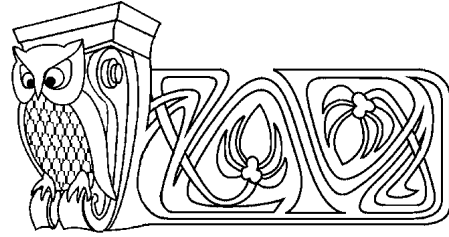




УДК 539.3,517.95

# АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ В ЗАДАЧЕ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОГО СЛОЯ С НЕОДНОРОДНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ



В. А. Вестяк, А. В. Земсков, И. А. Фёдоров\*

Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет)  
E-mail: azemskov1975@mail.ru, vovavest@rambler.ru  
\*Московский государственный университет путей сообщения  
E-mail: fedorov-ia@yandex.ru

**The Asymptotic Separation of Variables In Thermoelastic Problem for Anisotropic Layer with Inhomogeneous Boundary Conditions**

V. A. Vestyak, V. A. Zemskov, I. A. Fedorov

Предлагается метод решения задачи термоупругости с неоднородными граничными условиями, выражающими неравномерный по поверхности нагрев пластины. Используется асимптотическая процедура разделения переменных, основанная на введении дополнительных пространственных масштабов. Она позволяет решить поставленную задачу в предположении, что неравномерность нагрева носит слабо выраженный характер. Метод излагается для случая, когда нагрев поверхности пластины носит периодический характер. После разделения переменных решение задачи строится с помощью рядов Фурье.

A method for resolving a thermoelasticity problem with inhomogeneous boundary conditions is presented. Boundary conditions represent uneven surface heating of the layer. An asymptotic procedure for separation of variables based on introduction of additional dimensional scales is used. With an additional assumption that the unevenness of the heating is small enough this procedure makes it possible to obtain the solution. The method is shown for periodic heating case. After the separation of variables the solution is obtained using Fourier series.

**Ключевые слова:** термоупругость, анизотропия, асимптотика.

**Key words:** thermoelasticity, anisotropic, asymptotics.

## ВВЕДЕНИЕ

Основным методом решения многомерных линейных задач механики и математической физики с неоднородными граничными условиями является метод разделения переменных, основанный на интегральном преобразовании Фурье. Главным условием применимости данного метода является то, что подынтегральная функция должна быть быстро убывающей функцией по пространственным переменным. Это требование существенно сужает класс рассматриваемых задач. Кроме того, обращение изображений Фурье, особенно в многомерных случаях, представляет собой очень сложную задачу, требующую использования численных алгоритмов. В этом случае трудно исследовать зависимость искомых величин (компонент температурных и механических полей) от исходных данных (физико-механических характеристик среды), что крайне необходимо, например, как при анализе полученных результатов, так и при постановке и решении обратных задач математической физики, актуальность которых подтверждается, в частности, большим количеством публикаций в научных журналах.

В настоящей работе предложена методика асимптотического разделения переменных, позволяющая построить приближённое решение задачи связанной термоупругости для анизотропного слоя, описываемой гиперболическо-параболической системой уравнений в частных производных с неоднородными граничными условиями.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть имеется упругая анизотропная пластина толщины  $L$ . Одна из поверхностей пластины  $x_3 = 0$  подвергается нагреву, плотность которого имеет неравномерное поверхностное распределение. С обеих поверхностей происходит теплообмен с внешней средой. Нижняя поверхность  $x_3 = L$  предполагается закрепленной, а верхняя поверхность  $x_3 = 0$  свободна от напряжений. Уравнения в прямоугольной декартовой системе координат, описывающие термомеханические процессы в данной среде и соответствующие краевые условия, имеют вид [1–8]

$$C_{ijmn} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_j \partial x_n} - B_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad k_{ij} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} - D_{ij} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t \partial x_j} = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (1)$$



$$\begin{aligned} \left( C_{i3mn} \frac{\partial u_m}{\partial x_n} - B_{i3} T \right) \Big|_{x_3=0} &= 0, & u_i \Big|_{x_3=L} &= 0, \\ \left( -k_{i3} \frac{\partial T}{\partial x_i} + \alpha_1 T \right) \Big|_{x_3=0} &= f(x_1, x_2, t), & \left( k_{i3} \frac{\partial T}{\partial x_i} + \alpha_2 T \right) \Big|_{x_3=L} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где все величины являются безразмерными, для которых приняты следующие обозначения [1, 2]:

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{x_i^*}{Z}, & u_i &= \frac{u_i^*}{Z}, & t &= \frac{Ct^*}{Z}, & T &= \frac{T^*}{T_0}, & C^2 &= \frac{C_{3333}^*}{\rho}, & Z &= \frac{k_{33}^*}{C_\varepsilon C}, \\ C_{ijmn} &= \frac{C_{ijmn}^*}{\rho C^2}, & B_{ij} &= \frac{B_{ij}^* T_0}{\rho C^2}, & k_{ij} &= \frac{k_{ij}^*}{k_{33}^*}, & D_{ij} &= \frac{B_{ij}^*}{C_\varepsilon}, \\ L &= \frac{L^*}{Z}, & \alpha_k &= \frac{\alpha_k^* Z}{k_{33}^*} \quad (k = 1, 2), & f(x_1, x_2, t) &= \frac{Z}{T_0 k_{33}^*} f^*(x_1^*, x_2^*, t^*), \end{aligned} \quad (3)$$

$x_i^*$  — прямоугольные декартовы координаты,  $t^*$  — время,  $u_i^*$  — компоненты вектора перемещений,  $T^*$  — приращение температуры,  $C_{ijmn}^*$  — компоненты тензора упругих характеристик среды,  $\rho$  — плотность среды,  $k_{ij}^*$  — компоненты тензора теплопроводности,  $B_{ij}^*$  — компоненты тензора теплового расширения,  $C_\varepsilon$  — удельный объёмный коэффициент теплоёмкости,  $T_0$  — начальная температура,  $\alpha_k^*$  — коэффициент теплообмена с внешней средой,  $Z$  — линейный масштаб,  $C$  — скорость распространения волны растяжения–сжатия вдоль оси  $Ox_3$ ,  $f^*(x_1^*, x_2^*, t^*)$  — плотность теплового импульса.

**Замечание.** В постановке задачи (1), (2) не указаны начальные условия. Это обстоятельство вызвано тем, что, как будет видно из дальнейшего изложения, предлагаемая в работе процедура асимптотического разделения переменных затрагивает только уравнения (1) и краевые условия (2). Начальные же условия в силу отсутствия в них производных по пространственным координатам будут инвариантны относительно упомянутых преобразований.

## 2. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

Будем предполагать, что неравномерность нагрева пластины имеет слабо выраженный характер, что позволяет приближённо решить рассматриваемую задачу с помощью метода асимптотического разделения переменных, суть которого заключается в следующем. Слабая неравномерность нагрева пластины учитывается введением малого параметра  $\varepsilon$  как множителя перед аргументами функции  $f$ , т.е. предполагается, что  $f = f(\varepsilon x_1, \varepsilon x_2, t)$ . Далее вводятся в рассмотрение два масштаба: «тождественный»  $\xi_\alpha = x_\alpha$  и «медленный»  $\eta_\alpha = \varepsilon x_\alpha$ , ( $\alpha = 1, 2$ ) и предполагается далее, что  $f = f(\eta_1, \eta_2, t)$ . Решение задачи (1), (2) ищется в виде асимптотических рядов по степеням малого параметра  $\varepsilon$ :

$$u_i(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l u_i^l(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, x_3, t), \quad T(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l T^l(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, x_3, t). \quad (4)$$

Операторы дифференцирования по переменным  $x_1$  и  $x_2$  будут иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \eta_\alpha}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \frac{\partial^2}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta} + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial \xi_\alpha \partial \eta_\beta} + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial \xi_\beta \partial \eta_\alpha} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta_\alpha \partial \eta_\beta}.$$

Подставляя ряды (4) в уравнения (1) и группируя слагаемые при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получаем рекуррентную последовательность краевых задач, из которых определяются неизвестные функции разложений (4). Порождающая система (уравнения нулевого приближения) будет иметь вид

$$\begin{aligned} C_{i\alpha m\beta} \frac{\partial^2 u_m^0}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta} + 2C_{i\alpha m3} \frac{\partial^2 u_m^0}{\partial \xi_\alpha \partial x_3} + C_{i3m3} \frac{\partial^2 u_m^0}{\partial x_3^2} - B_{i\alpha} \frac{\partial T^0}{\partial \xi_\alpha} - B_{i3} \frac{\partial T^0}{\partial x_3} &= \frac{\partial^2 u_i^0}{\partial t^2}, \\ k_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 T^0}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta} + 2k_{\alpha3} \frac{\partial^2 T^0}{\partial \xi_\alpha \partial x_3} + k_{33} \frac{\partial^2 T^0}{\partial x_3^2} - D_{i\alpha} \frac{\partial^2 u_i^0}{\partial \xi_\alpha \partial t} - D_{i3} \frac{\partial^2 u_i^0}{\partial t \partial x_3} &= \frac{\partial T^0}{\partial t}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \left( C_{i3m\alpha} \frac{\partial u_m^0}{\partial \xi_\alpha} + C_{i3m3} \frac{\partial u_m^0}{\partial x_3} - B_{i3} T^0 \right) \Big|_{x_3=0} &= 0, & u_i^0 \Big|_{x_3=L} &= 0, \\ \left( -k_{\alpha3} \frac{\partial T^0}{\partial \xi_\alpha} - \frac{\partial T^0}{\partial x_3} + \alpha_1 T^0 \right) \Big|_{x_3=0} &= f(\eta_1, \eta_2, t), & \left( k_{\alpha3} \frac{\partial T^0}{\partial \xi_\alpha} + \frac{\partial T^0}{\partial x_3} + \alpha_2 T^0 \right) \Big|_{x_3=L} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$



Уравнения первого приближения:

$$\begin{aligned}
 C_{i\alpha m\beta} \frac{\partial^2 u_m^1}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta} + 2C_{i\alpha m3} \frac{\partial^2 u_m^1}{\partial \xi_\alpha \partial x_3} + C_{i3m3} \frac{\partial^2 u_m^1}{\partial x_3^2} - B_{i\alpha} \frac{\partial T^1}{\partial \xi_\alpha} - B_{i3} \frac{\partial T^1}{\partial x_3} = \\
 = \frac{\partial^2 u_i^1}{\partial t^2} - 2C_{i\alpha m3} \frac{\partial^2 u_m^0}{\partial \eta_\alpha \partial x_3} + B_{i\alpha} \frac{\partial T^0}{\partial \eta_\alpha}, \\
 k_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 T^1}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta} + 2k_{\alpha3} \frac{\partial^2 T^1}{\partial \xi_\alpha \partial x_3} + k_{33} \frac{\partial^2 T^1}{\partial x_3^2} - D_{i\alpha} \frac{\partial^2 u_i^1}{\partial \xi_\alpha \partial t} - D_{i3} \frac{\partial^2 u_i^1}{\partial t \partial x_3} = \\
 = \frac{\partial T^1}{\partial t} + D_{i\alpha} \frac{\partial^2 u_i^0}{\partial \eta_\alpha \partial t} - 2k_{\alpha3} \frac{\partial^2 T^0}{\partial \eta_\alpha \partial x_3},
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 \left( C_{i3m\alpha} \frac{\partial u_m^1}{\partial \xi_\alpha} + C_{i3m3} \frac{\partial u_m^1}{\partial x_3} - B_{i3} T^1 \right) \Big|_{x_3=0} = -C_{i3m\alpha} \frac{\partial u_m^0}{\partial \eta_\alpha} \Big|_{x_3=0}, \quad u_i^1|_{x_3=L} = 0, \\
 \left( -k_{\alpha3} \frac{\partial T^1}{\partial \xi_\alpha} - \frac{\partial T^1}{\partial x_3} + \alpha_1 T^1 \right) \Big|_{x_3=0} = k_{\alpha3} \frac{\partial T^0}{\partial \eta_\alpha} \Big|_{x_3=0}, \\
 \left( -k_{\alpha3} \frac{\partial T^1}{\partial \xi_\alpha} + \frac{\partial T^1}{\partial x_3} + \alpha_2 T^1 \right) \Big|_{x_3=L} = -k_{\alpha3} \frac{\partial T^0}{\partial \eta_\alpha} \Big|_{x_3=L}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Уравнения высших приближений (начиная со второго):

$$\begin{aligned}
 C_{i\alpha m\beta} \frac{\partial^2 u_m^l}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta} + 2C_{i\alpha m3} \frac{\partial^2 u_m^l}{\partial \xi_\alpha \partial x_3} + C_{i3m3} \frac{\partial^2 u_m^l}{\partial x_3^2} - B_{i\alpha} \frac{\partial T^l}{\partial \xi_\alpha} - B_{i3} \frac{\partial T^l}{\partial x_3} = \\
 = \frac{\partial^2 u_i^l}{\partial t^2} - 2C_{i\alpha m3} \frac{\partial^2 u_m^{l-1}}{\partial \eta_\alpha \partial x_3} + B_{i\alpha} \frac{\partial T^{l-1}}{\partial \eta_\alpha} - C_{i\alpha m\beta} \frac{\partial^2 u_m^{l-2}}{\partial \eta_\alpha \partial \eta_\beta}, \\
 k_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 T^l}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta} + 2k_{\alpha3} \frac{\partial^2 T^l}{\partial \xi_\alpha \partial x_3} + k_{33} \frac{\partial^2 T^l}{\partial x_3^2} - D_{i\alpha} \frac{\partial^2 u_i^l}{\partial \xi_\alpha \partial t} - D_{i3} \frac{\partial^2 u_i^l}{\partial t \partial x_3} = \\
 = \frac{\partial T^l}{\partial t} + D_{i\alpha} \frac{\partial^2 u_i^{l-1}}{\partial \eta_\alpha \partial t} - 2k_{\alpha3} \frac{\partial^2 T^{l-1}}{\partial \eta_\alpha \partial x_3} - k_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 T^{l-2}}{\partial \eta_\alpha \partial \eta_\beta}, \quad l = 2, 3, \dots, \\
 \left( C_{i3m\alpha} \frac{\partial u_m^l}{\partial \xi_\alpha} + C_{i3m3} \frac{\partial u_m^l}{\partial x_3} - B_{i3} T^l \right) \Big|_{x_3=0} = -C_{i3m\alpha} \frac{\partial u_m^{l-1}}{\partial \eta_\alpha} \Big|_{x_3=0}, \quad u_i^l|_{x_3=L} = 0, \\
 \left( -k_{\alpha3} \frac{\partial T^l}{\partial \xi_\alpha} - \frac{\partial T^l}{\partial x_3} + \alpha_1 T^l \right) \Big|_{x_3=0} = k_{\alpha3} \frac{\partial T^{l-1}}{\partial \eta_\alpha} \Big|_{x_3=0}, \\
 \left( k_{\alpha3} \frac{\partial T^l}{\partial \xi_\alpha} + \frac{\partial T^l}{\partial x_3} + \alpha_2 T^l \right) \Big|_{x_3=L} = -k_{\alpha3} \frac{\partial T^{l-1}}{\partial \eta_\alpha} \Big|_{x_3=L}.
 \end{aligned}$$

Как видно, все уравнения начиная со второго приближения имеют одинаковый вид и, кроме того, все без исключения уравнения имеют одинаковую левую часть, различаясь только неоднородностями в правых частях. Поэтому принципиально важным является построение только первых двух приближений к решению задачи (1), (2).

Рассмотрим слагаемые порядка  $\varepsilon^0$ . Из вида граничных условий (6) следует, что неизвестные функции  $u_i^0$  и  $T^0$  не зависят от переменных  $\xi_1$  и  $\xi_2$ . Тогда задача (5), (6) примет вид [1] (учтено, что в соответствии с (3)  $k_{33} = 1$ ):

$$C_{i3m3} \frac{\partial^2 u_m^0}{\partial x_3^2} - B_{i3} \frac{\partial T^0}{\partial x_3} = \frac{\partial^2 u_i^0}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 T^0}{\partial x_3^2} - D_{i3} \frac{\partial^2 u_i^0}{\partial t \partial x_3} = \frac{\partial T^0}{\partial t}, \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 \left( C_{i3mn} \frac{\partial u_m^0}{\partial x_n} - B_{i3} T^0 \right) \Big|_{x_3=0} = 0, \quad u_\alpha|_{x_3=L} = 0, \\
 \left( -\frac{\partial T^0}{\partial x_3} + \alpha_1 T^0 \right) \Big|_{x_3=0} = f(\eta_1, \eta_2, t), \quad \left( \frac{\partial T^0}{\partial x_3} + \alpha_2 T^0 \right) \Big|_{x_3=L} = 0.
 \end{aligned} \tag{10}$$



В случае произвольной анизотропии система (9) содержит четыре неизвестных функции, её решение для установившегося режима при  $f(\eta_1, \eta_2, t) = \bar{f}(\eta_1, \eta_2)e^{i\omega t}$  ищется в форме [1, 2, 9]

$$T^0 = \theta^0(x_3)e^{i\omega t} = \sum_{k=1}^8 \theta_k^0 e^{\lambda_k x_3 + i\omega t}, \quad u_i^0 = U_i^0(x_3)e^{i\omega t} = \sum_{k=1}^8 U_{ik}^0 e^{\lambda_k x_3 + i\omega t}, \quad (11)$$

где в соответствии с (3)  $\omega = Z\omega^*/C$ ,  $\omega^*$  — частота внешнего периодического воздействия, а  $\lambda_k$  — корень характеристического уравнения, вид которого ввиду громоздкости здесь не приводится. Величины  $\theta_k^0$  и  $U_{ik}^0$  определяются из уравнений (9) с точностью до произвольных функций, зависящих от переменных  $\eta_\alpha$  которые находятся из граничных условий (10). На этом построение нулевых приближений закончено.

Перейдём к слагаемым порядка  $\varepsilon^1$ . Анализируя, как и прежде уравнения (7) и граничные условия (8), приходим к выводу, что функции  $u_i^1$  и  $T^1$  не зависят от переменных  $\xi_\alpha$ . Тогда уравнения для их определения и соответствующие граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} C_{i3m3} \frac{\partial^2 u_m^1}{\partial x_3^2} - B_{i3} \frac{\partial T^1}{\partial x_3} &= \frac{\partial^2 u_i^1}{\partial t^2} - 2C_{i\alpha m3} \frac{\partial^2 u_m^0}{\partial \eta_\alpha \partial x_3} + B_{i\alpha} \frac{\partial T^0}{\partial \eta_\alpha}, \\ \frac{\partial^2 T^1}{\partial x_3^2} - D_{i3} \frac{\partial^2 u_i^1}{\partial t \partial x_3} &= \frac{\partial T^1}{\partial t} + D_{i\alpha} \frac{\partial^2 u_i^0}{\partial \eta_\alpha \partial t} - 2k_{\alpha 3} \frac{\partial^2 T^0}{\partial \eta_\alpha \partial x_3}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \left( C_{i3m3} \frac{\partial u_m^1}{\partial x_3} - B_{i3} T^1 \right) \Big|_{x_3=0} &= -C_{i3m\alpha} \frac{\partial u_m^0}{\partial \eta_\alpha} \Big|_{x_3=0}, \quad u_i^1|_{x_3=L} = 0, \\ \left( -\frac{\partial T^1}{\partial x_3} + \alpha_1 T^1 \right) \Big|_{x_3=0} &= k_{\alpha 3} \frac{\partial T^0}{\partial \eta_\alpha}, \quad \left( \frac{\partial T^1}{\partial x_3} + \alpha_2 T^1 \right) \Big|_{x_3=L} = -k_{\alpha 3} \frac{\partial T^0}{\partial \eta_\alpha}. \end{aligned} \quad (13)$$

Решение задач (12) и (13) в случае установившегося режима очень удобно представить в виде суммы общего решения однородной системы и частного решения неоднородной системы. Подобного рода задачи для одномерных уравнений гиперболического и параболического типа подробно разобраны в монографии [10] и других монографиях, посвященных решению задач математической физики. Общее решение однородной системы здесь имеет вид аналогичный (11). Частное же решение ищется в форме  $F_k(\eta_1, \eta_2, x_3)e^{i\omega t}$  методом неопределённых коэффициентов, где в качестве таковых выступают функции  $F_k(\eta_1, \eta_2, x_3)$ .

Аналогичным образом строятся последующие приближения. Таким образом, формально построено решение задачи (1), (2) в виде

$$\begin{aligned} u_3(x_1, x_2, x_3, t) &= u_3^0(x_1, x_2, x_3, t) + o(\varepsilon), \quad u_\alpha(x_1, x_2, x_3) = \varepsilon u_\alpha^1(x_1, x_2, x_3, t) + o(\varepsilon), \\ T(x_1, x_2, x_3, t) &= T^0(x_1, x_2, x_3, t) + o(\varepsilon), \quad \alpha = 1, 2, \end{aligned}$$

где функции  $u_i^0$ ,  $u_i^1$ ,  $T^0$  и  $T^1$  являются решениями задач (9)–(12).

Следует отметить, что предложенная методика асимптотического разделения переменных не ограничивается стационарными или периодическими задачами. Но несмотря на то что задачи (9), (10), (11), (12) существенно проще исходной (1), (2), тем не менее в нестационарном случае их решение крайне затруднительно. Практически здесь могут быть использованы приближённые методы операционного исчисления, как, например, в работах [2, 9].

### 3. РАСЧЁТНЫЙ ПРИМЕР

Рассмотрим решение задач (9)–(12) для ортотропых сред. В этом случае [3, 8]

$$B_{ij} = D_{ij} = k_{ij} = 0 \quad (i \neq j),$$

$$C_{2221} = C_{2223} = C_{2111} = C_{2113} = C_{2133} = C_{2311} = C_{2313} = C_{2333} = C_{1113} = C_{2213} = C_{1333} = C_{2312} = 0.$$

Кроме того, будем рассматривать установившиеся режимы, т.е.  $f(\eta_1, \eta_2, t) = \bar{f}(\eta_1, \eta_2)e^{i\omega t}$ . В этом случае система уравнений (9) распадается на две независимые задачи [1, 2] ( $C_{3333} = 1$  с учётом (3)):

$$C_{\alpha 3\alpha 3} \frac{\partial^2 u_\alpha^0}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2 u_\alpha^0}{\partial t^2}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (14)$$



$$\left. \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial x_3} \right|_{x_3=0} = 0, \quad u_\alpha|_{x_3=L} = 0 \quad (15)$$

(здесь суммирование по индексу  $\alpha$  не производится),

$$\frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_3^2} - B_{33} \frac{\partial T^0}{\partial x_3} = \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 T^0}{\partial x_3^2} - D_{33} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial t \partial x_3} = \frac{\partial T^0}{\partial t}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial u_3^0}{\partial x_3} - B_{33} T^0 \right) \Big|_{x_3=0} &= 0, \quad u_3|_{x_3=L} = 0, \\ \left( -\frac{\partial T^0}{\partial x_3} + \alpha_1 T^0 \right) \Big|_{x_3=0} &= \bar{f}(\eta_1, \eta_2) e^{i\omega t}, \quad \left( \frac{\partial T^0}{\partial x_3} + \alpha_2 T^0 \right) \Big|_{x_3=L} = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Решение задач (14)–(17) будем искать по-прежнему в виде (9). Если  $\omega$  не является собственной частотой, т. е.  $\omega \neq \sqrt{C_{\alpha 3 \alpha 3} \frac{\pi}{L} (n + \frac{1}{2})}$ , то решения задач (14), (15) — нулевые. Для задачи (16), (17) имеем [1, 2, 5]

$$T^0 = \sum_{k=1}^4 A_k e^{(\lambda_k x_3 + i\omega t)}, \quad u_3^0 = \sum_{k=1}^4 \frac{B_{33} \lambda_k}{\lambda_k^2 + \omega^2} A_k e^{(\lambda_k x_3 + i\omega t)},$$

где  $\lambda_k$  — корень характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + \omega^2 - B_{33} \lambda \\ -i\omega \lambda D_{33} \lambda^2 - i\omega \end{vmatrix} = 0,$$

величины  $A_k$  зависят от переменных  $\eta_\alpha$  и находятся из граничных условий (17). Эта задача сводится к решению системы линейных неоднородных алгебраических уравнений вида

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 \left( \frac{B_{33} \lambda_k^2}{\lambda_k^2 + \omega^2} - B_{33} \right) A_k &= 0, & \sum_{k=1}^4 \frac{\lambda_k}{\lambda_k^2 + \omega^2} e^{\lambda_k L} A_k &= 0, \\ \sum_{k=1}^4 (-\lambda_k + \alpha_1) A_k &= \bar{f}(\eta_1, \eta_2), & \sum_{k=1}^4 (\lambda_k + \alpha_2) e^{\lambda_k L} A_k &= 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим уравнения первого приближения. Так же как и в нулевом приближении данная задача распадается на две независимые

$$C_{\alpha 3 \beta 3} \frac{\partial^2 u_\beta^1}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2 u_\alpha^1}{\partial t^2} - 2C_{\alpha \beta 33} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_3 \partial \eta_\beta} + B_{\alpha \beta} \frac{\partial T^0}{\partial \eta_\beta}, \quad (18)$$

$$C_{\alpha 3 \beta 3} \frac{\partial u_\beta^1}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} = -C_{\alpha 3 \beta 3} \frac{\partial u_3^0}{\partial \eta_\beta} \Big|_{x_3=0}, \quad u_\alpha^1|_{x_3=L} = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2 u_3^1}{\partial x_3^2} - B_{33} \frac{\partial T^1}{\partial x_3} = \frac{\partial^2 u_3^1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 T^1}{\partial x_3^2} - D_{33} \frac{\partial^2 u_3^1}{\partial t \partial x_3} = \frac{\partial T^1}{\partial t}, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial u_3^1}{\partial x_3} - B_{33} T^1 \right) \Big|_{x_3=0} &= 0, \quad u_3^1|_{x_3=L} = 0, \\ \left( -\frac{\partial T^1}{\partial x_3} + \alpha_1 T^1 \right) \Big|_{x_3=0} &= 0, \quad \left( \frac{\partial T^1}{\partial x_3} + \alpha_2 T^1 \right) \Big|_{x_3=L} = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Решения задачи (20), (21) нулевые  $u_3^1 = 0, T^1 = 0$ . Система (18) представляет собой два независимых уравнения относительно функций  $u_1^1$  и  $u_2^1$ . Их решения строятся в виде [1]

$$u_\alpha^1(x_3, \eta_1, \eta_2, t) = U_\alpha^1(x_3, \eta_1, \eta_2) e^{i\omega t}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (22)$$

где  $U_\alpha^1 = U_\alpha^+ e^{i\omega_\alpha x_3} + U_\alpha^- e^{-i\omega_\alpha x_3} + \sum_{k=1}^4 \bar{U}_{k\alpha} e^{\lambda_k x_3}$ ,  $\omega_\alpha = \frac{\omega}{\sqrt{C_{\alpha 3 \alpha 3}}}$ .

Функции  $\bar{U}_{k\alpha}$  находятся подстановкой (22) в уравнения (18)

$$\bar{U}_{k\alpha}(\eta_1, \eta_2) = \frac{2C_{\alpha \alpha 33} B_{33} \lambda_k^2}{(\lambda_k^2 + \omega^2)(C_{\alpha 3 \alpha 3} \lambda_k^2 + \omega^2)} \frac{\partial A_k}{\partial \eta_\alpha} + \frac{B_{\alpha \alpha}}{(C_{\alpha 3 \alpha 3} \lambda_k^2 + \omega^2)} \frac{\partial A_k}{\partial \eta_\alpha}. \quad (23)$$



(Суммирование по повторяющимся индексам  $\alpha$  в выражении для  $\omega_\alpha$  и уравнениях (23) нет.)

Неизвестные величины  $U_{k\alpha}^+$ ,  $U_{k\alpha}^-$  зависят от переменных  $\eta_\alpha$  и находятся из граничных условий (19):

$$U_{\alpha}^{-}(\eta_1, \eta_2) = \frac{i}{\omega} (1 + e^{-2i\omega_\alpha L})^{-1} \sum_{k=1}^4 \left[ \bar{U}_{k\alpha}(\eta_1, \eta_2) (e^{(\lambda_k - i\omega_\alpha)L} - \lambda_k) - \frac{B_{33}\lambda_k}{\lambda_k^2 + \omega^2} \frac{\partial A_k}{\partial \eta_\alpha} \right],$$

$$U_{\alpha}^{+}(\eta_1, \eta_2) = \frac{i}{\omega} (1 + e^{-2i\omega_\alpha L})^{-1} \sum_{k=1}^4 \left[ \bar{U}_{k\alpha}(\eta_1, \eta_2) (e^{(\lambda_k - i\omega_\alpha)L} + \lambda_k) - \frac{B_{33}\lambda_k}{\lambda_k^2 + \omega^2} \frac{\partial A_k}{\partial \eta_\alpha} \right].$$

В качестве модели ортотропного слоя рассматривалась осреднённая слоистая (сталь, алюминий) среда [1, 2, 6]. Плотность теплового импульса моделировалась функцией

$$\bar{f}(x_1, x_2) = \frac{1}{1 + (\varepsilon x_1)^2 + (\varepsilon x_2)^2}.$$

На рис. 1 и 2 представлены поля температуры и нормального напряжения внутри пластины с учётом нулевого и первого приближений.

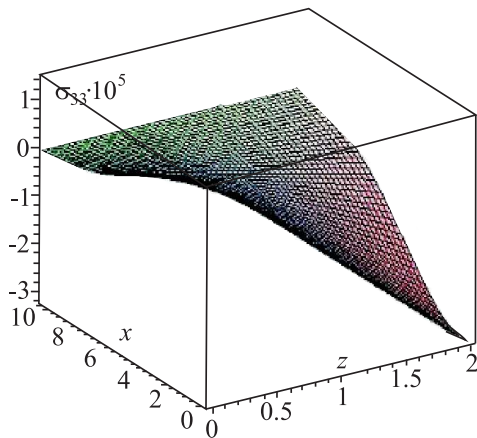


Рис. 1. Распределение напряжений внутри пластины

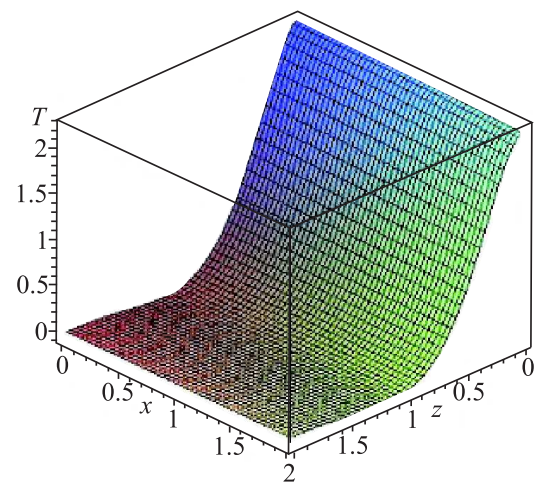


Рис. 2. Распределение приращения температуры внутри пластины

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построена рекуррентная последовательность краевых задач, позволяющая найти решение системы (1), (2) в виде асимптотического ряда (4) по степеням малого параметра, характеризующего слабо неоднородный нагрев поверхности анизотропного слоя. Класс рассматриваемых задач не ограничивается ортотропными средами. Наличие симметрии только лишь упрощает решение уравнений соответствующих приближений, постольку они распадаются на ряд независимых задач меньшей размерности. Предложенная методика позволяет построить приближённое решение задачи (1) с неоднородными краевыми условиями (2) в аналитической форме, в частности, тогда, когда невозможно выполнить разделение переменных с помощью интегрального преобразования Фурье. Погрешность полученного решения определяется количеством членов в разложении (4).

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 11-08-00064-а и 11-08-90453-Укр\_ф\_а).*

## Библиографический список

1. Вестяк В. А., Земсков А. В., Федотенков Г. В. Слабо неравномерный нагрев неограниченной слоистой пластины // Вестн. МАИ. 2010. Т. 17, № 6. С. 152–158.
2. Земсков А. В., Эрихман Н. Н. Приближённое решение нестационарной задачи о нагреве ортотропной пластины // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій : збірник наукових праць / Дніпропетровський національний університет. Дніпропетровськ : ІМА-прес, 2009. Вип. 13. С. 94–99.
3. Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В. Динамические



контактные задачи с подвижными границами М. : Наука; Физматлит, 1995. 352 с.

4. *Ильюшин А. А.* Механика сплошной среды : учебник. 2-е изд., перераб. и доп. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1978. 287 с.

5. *Моргунов Б. И.* Математический анализ физико-механических процессов. М. : МИЭМ, 1995. 151 с.

6. *Моргунов Б. И.* Математическое моделирование связанных физических процессов. М. : МИЭМ, 1997. 224 с.

7. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости

/ пер. с польск. Я. Рыхлевского; под ред. Г. С. Шапиро. М. : Мир, 1970. 256 с.

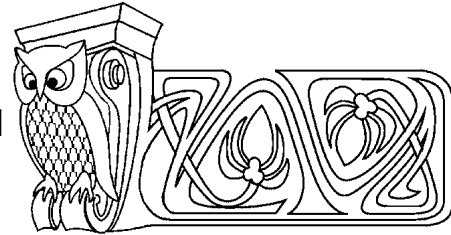
8. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды : в 2 т. Т. 1. М. : Наука, 1973. 536 с.

9. *Вестяк В. А., Лемешев В. А., Тарлаковский Д. В.* Распространение нестационарных радиальных возмущений от сферической полости в электромагнитоупругом пространстве // Докл. АН. 2010. Т. 434, № 2. С. 186–188.

10. *Самарский А. А., Тихонов А. Н.* Математическое моделирование связанных физических процессов. М. : Гл. ред. физ.-мат. лит. изд-ва «Наука», 1977. 736 с.

УДК 539.3

## РАСЧЕТ ПЛОСКОНАГРУЖЕННЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОНСТРУКЦИЙ НА ОСНОВЕ СМЕШАННОГО МКЭ С ТЕНЗОРНО-ВЕКТОРНОЙ АППРОКСИМАЦИЕЙ ИСКОМЫХ ВЕЛИЧИН



Н. А. Гуреева

Волгоградская государственная академия сельского хозяйства  
E-mail: natalya-gureeva@yandex.ru

Изложен в смешанной формулировке МКЭ алгоритм получения на шаге нагружения матрицы деформирования объемного конечного элемента с поперечным сечением в форме произвольного четырехугольника с узловыми неизвестными в виде приращений перемещений и приращений деформаций.

Для численной реализации алгоритма использован функционал, полученный из условия равенства возможной и действительной работ внешних и внутренних сил на шаге нагружения.

**Ключевые слова:** векторная аппроксимация, тензорная аппроксимация, векторное поле, тензорное поле, смешанная формулировка, вариационный принцип.

**Calculation Plainly Loaded Geometrically Nonlinear Designs on the Basis of Mixed FEM with Tenzorno-Vector Approximation Requires Sizes**

N. A. Gureeva

The algorithm of reception on a step of loading designs matrixes of deformation of a volume final element with cross-section section in the form of any quadrangle with central unknown persons in the form of increments of movings and increments of deformations is stated in mixed formulation FEM.

For numerical realization of algorithm it is used functional, received of a condition of equality of possible and valid works of external and internal forces on a step loading.

**Key words:** vector approximation, tensor approximation, vector field, tensor field, mixed formulation, variation principle.

Для расчета плосконагруженных конструкций реализуется шаговый метод. На шаге нагружения разработан конечный элемент с поперечным сечением в форме произвольного четырехугольника в смешанной формулировке МКЭ с узловыми неизвестными в виде приращений перемещений и приращений деформаций.

Для получения матрицы деформирования конечного элемента в геометрически нелинейной постановке получен функционал из условия равенства возможной и действительной работ внешних и внутренних сил.

Приводится пример расчета, подтверждающий эффективность использования разработанного конечного элемента.

### 1. ГЕОМЕТРИЯ ТОНКОСТЕННОЙ КОНСТРУКЦИИ

В декартовой системе координат  $xOz$  линия внутреннего контура тонкостенной конструкции принимается в качестве отсчетной. Положение произвольной точки  $M^0$  отсчетной линии определяется радиусом-вектором (рис.1)

$$\mathbf{R}^0 = x\mathbf{i} + z(x)\mathbf{k},$$

где  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  — орты декартовой системы координат.