



Научная статья  
УДК 534.014

## Построение и анализ нелинейных форм колебаний трехзвенного маятника асимптотическими методами

А. С. Смирнов<sup>1,2✉</sup>, С. А. Булов<sup>3</sup>, Е. А. Дегилевич<sup>2,4</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Россия, 195251, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29

<sup>2</sup>Институт проблем машиноведения Российской академии наук, Россия, 199178, г. Санкт-Петербург, Большой пр. В. О., д. 61

<sup>3</sup>Центр инженерно-физических расчетов и анализа (АО «Цифра»), Россия, 195197, г. Санкт-Петербург, Кондратьевский пр., д. 15, корп. 2

<sup>4</sup>ООО «Центр Технологического Консалтинга», Россия, 194044, г. Санкт-Петербург, Большой Сампсониевский пр., д. 28, корп. 2

**Смирнов Алексей Сергеевич**, <sup>1</sup>ассистент Высшей школы механики и процессов управления; <sup>2</sup>младший научный сотрудник лаборатории мехатроники, [smirnov.alexey.1994@gmail.com](mailto:smirnov.alexey.1994@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0002-6148-0322>, AuthorID: 947771

**Булов Серафим Андреевич**, инженер, [tech.nature.engineering@gmail.com](mailto:tech.nature.engineering@gmail.com), <https://orcid.org/0009-0009-0490-2101>, AuthorID: 1192307

**Дегилевич Егор Алексеевич**, <sup>2</sup>аспирант; <sup>4</sup>ведущий инженер, [DegilevichEgor@gmail.com](mailto:DegilevichEgor@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0003-0142-4561>, AuthorID: 1076938

**Аннотация.** Статья посвящена изучению нелинейных колебаний одной из наиболее часто встречающихся систем с тремя степенями свободы — трехзвенного математического маятника, параметры всех невесомых звеньев и всех концевых грузов которого полагаются идентичными. Обсуждается широкое применение модели трехзвенного маятника в прикладных задачах робототехники и биомеханики, а также ее важное научное значение в задачах устойчивости равновесия, стабилизации и управления движением. Рассматривается вопрос о нахождении нелинейных форм колебаний трехзвенного маятника, знание которых позволяет осуществлять одночастотные режимы его движения при достаточно больших отклонениях. Для этой цели используются асимптотические методы нелинейной механики, которые дают возможность определить формы колебаний системы в первом приближении в рамках слабо-нелинейной модели. Обсуждаются основные особенности построенных нелинейных форм колебаний и выявляются их качественные и количественные отличия от традиционных линейных форм малых колебаний. Помимо этого, отмечается, что нелинейные формы колебаний могут быть найдены и на основе численного моделирования при помощи разгона системы под действием коллинеарного управления с малых отклонений, задаваемых по линейной форме, и до конечных амплитуд с выходом на одночастотное движение уже по нелинейной форме. Полученные аналитические выражения для частот нелинейных колебаний и соотношений амплитуд колебаний звеньев маятника для каждой из нелинейных форм сопоставляются с аналогичными численными зависимостями путем построения отвечающих им графических иллюстраций при одном и том же уровне полной механической энергии. Устанавливается, что аналитические и численные результаты находятся в согласии друг с другом, что определяет ценность построенного в работе приближенного решения. Полученные формулы и сделанные выводы представляют несомненный интерес в теоретическом отношении, а также они могут оказаться полезными и для их использования в конкретных практических целях.



**Ключевые слова:** трехзвенный математический маятник, нелинейная форма колебаний, асимптотические методы

**Для цитирования:** Смирнов А. С., Булов С. А., Дегилевич Е. А. Построение и анализ нелинейных форм колебаний трехзвенного маятника асимптотическими методами // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 4. С. 598–610. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-598-610>, EDN: ZBOGPA

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## Construction and analysis of nonlinear oscillation modes of a three-link pendulum by asymptotic methods

A. S. Smirnov<sup>1,2✉</sup>, S. A. Bulov<sup>3</sup>, E. A. Degilevich<sup>2,4</sup>

<sup>1</sup>Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, 29 Polytechnicheskaya St., St. Petersburg 195251, Russia

<sup>2</sup>Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, 61 Bolshoy Pr. V. O., St. Petersburg 199178, Russia

<sup>3</sup>Center of Engineering Physics, Simulation and Analysis (JSC “CEPSA”), 15/2 Kondratievsky Pr., St. Petersburg 195197, Russia

<sup>4</sup>CMT-Engineering, 28/2 Bolshoy Sampsonievskiy Pr., St. Petersburg 194044, Russia

**Alexey S. Smirnov**, smirnov.alexey.1994@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-6148-0322>, AuthorID: 947771

**Serafim A. Bulov**, tech.nature.engineering@gmail.com, <https://orcid.org/0009-0009-0490-2101>, AuthorID: 1192307

**Egor A. Degilevich**, DegilevichEgor@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-0142-4561>, AuthorID: 1076938

**Abstract.** This article is devoted to the study of nonlinear oscillations of one of the most common systems with three degrees of freedom – a three-link mathematical pendulum, the parameters of all weightless links and all end loads of which are assumed to be identical. The wide use of the three-link pendulum model in applied problems of robotics and biomechanics, as well as its important scientific significance in the problems of equilibrium stability, stabilization and motion control are discussed. The question of finding nonlinear oscillation modes of a three-link pendulum is considered, the knowledge of which makes it possible to implement single-frequency modes of its motion with sufficiently large deviations. For this purpose, asymptotic methods of nonlinear mechanics are used, which make it possible to determine the oscillation modes of the system in the first approximation within a weakly nonlinear model. The main features of the constructed nonlinear oscillation modes are discussed and their qualitative and quantitative differences from the traditional linear modes of small oscillations are revealed. In addition, it is noted that nonlinear oscillation modes can also be found on the basis of numerical simulation by accelerating the system under the action of collinear control from small deviations specified on a linear mode to finite amplitudes with access to single-frequency motion on a nonlinear mode. The obtained analytical expressions for the frequencies of nonlinear oscillations and the ratios of the oscillation amplitudes of the pendulum links for each of the nonlinear modes are compared with similar numerical dependencies by constructing graphic illustrations corresponding to them at the same level of total mechanical energy. It is established that the analytical and numerical results are in agreement with each other, which determines the value of the approximate solution constructed in the work. The formulas obtained and the conclusions drawn are of undoubted theoretical interest, and they may also be helpful for their use in specific practical purposes.

**Keywords:** three-link mathematical pendulum, nonlinear oscillation mode, asymptotic methods

**For citation:** Smirnov A. S., Bulov S. A., Degilevich E. A. Construction and analysis of nonlinear oscillation modes of a three-link pendulum by asymptotic methods. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 4, pp. 598–610 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-598-610>, EDN: ZBOGPA



This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Трехзвенный гравитационный маятник и его различные модификации в последнее время достаточно часто принимаются в качестве объектов исследования во многих научных работах. В первую очередь, это связано с тем, что подобные конструкции активно применяются в робототехнике и биомеханике, что и обуславливает их важное значение и интерес к ним со стороны ученых и исследователей.

В самом деле, в робототехнике модель трехзвенного маятника может использоваться для анализа поведения различных манипуляторов и промышленных роботов или представлять собой элемент какой-либо сложной составной конструкции. Изучение этой области позволит в будущем разрабатывать дешевые и эффективные автоматические системы, которые окажут помощь человеку в промышленности и смогут оптимизировать производственный процесс по многим параметрам. При этом о достаточной разработанности проблемы движения трехзвенного маятника свидетельствует наличие публикаций последних лет, которые посвящены экспериментальному исследованию устойчивости обращенного трехзвенного маятника [1], его стабилизации различными способами [2, 3], управлению движением трехзвенных конструкций [4–8], исследованию устойчивости равновесия трехзвенного маятника под действием следящих нагрузок [9, 10], анализу устойчивости его относительных равновесий [11], а также изучению ударной динамики трехзвенного маятника с учетом демпфирования [12]. Необходимо также отметить, что модель трехзвенного маятника может быть использована и как конечномерная аппроксимация тяжелой цепи, подвешенной за один из своих концов [13].

В биомеханике трехзвенная маятниковая модель может служить простейшим и в то же время достаточно адекватным приближением к конечностям человека или животного [14], а также описывать позу человека в целом [15, 16]. В этом случае на основе данной модели можно изучать естественные движения живых организмов в природе. Данная сфера является особенно важной и перспективной, так как многие эффективные и надежные инженерные решения зачастую заимствуются именно у природы, где они вырабатываются эволюционным путем на протяжении тысячелетий, а потому могут быть успешно приспособлены для конкретных прикладных задач. Отдельно стоит упомянуть и о применении модели трехзвенного маятника на стыке робототехники и биомеханики как важного компонента при разработке и исследовании экзоскелета, т. е. устройства, позволяющего существенно расширить возможности человеческого тела — его физическую силу и выносливость [17].

При этом важное прикладное значение представляет вопрос об управлении формами колебаний трехзвенного маятника. Для этой цели необходимо использовать адекватный закон управления, который позволит передавать всю подводимую в систему энергию на возбуждение только одной формы колебаний, не затрачивая ее на развитие других форм [18]. Естественно, что именно такой подход следует признать рациональным, поскольку при разгоне системы сразу по всем ее формам колебаний будет резко снижено качество процессов управляемого движения системы. Наибольший интерес представляет исследование указанных управляемых процессов разгона трехзвенного маятника от малых и до достаточно больших отклонений, т. е. с учетом плавного перехода от линейной области к нелинейной и с выходом на установившийся режим движения [19]. В этой связи данная задача тесно связана с проблемой построения нелинейных форм колебаний, структура которых является отнюдь не тривиальной и существенно зависит от характера нелинейности системы, что было отчетливо продемонстрировано и на примере трехзвенного маятника в работе [20] при помощи численного моделирования. Под нелинейной формой колебаний здесь подразумевается одночастотный режим движения нелинейной системы, который обычно и используется в практических приложениях, что определяет важность подробного описания таких режимов функционирования.



В качестве цели настоящего исследования принимаются построение и анализ нелинейных форм колебаний трехзвенного маятника в первом приближении при помощи асимптотических методов и их сопоставление с результатами численного моделирования, подразумевающего организацию управляемого разгона системы с постепенным дрейфом формы колебаний от линейного варианта к нелинейному.

### 1. Математическая модель колебаний трехзвенного маятника

Рассмотрим трехзвенный математический маятник, длины всех невесомых звеньев которого для простоты полагаются одинаковыми и равными  $l$ , а массы всех концевых грузов также считаются идентичными и равными  $m$  (рис. 1).

Выражения для кинетической и потенциальной энергий этой системы были получены в работе [19], и они имеют следующий вид:

$$T = \frac{1}{2}ml^2 [3\dot{\varphi}_1^2 + 2\dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2 + 4 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + 2 \cos(\varphi_3 - \varphi_1)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_3 + 2 \cos(\varphi_3 - \varphi_2)\dot{\varphi}_2\dot{\varphi}_3] = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad (1)$$

$$\Pi = mgl(6 - 3 \cos \varphi_1 - 2 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_3) = \Pi(\mathbf{q}), \quad (2)$$

где  $\mathbf{q} = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]^T$  — столбец обобщенных координат, в качестве которых принимаются углы  $\varphi_1, \varphi_2$  и  $\varphi_3$  отклонения звеньев маятника от вертикали, а симметричная матрица  $\mathbf{A}(\mathbf{q})$  кинетической энергии (1) есть

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = ml^2 \begin{bmatrix} 3 & 2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) & \cos(\varphi_3 - \varphi_1) \\ 2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) & 2 & \cos(\varphi_3 - \varphi_2) \\ \cos(\varphi_3 - \varphi_1) & \cos(\varphi_3 - \varphi_2) & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^T = \mathbf{A}.$$

Уравнения движения трехзвенного маятника могут быть записаны в виде одного нелинейного матричного уравнения [19]:

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}^2 + \mathbf{C} \sin \mathbf{q} = 0, \quad (3)$$

причем здесь использованы следующие удобные обозначения:  $\dot{\mathbf{q}}^2 = [\dot{\varphi}_1^2, \dot{\varphi}_2^2, \dot{\varphi}_3^2]^T$  — столбец квадратов обобщенных скоростей,  $\sin \mathbf{q} = [\sin \varphi_1, \sin \varphi_2, \sin \varphi_3]^T$  — столбец синусов обобщенных координат, а кососимметричная матрица  $\mathbf{G}(\mathbf{q})$  и симметричная постоянная матрица  $\mathbf{C}$  есть

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = ml^2 \begin{bmatrix} 0 & -2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) & -\sin(\varphi_3 - \varphi_1) \\ 2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) & 0 & -\sin(\varphi_3 - \varphi_2) \\ \sin(\varphi_3 - \varphi_1) & \sin(\varphi_3 - \varphi_2) & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}^T = -\mathbf{G},$$

$$\mathbf{C} = mgl \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^T = \mathbf{C}.$$

Линеаризуя полученное выше матричное уравнение движения (3) вблизи положения устойчивого равновесия  $\mathbf{q} = 0$  (т. е.  $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \varphi_3 = 0$ ), можно получить линейную математическую модель колебаний трехзвенного маятника [19]:

$$\mathbf{A}_0\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_0\mathbf{q} = 0,$$

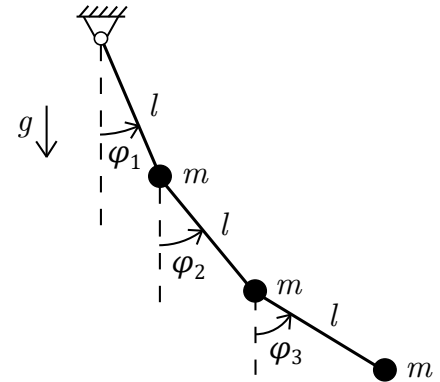


Рис. 1. Расчетная схема трехзвенного математического маятника  
Fig. 1. Calculation scheme of a three-link mathematical pendulum

где  $\mathbf{A}_0 = ml^2 \hat{\mathbf{A}}_0$  – постоянная симметричная матрица инерционных коэффициентов, а  $\mathbf{C}_0 = mgl \hat{\mathbf{C}}_0$  – постоянная симметричная матрица квазиупругих коэффициентов, причем отвечающие им безразмерные матрицы  $\hat{\mathbf{A}}_0$  и  $\hat{\mathbf{C}}_0$  имеют следующий вид:

$$\hat{\mathbf{A}}_0 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{C}}_0 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Соответствующие этой модели частоты малых колебаний  $k_{s0}$  трехзвенного маятника были получены в работе [20], и в безразмерном варианте  $p_{s0} = k_{s0}/k$  они имеют вид

$$p_{10} = 0.645, \quad p_{20} = 1.515, \quad p_{30} = 2.508, \quad (5)$$

где для краткости обозначено  $k = \sqrt{g/l}$  – частота малых колебаний математического маятника длиной  $l$ . Формы малых колебаний трехзвенного маятника тоже были найдены в работе [20], и они определяются следующими столбцами:

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.292 \\ 1.631 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.353 \\ -2.398 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.645 \\ 0.767 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Для дальнейших действий понадобятся также безразмерные нормировочные коэффициенты  $N_s = \mathbf{Q}_s^T \hat{\mathbf{A}}_0 \mathbf{Q}_s$ , которые с учетом (4) и (6) имеют следующие значения:

$$N_1 = 21.646, \quad N_2 = 3.923, \quad N_3 = 1.431. \quad (7)$$

## 2. Построение нелинейных форм колебаний трехзвенного маятника

Для нахождения нелинейных форм колебаний системы будем использовать асимптотические методы нелинейной механики [21]. С этой целью обратимся к матричному уравнению (3) и разложим матрицы  $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{G}(\mathbf{q})$  и столбец  $\sin \mathbf{q}$  в ряды Тейлора по столбцу обобщенных координат  $\mathbf{q}$  и удержим в этих разложениях лишь те слагаемые, которые необходимы для построения первого приближения:

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_0 + \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{q}) + \dots, \quad \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) + \dots, \quad \sin \mathbf{q} = \mathbf{q} - \frac{1}{6} \mathbf{q}^3 + \dots,$$

где матрица  $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{q})$  имеет второй порядок малости и определяется выражением

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{q}) = -\frac{ml^2}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2(\varphi_2 - \varphi_1)^2 & (\varphi_3 - \varphi_1)^2 \\ 2(\varphi_2 - \varphi_1)^2 & 0 & (\varphi_3 - \varphi_2)^2 \\ (\varphi_3 - \varphi_1)^2 & (\varphi_3 - \varphi_2)^2 & 0 \end{bmatrix},$$

матрица  $\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{q})$  имеет первый порядок малости и задается формулой

$$\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) = ml^2 \begin{bmatrix} 0 & -2(\varphi_2 - \varphi_1) & -(\varphi_3 - \varphi_1) \\ 2(\varphi_2 - \varphi_1) & 0 & -(\varphi_3 - \varphi_2) \\ \varphi_3 - \varphi_1 & \varphi_3 - \varphi_2 & 0 \end{bmatrix},$$

а под  $\mathbf{q}^3 = [\varphi_1^3, \varphi_2^3, \varphi_3^3]^T$  понимается столбец кубов обобщенных координат. Тогда уравнение (3) может быть переписано в следующем виде:

$$\mathbf{A}_0 \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_0 \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}), \quad \mathbf{P}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = -\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}^2 + \frac{1}{6} \mathbf{C}_0 \mathbf{q}^3, \quad (8)$$

причем в его левой части находятся лишь линейные слагаемые, а в правой части стоит столбец  $\mathbf{P}$ , который имеет третий порядок малости, и он может трактоваться как столбец



вынуждающих сил, действующих в линейной системе. Таким образом, (8) есть матричное уравнение колебаний трехзвенного маятника в рамках слабо-нелинейной модели, которое учитывает кубическую нелинейность и тем самым дает возможность построить нелинейные формы колебаний в первом приближении.

Будем искать решения уравнения (8) в исходном варианте в следующем виде:

$$\mathbf{q} = \mathbf{Q}_s a \cos \psi, \quad k_s(a) = \dot{\psi} = k_{s0} (1 + \beta_s a^2), \quad a = \text{const}, \quad (9)$$

т. е. по формам колебаний линейной системы  $\mathbf{Q}_s$ , но с измененными частотами  $k_s$ , которые зависят от величины  $a$ , характеризующей амплитуды колебаний звеньев маятника при движении по выбранной форме. При этом зависимости  $k_s(a)$ , исходя из учета кубической нелинейности в уравнении (8), должны быть, очевидно, квадратичными по  $a$ , а поправочные коэффициенты  $\beta_s$  в них могут быть найдены из уравнений гармонического баланса по заданным формам колебаний  $\mathbf{Q}_s$  [21]:

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{Q}_s^T (\mathbf{A}_0 \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_0 \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{P}) \cos \psi d\psi = 0. \quad (10)$$

Эти уравнения должны удовлетворяться с точностью до величин третьего порядка малости. Определяя с указанной точностью столбец  $\ddot{\mathbf{q}}$  на основании формул (9), вычислим сначала комбинацию  $\mathbf{A}_0 \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_0 \dot{\mathbf{q}}$ , входящую в уравнения (10), переходя при этом к безразмерным матрицам (4) и частотам (5), а также принимая во внимание, что формы колебаний  $\mathbf{Q}_s$  и соответствующие им безразмерные частоты  $p_{s0}$  в линейной модели подчинены уравнениям  $(\hat{\mathbf{C}}_0 - p_{s0}^2 \hat{\mathbf{A}}_0) \mathbf{Q}_s = 0$ :

$$\mathbf{A}_0 \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_0 \dot{\mathbf{q}} = -2mgl\beta_s p_{s0}^2 \hat{\mathbf{A}}_0 \mathbf{Q}_s a^3 \cos \psi. \quad (11)$$

Для вычисления столбца вынуждающих сил  $\mathbf{P}$  с необходимой точностью достаточно подставить в соответствующую формулу (8)  $\mathbf{q} = \mathbf{Q}_s a \cos \psi$ ,  $\dot{\mathbf{q}} = -\mathbf{Q}_s a k_{s0} \sin \psi$ ,  $\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{Q}_s a k_{s0}^2 \cos \psi$ , вследствие чего будем иметь

$$\mathbf{P} = mgl a^3 \left[ \left( p_{s0}^2 \hat{\mathbf{A}}_s \mathbf{Q}_s + \frac{1}{6} \hat{\mathbf{C}}_0 \mathbf{Q}_s^3 \right) \cos^3 \psi - p_{s0}^2 \hat{\mathbf{G}}_s \mathbf{Q}_s^2 \cos \psi \sin^2 \psi \right], \quad (12)$$

где условные обозначения  $\mathbf{Q}_s^2$  и  $\mathbf{Q}_s^3$  подразумевают столбцы квадратов и кубов элементов форм колебаний, а безразмерные матрицы  $\hat{\mathbf{A}}_s$  и  $\hat{\mathbf{G}}_s$  имеют представления

$$\hat{\mathbf{A}}_s = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2(Q_{2s} - Q_{1s})^2 & (Q_{3s} - Q_{1s})^2 \\ 2(Q_{2s} - Q_{1s})^2 & 0 & (Q_{3s} - Q_{2s})^2 \\ (Q_{3s} - Q_{1s})^2 & (Q_{3s} - Q_{2s})^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$\hat{\mathbf{G}}_s = \begin{bmatrix} 0 & -2(Q_{2s} - Q_{1s}) & -(Q_{3s} - Q_{1s}) \\ 2(Q_{2s} - Q_{1s}) & 0 & -(Q_{3s} - Q_{2s}) \\ Q_{3s} - Q_{1s} & Q_{3s} - Q_{2s} & 0 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Для дальнейших действий формулу (12) удобно преобразовать к следующей форме:

$$\mathbf{P} = mgl a^3 (\mathbf{U}_s \cos \psi + \mathbf{V}_s \cos 3\psi), \quad (15)$$

где для столбцов  $\mathbf{U}_s$  и  $\mathbf{V}_s$  сделаны следующие обозначения:

$$\mathbf{U}_s = \frac{p_{s0}^2}{4} (3\hat{\mathbf{A}}_s \mathbf{Q}_s - \hat{\mathbf{G}}_s \mathbf{Q}_s^2) + \frac{1}{8} \hat{\mathbf{C}}_0 \mathbf{Q}_s^3, \quad \mathbf{V}_s = \frac{p_{s0}^2}{4} (\hat{\mathbf{A}}_s \mathbf{Q}_s + \hat{\mathbf{G}}_s \mathbf{Q}_s^2) + \frac{1}{24} \hat{\mathbf{C}}_0 \mathbf{Q}_s^3. \quad (16)$$



Подставляя выражения (11) и (15) в уравнения гармонического баланса (10), получим с учетом обозначений (7) и первого соотношения (16) формулу для искомым поправочных коэффициентов  $\beta_s$ :

$$\beta_s = -\frac{\mathbf{Q}_s^T \mathbf{U}_s}{2p_{s0}^2 N_s} = \frac{1}{16p_{s0}^2 N_s} \mathbf{Q}_s^T \left[ 2p_{s0}^2 \left( \widehat{\mathbf{G}}_s \mathbf{Q}_s^2 - 3\widehat{\mathbf{A}}_s \mathbf{Q}_s \right) - \widehat{\mathbf{C}}_0 \mathbf{Q}_s^3 \right].$$

После подстановки сюда числовых значений согласно (4)–(7), (13) и (14) находим:

$$\beta_1 = -0.0959, \quad \beta_2 = -2.405, \quad \beta_3 = -5.421. \tag{17}$$

Таким образом, для частот колебаний при движении по каждой из нелинейных форм имеем согласно (9) и (17) в безразмерном варианте  $p_s = k_s/k$  следующие выражения:

$$p_1 = p_{10} (1 - 0.0959a^2), \quad p_2 = p_{20} (1 - 2.405a^2), \quad p_3 = p_{30} (1 - 5.421a^2). \tag{18}$$

Отсюда видно, что чем выше номер частоты, тем сильнее отношение  $p_s/p_{s0}$  зависит от величины  $a$  вследствие учета кубической нелинейности, т. е. роль нелинейных факторов особенно велика на высоких частотах.

Перейдем теперь к нахождению решений с точностью до третьего порядка малости, уточнив тем самым первую из формул (9) и получив представление о нелинейных формах колебаний в первом приближении. С этой целью выясним, какие вынужденные колебания возбуждает сила  $\mathbf{P}$  из формулы (15) в линейной системе [21]. Подставляя (15) в (8) и принимая во внимание при решении получившегося уравнения, что гармоника  $\cos \psi$  уже сбалансирована по форме  $\mathbf{Q}_s$  ввиду (10), так что учитывать ее здесь не нужно, получим

$$\mathbf{q}_P(a, \psi) = (\mathbf{u}_s \cos \psi + \mathbf{v}_s \cos 3\psi) a^3, \tag{19}$$

где для столбцов  $\mathbf{u}_s$  и  $\mathbf{v}_s$  сделаны следующие обозначения:

$$\mathbf{u}_s = \sum_{r=1, r \neq s}^3 \mathbf{Q}_r \frac{\mathbf{Q}_r^T \mathbf{U}_s}{N_r(p_{r0}^2 - p_{s0}^2)}, \quad \mathbf{v}_s = \sum_{r=1}^3 \mathbf{Q}_r \frac{\mathbf{Q}_r^T \mathbf{V}_s}{N_r(p_{r0}^2 - 9p_{s0}^2)}. \tag{20}$$

Прибавляя (19) к первой формуле (9), получим искомые решения

$$\mathbf{q} = \mathbf{Q}_s a \cos \psi + \mathbf{q}_P(a, \psi) = (\mathbf{Q}_s a + \mathbf{u}_s a^3) \cos \psi + \mathbf{v}_s a^3 \cos 3\psi. \tag{21}$$

Выпишем числовые значения элементов столбцов  $\mathbf{u}_s$  и  $\mathbf{v}_s$  согласно (20) и с учетом (16):

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -0.0231 \\ 0.0107 \\ 0.0255 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1.310 \\ 2.020 \\ -1.044 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0.599 \\ 0.150 \\ -1.700 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0.084 \\ 0.131 \\ -0.395 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -0.237 \\ -0.898 \\ 1.539 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1.319 \\ 2.173 \\ -1.182 \end{bmatrix}.$$

Определим амплитуды колебаний звеньев маятника  $A_{1s}$ ,  $A_{2s}$  и  $A_{3s}$  в зависимости от параметра  $a$ , учитывая, что при не очень больших значениях  $a$  они достигаются так же, как и в линейной модели, при  $\psi = 0$ , поэтому согласно (21) будем иметь

$$A_{1s} = Q_{1s} a + (u_{1s} + v_{1s}) a^3, \quad A_{2s} = Q_{2s} a + (u_{2s} + v_{2s}) a^3, \quad A_{3s} = Q_{3s} a + (u_{3s} + v_{3s}) a^3.$$

В явном виде эти зависимости примет следующий вид:

$$A_{11} = a + 0.0612a^3, \quad A_{12} = a - 1.547a^3, \quad A_{13} = a - 0.720a^3,$$



$$\begin{aligned} A_{21} &= 1.292a + 0.1416a^3, & A_{22} &= 0.353a + 1.122a^3, & A_{23} &= -1.645a + 2.322a^3, \\ A_{31} &= 1.631a - 0.369a^3, & A_{32} &= -2.398a + 0.494a^3, & A_{33} &= 0.767a - 2.882a^3. \end{aligned}$$

Образуем теперь отношения  $\mu_s = A_{2s}/A_{1s}$  и  $\eta_s = A_{3s}/A_{1s}$  и составим для них приближенные выражения путем их разложения в ряд с удержанием одной поправки:

$$\begin{aligned} \mu_s &= \mu_{s0} \left[ 1 + \left( \frac{u_{2s} + v_{2s}}{Q_{2s}} - \frac{u_{1s} + v_{1s}}{Q_{1s}} \right) a^2 \right], \\ \eta_s &= \eta_{s0} \left[ 1 + \left( \frac{u_{3s} + v_{3s}}{Q_{3s}} - \frac{u_{1s} + v_{1s}}{Q_{1s}} \right) a^2 \right], \end{aligned} \quad (22)$$

где  $\mu_{s0} = Q_{2s}/Q_{1s}$  и  $\eta_{s0} = Q_{3s}/Q_{1s}$  — соотношения амплитуд колебаний звеньев маятника в рамках линейной модели, так что  $\mu_{10} = 1.292$ ,  $\mu_{20} = 0.353$ ,  $\mu_{30} = -1.645$ ,  $\eta_{10} = 1.631$ ,  $\eta_{20} = -2.398$ ,  $\eta_{30} = 0.767$ . В явном виде формулы (22) приобретают вид

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \mu_{10} (1 + 0.0483a^2), & \mu_2 &= \mu_{20} (1 + 4.727a^2), & \mu_3 &= \mu_{30} (1 - 0.692a^2), \\ \eta_1 &= \eta_{10} (1 - 0.288a^2), & \eta_2 &= \eta_{20} (1 + 1.341a^2), & \eta_3 &= \eta_{30} (1 - 3.038a^2). \end{aligned} \quad (23)$$

Остается вычислить полную механическую энергию системы  $E = T + \Pi$  с точностью до слагаемых четвертого порядка малости по параметру  $a$ . Обращаясь с этой целью к формулам (1) и (2) и удерживая в  $T$  и  $\Pi$  после разложения тригонометрических функций в ряды лишь необходимые слагаемые, будем иметь

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} ml^2 \left[ 3\dot{\varphi}_1^2 + 2\dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2 + 4 \left( 1 - \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)^2}{2} \right) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + 2 \left( 1 - \frac{(\varphi_3 - \varphi_1)^2}{2} \right) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_3 + \right. \\ &\quad \left. + 2 \left( 1 - \frac{(\varphi_3 - \varphi_2)^2}{2} \right) \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3 \right] + \frac{1}{2} mgl \left( 3\varphi_1^2 + 2\varphi_2^2 + \varphi_3^2 - \frac{\varphi_1^4}{4} - \frac{\varphi_2^4}{6} - \frac{\varphi_3^4}{12} \right). \end{aligned}$$

Подставляя в эту формулу решения (21) и учитывая при вычислении угловых скоростей  $\dot{\varphi}_1$ ,  $\dot{\varphi}_2$  и  $\dot{\varphi}_3$ , что частоты колебаний определяются формулами (18), можно получить выражения для полной энергии при движении по каждой из трех нелинейных форм колебаний с точностью до четвертого порядка малости:

$$E_1 = E_0 (1 - 0.157a^2), \quad E_2 = E_0 (1 - 1.453a^2), \quad E_3 = E_0 (1 - 2.836a^2), \quad (24)$$

где  $E_0 = 4.5mgl a^2$  — полная энергия в рамках линейной модели, причем представление для нее одинаково для всех форм колебаний. Видно, что в формулах (24) отсутствует зависимость от  $\psi$ , как это и должно быть, поскольку полная энергия в силу консервативности задачи должна оставаться постоянной величиной во времени.

Таким образом, в рамках модели колебаний трехзвенного маятника с учетом слабой нелинейности движение системы по каждой из трех нелинейных форм колебаний описывается формулой (21), подчеркивающей периодический, но уже не гармонический характер этих форм колебаний. Поэтому для описания движения по нелинейным формам колебаний необходимо указание конкретных зависимостей обобщенных координат от времени, а не только знание частот (18) и соотношений амплитуд колебаний (23), чего было вполне достаточно в линейной модели ввиду гармонического характера форм малых колебаний. Это означает, что упомянутые величины не дают полного представления о нелинейных формах колебаний, однако они являются их важными показателями, позволяющими оценить количественные отличия нелинейных форм колебаний от линейных при не очень больших уровнях энергии. Кроме того, именно их удобно рассматривать при сопоставлении приближенных аналитических результатов с численными, к чему мы и переходим.





### 3. Обсуждение результатов

Чтобы сравнить найденные выше аналитические решения с результатами численного интегрирования, необходимо указать, что для получения нелинейных форм колебаний трехзвенного маятника при помощи численного моделирования следует организовать управляемое движение системы под действием коллинеарного управления, когда управляющие воздействия по всем степеням свободы формируются пропорционально обобщенным импульсам [18, 19]. Важнейшим достоинством этого управления является то, что оно позволяет осуществлять разгон системы с малых и вплоть до достаточно больших амплитуд по каждой из форм колебаний, не нарушая при этом формы малых колебаний и осуществляя их плавный переход в нелинейные формы колебаний [20]. Учитывая сказанное, столбец обобщенных управляющих сил  $\mathbf{R}$ , сформированных по принципу коллинеарного управления, можно представить в виде

$$\mathbf{R} = \gamma \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \gamma \mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad (25)$$

где принята во внимание формула (1), а  $\gamma$  — положительный коэффициент усиления, который можно принять величиной постоянной и достаточно малой, поскольку для постепенного перевода линейных форм колебаний в нелинейные нарастание колебаний должно быть достаточно медленным. Подставляя столбец (25) в правую часть матричного управления (3) и полагая начальные условия движения достаточно малыми и отвечающими поочередно каждой из форм малых колебаний (6) (для этого наиболее просто отклонить все звенья маятника в соответствии с требуемой формой колебаний и предоставить систему самой себе), можно наблюдать после осуществления процедуры численного интегрирования процесс управляемого разгона системы, сопровождаемый постепенным дрейфом форм колебаний из линейного варианта в нелинейный с ростом амплитуд. Для выхода на режим движения, отвечающий некоторому заданному уровню энергии  $E_*$ , достаточно отключить действие управления при достижении этого значения, после чего система перейдет в консервативное движение по интересующей нас нелинейной форме колебаний [20]. Полученные таким образом графические зависимости углов отклонения звеньев маятника от времени позволят снять все необходимые характеристики нелинейных форм колебаний. Подчеркнем также, что вместо  $E_*$  удобно ввести в рассмотрение безразмерную энергию  $\delta_* = E_*/(mgl)$ , значения которой следует принимать не очень большими, поскольку далее мы будем сравнивать численные результаты с аналитическими, полученными в рамках модели со слабой нелинейностью, когда формы колебаний еще не столь сильно отличаются от линейных.

Опишем теперь процесс сопоставления аналитических результатов с численными. Варьируя параметр  $a$ , построим сначала для каждой из трех форм колебаний зависимости отношения  $p_s/p_{s0}$  согласно (18) от этого параметра, а также зависимости отношений  $\mu_s/\mu_{s0}$  и  $\eta_s/\eta_{s0}$  согласно (23) от того же параметра. Отметим, что деление  $p_s$ ,  $\mu_s$  и  $\eta_s$  на  $p_{s0}$ ,  $\mu_{s0}$  и  $\eta_{s0}$  соответственно осуществляется из соображений удобства, чтобы все получившиеся таким образом зависимости при  $a = 0$  начинались из 1.

На рис. 2 указанные приближенные аналитические зависимости приведены сплошными линиями для всех форм колебаний. Далее будем поочередно фиксировать различные значения  $a$  в принятом на рис. 2 диапазоне для каждой из форм колебаний и определять отвечающие им безразмерные энергии  $\delta_s = E_s/(mgl)$  по формулам (24). Найденное таким образом то или иное значение  $\delta_s$  следует затем задать в качестве безразмерного желаемого уровня энергии  $\delta_*$ , на который требуется вывести систему при помощи коллинеарного управления. Это означает, что соответствие между аналитическими и численными результатами в принятом варианте станет осуществляться так, что им будет отвечать один и тот же уровень энергии.

Устанавливая в результате указанного численного моделирования безразмерную частоту колебаний  $p_s = k_s/k$  и соотношения амплитуд  $\mu_s = A_{2s}/A_{1s}$  и  $\eta_s = A_{3s}/A_{1s}$ , можно вычислить и интересующие нас величины  $p_s/p_{s0}$ ,  $\mu_s/\mu_{s0}$  и  $\eta_s/\eta_{s0}$ , принимая во внимание, что все необходимые для этого значения из линейной модели известны из точного решения.



На рис. 2 для всех форм колебаний численные результаты показаны кружками. Легко видеть, что при достаточно небольших значениях  $a$  эти кружки точно накладываются на сплошные линии, отвечающие приближенному решению в рамках слабо-нелинейной модели. Однако по мере увеличения  $a$  наблюдается постепенное расхождение численных и аналитических результатов, что становится более заметным с увеличением номера формы колебаний. Отсюда можно сделать вывод, что полученные аналитические формулы являются асимптотически корректными.

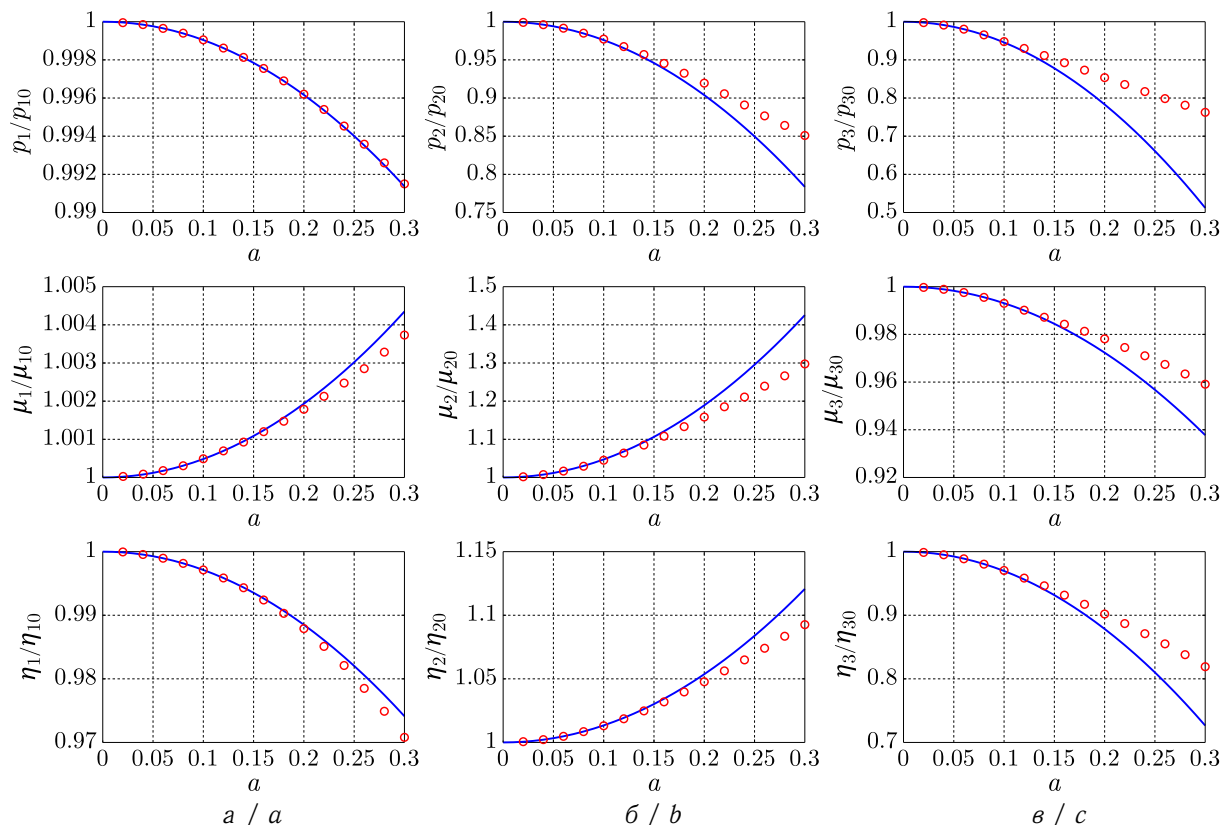


Рис. 2. Величины, характеризующие нелинейные формы колебаний трехзвенного маятника:  $a$  — первая форма колебаний ( $p_1/p_{10}$ ,  $\mu_1/\mu_{10}$ ,  $\eta_1/\eta_{10}$ );  $b$  — вторая форма колебаний ( $p_2/p_{20}$ ,  $\mu_2/\mu_{20}$ ,  $\eta_2/\eta_{20}$ );  $c$  — третья форма колебаний ( $p_3/p_{30}$ ,  $\mu_3/\mu_{30}$ ,  $\eta_3/\eta_{30}$ )  
 Fig. 2. The quantities characterizing the nonlinear oscillation modes of a three-link pendulum:  $a$  is the first oscillation mode ( $p_1/p_{10}$ ,  $\mu_1/\mu_{10}$ ,  $\eta_1/\eta_{10}$ );  $b$  is the second oscillation mode ( $p_2/p_{20}$ ,  $\mu_2/\mu_{20}$ ,  $\eta_2/\eta_{20}$ );  $c$  is the third oscillation mode ( $p_3/p_{30}$ ,  $\mu_3/\mu_{30}$ ,  $\eta_3/\eta_{30}$ )

### Заклучение

В настоящей работе был рассмотрен вопрос о построении и исследовании нелинейных форм колебаний трехзвенного маятника с идентичными параметрами звеньев и концевых грузов в первом приближении с учетом кубической нелинейности. При помощи асимптотических методов нелинейной механики были получены достаточно несложные приближенные решения, описывающие движение системы по каждой из нелинейных форм колебаний в отдельности с необходимой точностью и представляющие собой периодические, но уже не гармонические колебания. Это обстоятельство заметно усложняет характер нелинейных форм колебаний по сравнению с традиционными линейными формами малых колебаний, обобщением которых они являются. Указанные решения позволяют количественно оценить постепенный дрейф частот колебаний и соотношений между амплитудами колебаний звеньев маятника при плавном переходе из линейной зоны в слабо-нелинейную с увеличением амплитуд. Найденные



аналитические решения были сопоставлены с результатами численного моделирования, для чего осуществлялся управляемый разгон трехзвенного маятника при помощи коллинеарного управления с малых отклонений, отвечающих поочередно каждой из линейных форм колебаний, и вплоть до достижения режима колебательного движения по нелинейной форме с наперед заданным уровнем полной механической энергии. Сравнение аналитических и численных результатов, отвечающих одинаковому уровню энергии, показало их весьма хорошее соответствие при не очень больших амплитудах, что гарантирует достоверную асимптотику приведенного в работе приближенного решения и тем самым определяет его важное теоретическое и практическое значение. Полученные результаты могут представлять интерес при решении конкретных прикладных задач в области теории механических колебаний, динамики и управления движением маятниковых конструкций, а также современной робототехники и биомеханики.

### Список литературы

1. Грибков В. А., Хохлов А. О. Экспериментальное исследование устойчивости обращенных стабилизируемых маятников // Вестник Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана. Серия: Естественные науки. 2017. № 2 (71). С. 22–39. <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2017-2-22-39>, EDN: YJGTOR
2. Архипова И. М. О стабилизации тройного перевернутого маятника с помощью вибрации точки опоры с произвольной частотой // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6, № 2. С. 281–287. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.210>, EDN: KOOKGU
3. Jibril M., Tadese M., Tadese E. A. Comparison of a triple inverted pendulum stabilization using optimal control technique // Report and Opinion. 2020. Vol. 12, iss. 10. P. 62–70. <https://doi.org/10.7537/marsroj121020.10>
4. Ананьевский И. М. Управление трехзвенным перевернутым маятником в окрестности положения равновесия // Прикладная математика и механика. 2018. Т. 82, № 2. С. 149–155. EDN: XMTBXN
5. Glück T., Eder A., Kugi A. Swing-up control of a triple pendulum on a cart with experimental validation // Automatica. 2013. Vol. 49, iss. 3. P. 801–808. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2012.12.006>
6. Chen W., Theodomile N. Simulation of a triple inverted pendulum based on fuzzy control // World Journal of Engineering and Technology. 2016. Vol. 4, iss. 2. P. 267–272. <https://doi.org/10.4236/wjet.2016.42026>
7. Hussein M. T. CAD design and control of triple inverted-pendulums system // The Iraqi Journal for Mechanical and Materials Engineering. 2018. Vol. 18, iss. 3. P. 481–497. <https://doi.org/10.32852/ijqjfmme.v18i3.183>
8. Huang X., Wen F., Wei Z. Optimization of triple inverted pendulum control process based on motion vision // EURASIP Journal on Image and Video Processing. 2018. Vol. 2018, iss. 73. P. 1–8. <https://doi.org/10.1186/s13640-018-0294-6>
9. Иванова А. И. Об устойчивости положения равновесия трехзвенного маятника под действием следящей силы // Вестник Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана. Серия: Естественные науки. 2004. № 3 (14). С. 19–26.
10. Kovalchuk V. Triple inverted pendulum with a follower force: Decomposition on the equations of perturbed motion // Danish Scientific Journal. 2020. № 36-2. P. 46–48. EDN: MWQFZL
11. Евдокименко А. П. Устойчивость и ветвление относительных равновесий трехзвенного маятника в быстровращающейся системе отсчета // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73, № 6. С. 902–920. EDN: KXXQUH
12. Awrejcewicz J., Kudra G., Lamarque C.-H. Investigation of triple pendulum with impacts using fundamental solution matrices // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2004. Vol. 14, iss. 2. P. 4191–4213. <https://doi.org/10.1142/S0218127404011818>
13. Смирнов А. С., Дегилевич Е. А. Колебания цепных систем. Санкт-Петербург : Политех-Пресс, 2021. 246 с. EDN: XIOEBN
14. Agarana M. C., Akinlabi E. T. Mathematical modelling and analysis of human arm as a triple pendulum system using Euler – Lagrangian model // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. Vol. 413. The 2nd International Conference on Engineering for Sustainable World (ICESW 2018), 9–13 July 2018. Mechanical Engineering Department, Covenant University. Ota, Nigeria. 2018. Art. 012010. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/413/1/012010>



15. Новожилов И. В., Терехов А. В., Забелин А. В., Левик Ю. С., Шлыков В. Ю., Казенников О. В. Трехзвенная математическая модель для задачи стабилизации вертикальной позы человека // Математическое моделирование движений человека в норме и при некоторых видах патологии / под ред. И. В. Новожилова, П. А. Кручинина. Москва : Изд-во МГУ, 2005. С. 7–20.
16. Тяжелов А. А., Кизилова Н. Н., Фищенко В. А., Яремич С. Ю., Карпинский М. Ю., Карпинская Е. Д. Анализ стабильности на основе математической модели тела человека как многосвязной системы // Травма. 2012. Т. 13, № 4. С. 17–25. EDN: RBKNXF
17. Лоскутов Ю. В., Кудрявцев И. А. Оценка максимального момента в коленном приводе экзоскелета при вставании с опоры // Вестник Поволжского государственного технического университета. Серия: Материалы. Конструкции. Технологии. 2018. № 3 (7). С. 55–62. EDN: YZUYPZ
18. Смирнов А. С., Смольников Б. А. Управление резонансными колебаниями нелинейных механических систем на основе принципов биодинамики // Машиностроение и инженерное образование. 2017. № 4 (53). С. 11–19. EDN: YNTDQY
19. Булов С. А., Смирнов А. С. Управление формами колебаний трехзвенного маятника // Неделя науки ФизМех : сб. ст. Всерос. науч. конф. (Санкт-Петербург, 4–9 апреля 2022 г.). Санкт-Петербург : Политех-Пресс, 2022. С. 184–186. EDN: UGWRVB
20. Смирнов А. С., Булов С. А., Смольников Б. А. Численное моделирование нелинейных форм колебаний трехзвенного манипулятора // Современное машиностроение: Наука и образование : материалы 12-й Междунар. науч. конф. (Санкт-Петербург, 22 июня 2023 г.) / под ред. А. Н. Евграфова, А. А. Поповича. Санкт-Петербург : Политех-Пресс, 2023. С. 117–133. EDN: IEONKZ
21. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Москва : ГИФМЛ, 1958. 408 с.

### References

1. Gribkov V. A., Khokhlov A. O. Experimental study of inverted regulable pendulum stability. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2017, iss. 2 (71), pp. 22–39 (in Russian). <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2017-2-22-39>, EDN: YJGTOR
2. Arkhipova I. M. On stabilization of a triple inverted pendulum via vibration of a support point with an arbitrary frequency. *Vestnik of the St. Petersburg University: Mathematics*, 2019, vol. 52, iss. 2, pp. 194–198. <https://doi.org/10.1134/S1063454119020031>, EDN: DCCHMC
3. Jibril M., Tadese M., Tadese E. A. Comparison of a triple inverted pendulum stabilization using optimal control technique. *Report and Opinion*, 2020, vol. 12, iss. 10, pp. 62–70. <https://doi.org/10.7537/marsroj121020.10>
4. Anan'evskii I. M. The control of a three-link inverted pendulum near the equilibrium point. *Mechanics of Solids*, 2018, vol. 53, suppl. 1, pp. S16–S21. <https://doi.org/10.3103/S0025654418030020>, EDN: NIEIYE
5. Glück T., Eder A., Kugi A. Swing-up control of a triple pendulum on a cart with experimental validation. *Automatica*, 2013, vol. 49, iss. 3, pp. 801–808. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2012.12.006>
6. Chen W., Theodomile N. Simulation of a triple inverted pendulum based on fuzzy control. *World Journal of Engineering and Technology*, 2016, vol. 4, iss. 2, pp. 267–272. <https://doi.org/10.4236/wjet.2016.42026>
7. Hussein M. T. CAD design and control of triple inverted-pendulums system. *The Iraqi Journal for Mechanical and Materials Engineering*, 2018, vol. 18, iss. 3, pp. 481–497. <https://doi.org/10.32852/ijqjfmme.v18i3.183>
8. Huang X., Wen F., Wei Z. Optimization of triple inverted pendulum control process based on motion vision. *EURASIP Journal on Image and Video Processing*, 2018, vol. 2018, iss. 73, pp. 1–8. <https://doi.org/10.1186/s13640-018-0294-6>
9. Ivanova A. I. On the stability of the equilibrium position of a three-link pendulum under the action of a follower force. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2004, iss. 3 (14), pp. 19–26 (in Russian).
10. Kovalchuk V. Triple inverted pendulum with a follower force: Decomposition on the equations of perturbed motion. *Danish Scientific Journal*, 2020, iss. 36-2, pp. 46–48. EDN: MWQFZL
11. Evdokimenko A. P. Stability and branching of the relative equilibria of a three-link pendulum in a rapidly rotating frame of reference. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2009, vol. 73, iss. 6, pp. 648–663. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2010.01.005>, EDN: NAKFXN
12. Awrejcewicz J., Kudra G., Lamarque C.-H. Investigation of triple pendulum with impacts using



- fundamental solution matrices. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2004, vol. 14, iss. 2, pp. 4191–4213. <https://doi.org/10.1142/S0218127404011818>
13. Smirnov A. S., Degilevich E. A. *Oscillations of chain systems*. St. Petersburg, Polytech-Press, 2021. 246 p. (in Russian). EDN: [XIOEBN](#)
  14. Agarana M. C., Akinlabi E. T. Mathematical modelling and analysis of human arm as a triple pendulum system using Euler – Lagrangian model. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, vol. 413. The 2nd International Conference on Engineering for Sustainable World (ICESW 2018), July 9–13, 2018. Mechanical Engineering Department, Covenant University, Ota, Nigeria, 2018, art. 012010. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/413/1/012010>
  15. Novozhilov I. V., Terekhov A. V., Zabelin A. V., Levik Yu. S., Shlykov V. Yu., Kazennikov O. V. Three-link mathematical model for the problem of stabilization of the vertical posture of a person. In: Novozhilov I. V., Kruchinin P. A. (eds.) *Matematicheskoe modelirovanie dvizheniy cheloveka v norme i pri nekotorykh vidakh patologii* [Mathematical modeling of human movements in normal conditions and in some types of pathology]. Moscow, Moscow University Press, 2005, pp. 7–20 (in Russian).
  16. Tyazhelov A. A., Kizilova N. N., Fischenko V. A., Yaremin S. Yu., Karpinsky M. Yu., Karpinskaya Ye. D. Analysis of posturography based on mathematical model of human body as multilink system. *Trauma* [Injury], 2012, vol. 13, iss. 4, pp. 17–25 (in Russian). EDN: [RBKNXF](#)
  17. Loskutov Yu. V., Kudryavcev I. A. Determination of the maximum torque in the knee drive of exoskeleton during “sit-to-stand” and “stand-to-sit” movement. *Vestnik of Volga State University of Technology. Series: Materials. Constructions. Technologies*, 2018, iss. 3 (7), pp. 55–62 (in Russian). EDN: [YZUYPZ](#)
  18. Smirnov A. S., Smolnikov B. A. Resonance oscillations control of the non-linear mechanical systems based on the principles of biodynamics. *Mashinostroenie i inzhenerное образование* [Mechanical Engineering and Engineering Education], 2017, iss. 4 (53), pp. 11–19 (in Russian). EDN: [YNTDQY](#)
  19. Bulov S. A., Smirnov A. S. Control of the oscillation modes of a three-link pendulum. In: *Nedelya nauki FizMekh* [Week of Science PhysMech]. Collection of articles of the All-Russian Scientific Conference (St. Petersburg, April 04–09, 2022). St. Petersburg, Polytech-Press, 2022, pp. 184–186 (in Russian). EDN: [UGWRVB](#)
  20. Smirnov A. S., Bulov S. A., Smolnikov B. A. Numerical simulation of nonlinear oscillation modes of a three-link manipulator. In: Evgrafov A. N., Popovich A. A. (eds.) *Sovremennoe mashinostroenie: Nauka i obrazovanie* [Modern Mechanical Engineering: Science and Education]. Proceedings of the 12th International Scientific Conference (St. Petersburg, June 22, 2023). St. Petersburg, Polytech-Press, 2023, pp. 117–133 (in Russian). EDN: [IEOHKZ](#)
  21. Bogolyubov N. N., Mitropol'skiy Yu. A. *Asimptoticheskie metody v teorii nelineynykh kolebaniy* [Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations]. Moscow, GIFML, 1958. 408 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 09.09.2023

Принята к публикации / Accepted 15.10.2023

Опубликована / Published 29.11.2024