлена нанопластинка, считается изотропным, но неоднородным по толщине $E(z)$, $\nu(z)$.

Гипотеза 3. Нанозффекты учитываются с помощью модифицированной моментной теории упругости Ф. Янга (F. Yang) [11].

Гипотеза 4. Геометрическая нелинейность учитывается в форме Т. фон Кармана.

Гипотеза 5. Функционально-градиентная пористость учитывается по модели Ф. Фана (F. Fan) [5].

Для построения разрешающих уравнений и граничных условий используем принцип Гамильтона

$$\delta = \int_{t_2}^{t_1} (K - U + W + W_\varepsilon) dt, \quad (2)$$

здесь U , K , W , W_ε — потенциальная энергия, кинетическая энергия, работа внешних сил и энергия диссипации:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^a \int_A (\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + m_{ij}\chi_{ij}) dA dx,$$

$$K = \frac{1}{2} \int_0^a \int_A \rho \left[\left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + z \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} - \frac{z^3}{3h^2} \left(\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x \partial t} \right) \right)^2 + \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \right)^2 \right] dA dx,$$

$$W = \int_0^a (q(x, t)w(x, t)) dx, \quad W_\varepsilon = \varepsilon \int_0^a \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} w(x, t) \right) dx, \quad (3)$$

где ε — коэффициент диссипации, в формуле (3) первые слагаемые относятся к классической теории упругости, вторые слагаемые — к модифицированной моментной теории упругости Ф. Янга [11].

В выражении (3) (основе теории балки Шереметьева – Пелеха) в предположении малых деформаций и умеренных вращений нелинейные соотношения Кармана для деформации-перемещения балки с учетом (1) имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right)^2 + z \frac{\overline{\partial \psi(x,t)}}{\partial x} - \frac{z^3}{3h^2} \left(\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right), \\ \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left(\overline{\psi(x,t) + \frac{\partial w(x,t)}{\partial x}} \right) - \frac{z^2}{h^2} \left(\psi(x,t) + \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right), \\ \theta_2 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right) - \overline{\psi(x,t)} + \frac{z^2}{h^2} \left(\psi(x,t) + \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right), \\ \chi_{12} = \chi_{21} &= \frac{1}{4} \left[-\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\overline{\partial \psi(x,t)}}{\partial x} + \left(1 + \frac{z^2}{h^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \right) \right], \\ \chi_{23} = \chi_{32} &= -\frac{z}{2h^2} \left(\psi(x,t) + \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Главные компоненты симметричной части тензора напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{11}, \quad \sigma_{13} = k_s \mu \varepsilon_{13}, \\ m_{12} &= \mu l^2 \chi_{12}, \quad m_{23} = -\mu l^2 \chi_{23}, \end{aligned}$$

где k_s — поправочный коэффициент, который для модели Шереметьева – Пелеха равен 1, а для модели С. П. Тимошенко — 5/6.

Искомые вариационные и дифференциальные уравнения, краевые и начальные условия вытекают из принципа Гамильтона – Остроградского (2). Разрешающие уравнения движения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ k_1 \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right)^2 \right) \right\} &= b_1 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[k_1 \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right)^2 \right) \right] \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right\} &+ \frac{\overline{\partial^3 \psi(x,t)}}{\partial x^3} - k_4 \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \\ + k_5 \left(\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \right) &+ q(x,t) = b_1 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} - b_6 \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} + b_5 \frac{\partial^3 \psi(x,t)}{\partial x \partial t^2}, \\ \frac{k_2 \overline{\partial^2 \psi(x,t)}}{\partial x^2} - \frac{\overline{\partial^3 w(x,t)}}{\partial x^3} - k_5 \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + \psi(x,t) \right) &= b_3 \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} - b_5 \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x \partial t^2}. \quad (4) \end{aligned}$$

Граничные условия при $x = 0, a$:

$$\begin{aligned} \left\{ k_1 \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right)^2 \right) \right\} &= 0, \quad u(x,t) = 0, \\ -\varepsilon \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + b_6 \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} + b_5 \frac{\partial^3 \psi(x,t)}{\partial x \partial t^2} &+ \left[k_1 \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right)^2 \right) \right] \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + \\ + k_3 \frac{\overline{\partial^2 \psi(x,t)}}{\partial x^2} - k_4 \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3} &+ k_5 \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + \psi(x,t) \right) = 0, \quad w(x,t) = 0, \\ \frac{k_3 \overline{\partial \psi(x,t)}}{\partial x} - k_4 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} &= 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} = 0, \end{aligned}$$



$$\overline{k_2 \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x}} - \overline{k_3 \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2}} = 0, \quad \psi(x, t) = 0. \quad (5)$$

Начальные условия:

$$\begin{aligned} w(x, 0) = \phi_1(x), \quad \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = \phi_2(x), \quad u(x, 0) = \phi_3(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \phi_4(x), \\ \psi(x, 0) = \phi_3(x), \quad \frac{\partial \psi(x, 0)}{\partial t} = \phi_4(x). \end{aligned} \quad (6)$$

где $\phi_i(x)$, $i = 1, \dots, 6$ — заданные начальные условия.

Коэффициенты k_i (4) для модели Шереметьева – Пелеха имеют вид

$$\begin{aligned} k_1 &= \lambda(z) + 2\mu(z), \quad k_2 = (\lambda(z) + 2\mu(z)) \left(z^2 - \frac{2z^4}{3h^2} + \frac{z^6}{9h^4} \right), \\ k_{2nano} &= \frac{1}{4}\mu(z) \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right)^2, \quad k_3 = (\lambda(z) + 2\mu(z)) \left(\frac{2z^4}{3h^2} + \frac{z^6}{9h^4} \right), \\ k_{3nano} &= \frac{1}{4}\mu(z) \left(1 - \frac{z^4}{h^4} \right), \quad k_4 = (\lambda(z) + 2\mu(z)) \frac{z^6}{9h^4}, \\ k_{4nano} &= \frac{1}{4}\mu(z) \left(1 + \frac{z^2}{h^2} \right)^2, \quad k_5 = k_s \mu(z) \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right)^2, \\ k_{5nano} &= \mu(z) \frac{z^2}{h^4}, \quad b_1 = \rho(z), \quad b_3 = \rho(z) \left(z^2 - \frac{2z^4}{3h^2} + \frac{z^6}{9h^4} \right). \end{aligned}$$

Из уравнений (4) следуют уравнения для кинематических моделей Тимошенко и Бернулли – Эйлера, как для полно размерных $\gamma = 0$ балок, так и наноразмерных $\gamma \neq 0$ балок. Введем безразмерные параметры по формулам

$$\begin{aligned} \bar{w} = \frac{w}{h}, \quad \bar{u} = \frac{ua}{h^2}, \quad \bar{\psi} = \frac{\psi a}{h}, \quad \bar{x} = \frac{x}{a}, \quad \bar{r} = \frac{a}{h}, \quad \bar{\gamma} = \frac{l}{h}, \quad \bar{b} = \frac{b}{h}, \\ \bar{A} = \frac{A}{bh}, \quad \bar{q} = q \frac{a^4}{h^4 E}, \quad \bar{t} = \frac{t}{\tau}, \quad \tau = \frac{a}{c}, \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon \frac{a}{c}. \end{aligned}$$

Система дифференциальных уравнений в частных производных (4) с краевыми (5) и начальными условиями (6) сведена к задаче Коши методом конечных разностей второго порядка точности по пространственным координатам, которая решена методом Рунге – Кутты восьмого порядка точности и Ньюмарка. Достоверность результатов исследовалась по правилу Рунге: интервал разбиения по координате x был принят $1/100$, а по времени $1.953 \cdot 10^{-3}$, что обеспечило совпадение не только основных функций, но и производных до второго порядка включительно.

2. Численный эксперимент

Исследуем статику и нелинейную динамику пористых функционально-градиентных нанобалок для кинематических моделей Бернулли – Эйлера и Шереметьева – Пелеха для типов пористости, приведенных на рис. 1. Материал балки — композит, имеющий металлическую фазу и фазу керамики, коэффициент пористости $\Gamma = 0.2; 0.4$, модули упругости, коэффициент Пуассона, плотность для алюминия и керамики [14]:

$$\begin{aligned} E_c = 210 \text{ ГПа}, \quad E_m = 70 \text{ ГПа}, \quad \nu_c = 0.24, \quad \nu_m = 0.35, \\ \rho_c = 2400 \text{ кг/м}^3, \quad \rho_m = 2700 \text{ кг/м}^3, \quad h = 1 \text{ м}. \end{aligned}$$

Граничные условия, соответствующие жесткой заделке:

$$w(0, t) = w(1, t) = \frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial w(1, t)}{\partial x} = 0,$$

$$u(0, t) = u(1, t) = \psi(0, t) = \psi(1, t) = 0$$

и начальные условия для $\phi_i(x) = 0, i = 1, \dots, 6$.

Нагрузка:

$$q(x, t) = q_0 + q_1 \sin(\omega_p t), \tag{7}$$

где q_0, q_1 — величина статической и амплитуда динамической нагрузки соответственно, ω_p — частота возбуждения, t — время.

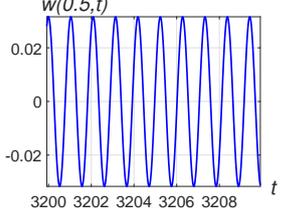
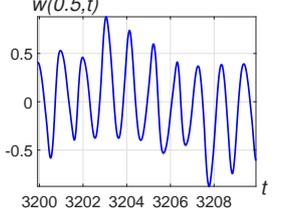
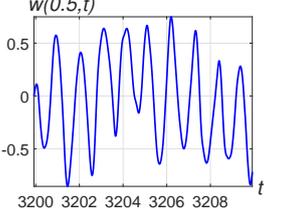
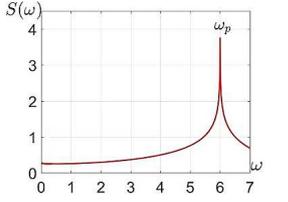
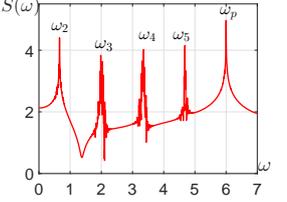
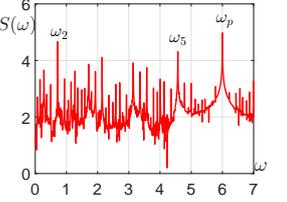
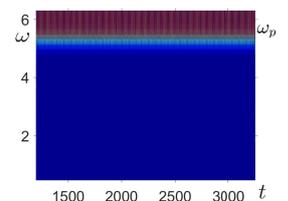
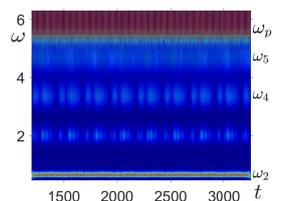
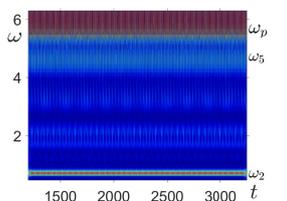
2.1. Хаотическая динамика

В работе хаос определяется по формулировке Гулика [15]: «Хаос существует тогда, когда либо имеется существенная зависимость от начальных условий, либо функция имеет положительный показатель Ляпунова в каждой точке области ее определения и поэтому не является в конечном итоге периодической». Исследовалась хаотическая динамика нанобалок при действии переменной распределенной нагрузки с частотой возбуждения $\omega_p = 6$, коэффициент диссипации $\varepsilon = 1$, относительная длина $r = \frac{a}{h} = 50$. Спектр показателей Ляпунова получен с помощью подхода, разработанного В. А. Крысько и В. В. Добряном на основе нейронных сетей, старший показатель Ляпунова проверялся методом Канца [16].

Рассмотрим нелинейную динамику балки, описываемую кинематической гипотезой третьего порядка Шереметьева – Пелеха, с типом пористости X ([16], см. рис. 1, табл. 1).

Таблица 1 / Table 1

Динамика балки Шереметьева – Пелеха
Dynamics of the Sheremetyev – Pelekh beam

q_1	$1 \cdot 10^3$	$22 \cdot 10^3$	$25 \cdot 10^3$
Сигналы			
Спектр Фурье			
Вейвлет Морле			



Окончание табл. 1 / Continuation of Table 1

q_1	$1 \cdot 10^3$	$22 \cdot 10^3$	$25 \cdot 10^3$
Фазовый портрет			
Сечение Пуанкаре			

Коэффициент пористости $\Gamma = 0.2$ и размерно-зависимый параметр $\gamma = 0.3$. При нагрузке $q = 1 \cdot 10^3$ на спектре мощности наблюдается частота возбуждения ω_p , по сигналу, вейвлету, фазовому портрету и сечению Пуанкаре можно сделать вывод, что колебания гармонические. О гармонических колебаниях свидетельствуют также и показатели Ляпунова LE Spectrum: $-0.00037; -0.26174; -0.26174; -1.32429$. Увеличение нагрузки приводит к появлению новых частот, и при $q = 22 \cdot 10^3$ на спектре присутствуют частоты $\omega_2 = \frac{11}{100}\omega_p, \omega_3 = \frac{33}{100}\omega_p, \omega_4 = \frac{55}{100}\omega_p, \omega_5 = \frac{77}{100}\omega_p$, «расстояния» между которыми равны и равны «расстоянию» между частотой ω_5 и ω_p . Вейвлет-спектр показывает переменный характер частот во времени. Фазовый портрет и сечение Пуанкаре указывают на хаотический характер колебаний. Спектр показателей Ляпунова имеет один положительный показатель (LE Spectrum: $0.05097; -0.05654; -0.43458; -0.51255$). При нагрузке $q = 25 \cdot 10^3$ сигнал становится еще более хаотичным, на спектре Фурье имеется пьедестал частот. Вейвлет-спектр указывает на неизменяемость частотного спектра во времени. Фазовый портрет аналогичен предыдущему, а сечение Пуанкаре становится более хаотичным. В спектре показателей Ляпунова имеются два положительных показателя (LE Spectrum: $0.72661; 0.00432; -0.00122; -0.73915$), т. е. система находится в гипер-хаосе. Состояние гипер-хаоса наблюдается в задачах для классических систем: обобщенное отображение Энона, система Лоренца [16].

Рассмотрим для сравнения результаты для пористой нанобалки Бернулли – Эйлера с аналогичными параметрами (табл. 2).

Таблица 2 / Table 2

Динамика балки Бернулли – Эйлера / Dynamics of the Bernoulli – Euler beam

q_1	$29 \cdot 10^3$	$2.6 \cdot 10^3$	$31 \cdot 10^3$
Сигналы			
Спектр Фурье			



Окончание табл. 2 / Continuation of Table 2

q_1	$29 \cdot 10^3$	$2.6 \cdot 10^3$	$31 \cdot 10^3$
Вейвлет Морле			
Фазовый портрет			
Сечение Пуанкаре			

При нагрузке $q = 29 \cdot 10^3$ сигнал не является синусоидальным и имеет пилообразную структуру, в спектре Фурье присутствуют две частоты с малой мощностью вокруг частоты $\frac{\omega_p}{2}$. На вейвлет-спектре они выражены слабо. Фазовый портрет имеет сложную неоднородную структуру. Спектр показателей Ляпунова отрицательный — LE Spectrum: $-0.00778; -0.04325; -0.06809; -0.06809$. При увеличении нагрузки происходит перестроение спектра, появляются новые частоты, и при $q = 29.6 \cdot 10^3$ на спектре присутствуют 12 частот. Наибольшую мощность имеют $\omega_p, \frac{\omega_p}{2}$. Частоты расположены на спектре с шагом 0.5. Хаотичность колебаний подтверждает фазовый портрет, сечение Пуанкаре и спектр показателей Ляпунова — LE Spectrum: $0.05000; -0.08149; -0.54066; -0.54066$. Увеличение нагрузки приводит к перестроению спектра, и при $q = 31 \cdot 10^3$ спектр Фурье становится хаотичным на частотах $\omega_p, \frac{\omega_p}{2}$. Сечение Пуанкаре и фазовый портрет указывают на хаотичность в фазовом пространстве. Спектр показателей Ляпунова имеет два положительных показателя (LE Spectrum: $0.056011; 0.00067704; -0.042798; -0.10512; -0.35535$), что говорит о состоянии гипер-хаоса.

2.2. Исследование зависимости нагрузка – прогиб при различных параметрах

Решение нелинейных статических задач осуществляется с помощью метода установления [14], через динамические задачи, с помощью методов, описанных в первом разделе настоящей работы. Рассмотрим и проанализируем поведение балочных структур, описываемых гипотезами 1-го и 3-го приближения (гипотеза 2-го приближения на графиках отсутствует, так как ее результаты близки к результатам гипотезы 3-го приближения), при действии внешней нагрузки q_0 (7), для различных значений размерно-зависимого параметра $\gamma = (0; 0.3)$ и при различных типах пористости — U, X, O ([16], рис. 2), при различных показателях пористости $\Gamma = 0.2; 0.4$, для $r = 50$. Результаты по кинематической модели Бернулли – Эйлера показаны сплошной линией, Шереметьева – Пелеха — штриховой. Отметим, что $q_1 = 0$ (7). Тип пористости на графиках обозначен цветами: синий цвет — тип пористости U , зеленый цвет — тип пористости X , красный цвет — тип пористости O . Из графиков рис. 2 видно, что тип пористости влияет на несущую способность балки. Для всех кинематических гипотез тип пористости U является наихудшим с точки зрения несущей способности балки. При увеличении размерно-зависимого параметра γ несущая способность балки увеличивается



примерно на 13–16%. Также при увеличении параметра пористости Γ несущая способность балки уменьшается примерно на 14–16%. Стоит отметить, что при увеличении параметра пористости Γ разница между типами пористости также увеличивается. Сравнение результатов (рис. 2) показывает, что увеличение коэффициента пористости для типа пористости U приводит к увеличению прогиба на 15% для модели Бернулли – Эйлера и на 11% для модели Шереметьева – Пелеха. Для типа пористости X значения соответственно 13 и 9%, а для типа пористости O – 8 и 5%. Из чего следует сделать вывод, что тип пористости O наиболее устойчив к увеличению пор и позволяет нести большую нагрузку.

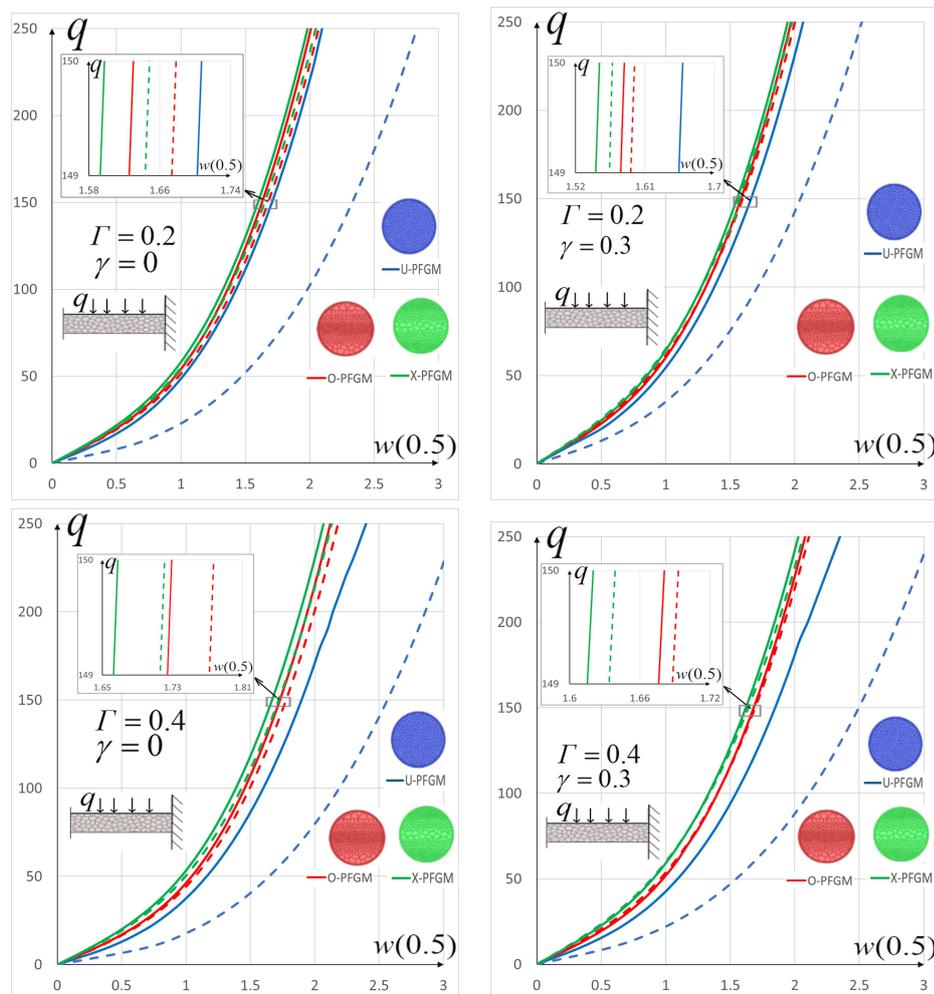


Рис. 2. Зависимость $q[w(0.5)]$ балок Бернулли – Эйлера и Шереметьева – Пелеха (цвет онлайн)
 Fig. 2. Dependence $q[w(0.5)]$ of Bernoulli – Euler and Sheremetyev – Pelekh beams (color online)

Закключение

Построена математическая модель функционально-градиентных пористых гибких нанобалок с использованием кинематической гипотезы третьего порядка Шереметьева – Пелеха. Учет размерно-зависимого поведения материала основан на модифицированной моментной теории упругости. Из построенной математической модели Шереметьева – Пелеха как частный случай вытекают модели второго порядка Тимошенко и первого порядка Бернулли – Эйлера, с которой проведено сопоставление результатов. Численные результаты получены методом установления, методом конечных разностей второго порядка точности, методом Рунге – Кутты восьмого порядка и Ньюмарка.

В задачах нелинейной динамики нанобалок Бернулли – Эйлера и нанобалок Шереме-



тьева – Пелеха обнаружены два типа хаотических колебаний: хаос и гипер-хаос, так же как в классических задачах гиперхаотического обобщенного отображения Энона и системы Лоренца. Переход колебаний из гармонических в хаотические разный для каждой кинематической модели. В модели первого приближения — сценарий Фейгенбаума, в модели третьего приближения — переход в хаос через перемежаемость.

В задачах статики сравнение зависимостей $q[w(0.5)]$ показало, что наибольшее отличие результатов балок Бернулли – Эйлера и Шереметьева – Пелеха наблюдается при однородной по толщине пористости U-PFGM. Балки с типом пористости U-PFGM имеют наименьшую несущую способность для каждой модели. Отметим, что увеличение коэффициента пористости Γ приводит к снижению несущей способности пористых функционально-градиентных нанобалок.

Разработанный алгоритм расчета задач статики и динамики обладает высокой точностью, так как требует совпадения не только основных функций, но и их производных до второго порядка включительно; $\Delta x = 1/100$, $\Delta t = 1.953 \cdot 10^{-3}$ — соответственно шаги по пространственной координате и по времени. Представленные исследования имеют практический интерес для инженеров, проектирующих конструкции из пористых градиентных материалов.

Список литературы / References

1. Kumar R., Lal A., Singh B. N., Singh J. Non-linear analysis of porous elastically supported FGM plate under various loading. *Composite Structures*, 2020, vol. 233, art. 111721. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111721>
2. Shafiei N., Mirjavadi S. S., Afshari B. M., Rabby S., Kazemi M. Vibration of two-dimensional imperfect functionally graded (2D-FG) porous nano-/micro-beams. *Computer Methods Applied Mechanics and Engineering*, 2017, vol. 322, pp. 615–632. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.05.007>
3. Shafiei N., Mirjavadi S. S., Afshari B. M., Rabby S., Hamouda A. M. S. Nonlinear thermal buckling of axially functionally graded micro and nanobeams. *Composite Structures*, 2017, vol. 168, pp. 428–439. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.02.048>
4. Changho Oh, Stovall C. B., Dhaouadi W., Carpick R. W., de Boer M. P. The strong effect on MEMS switch reliability of film deposition conditions and electrode geometry. *Microelectronics Reliability*, 2019, vol. 98, pp. 131–143. <https://doi.org/10.1016/j.microrel.2019.04.023>
5. Fan F., Xu Y., Sahmani S., Safaei B. Modified couple stress-based geometrically nonlinear oscillations of porous functionally graded microplates using NURBS-based isogeometric approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020, vol. 372, art. 113400. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113400>
6. Ebrahimi F., Barati M. R. Small-scale effects on hygro-thermo-mechanical vibration of temperature-dependent nonhomogeneous nanoscale beams. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2017, vol. 24, iss. 11, pp. 924–936. <https://doi.org/10.1080/15376494.2016.1196795>
7. Jouneghani F. Z., Dimitri R., Tornabene F. Structural response of porous FG nanobeams under hygro-thermo-mechanical loadings. *Composites Part B: Engineering*, 2018, vol. 152, pp. 71–78. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.06.023>
8. Ebrahimi F., Dabbagh A. Wave dispersion characteristics of heterogeneous nanoscale beams via a novel porosity-based homogenization scheme. *The European Physical Journal Plus*, 2019, vol. 134, art. 157. <https://doi.org/10.1140/epjp/i2019-12510-9>
9. Messai A., Fortas L., Merzouki T., Houari M. S. A. Vibration analysis of FG reinforced porous nanobeams using two variables trigonometric shear deformation theory. *Structural Engineering and Mechanics*, 2022, vol. 81, iss. 4, pp. 461–479. <https://doi.org/10.12989/sem.2022.81.4.461>
10. Xu X., Karami B., Shahsavari D. Time-dependent behavior of porous curved nanobeam. *International Journal of Engineering Science*, 2021, vol. 160, art. 103455. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2021.103455>
11. Yang F., Chong A. C. M., Lam D. C. C., Tong P. Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 2002, vol. 39, pp. 2731–2743. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(02\)00152-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00152-X)



12. Awrejcewicz J., Krysko A. V., Smirnov A., Kalutsky L. A., Zhigalov M. V., Krysko V. A. Mathematical modeling and methods of analysis of generalized functionally gradient porous nanobeams and nanoplates subjected to temperature field. *Meccanica*, 2022, vol. 57, pp. 1591–1616. <https://doi.org/10.1007/s11012-022-01515-7>
13. Miller R. E., Shenoy V. B. Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements. *Nanotechnology*, 2000, vol. 11, iss. 3, pp. 139–147. <https://doi.org/10.1088/0957-4484/11/3/301>
14. Krysko V. A., Awrejcewicz J., Komarov S. A. Nonlinear deformations of spherical panels subjected to transversal load action. *Computer Methods Applied Mechanics and Engineering*, 2005, vol. 194, pp. 3108–3126. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.08.005>
15. Gulick D. *Encounters with chaos*. New York, McGraw-Hill College, 1992. 224 p.
16. Awrejcewicz J., Krysko A. V., Erofeev N. P., Dobriyan V., Barulina M. A., Krysko V. A. Quantifying chaos by various computational methods. Part 1: Simple systems. *Entropy*, 2018, vol. 20, iss. 3, art. 175. <https://doi.org/10.3390/e20030175>

Поступила в редакцию / Received 20.06.2023

Принята к публикации / Accepted 03.07.2023

Опубликована / Published 29.11.2024