УДК 514.765.1

НЕРЕДУКТИВНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА, НЕ ДОПУСКАЮЩИЕ НОРМАЛЬНЫХ СВЯЗНОСТЕЙ

Н. П. Можей

Можей Наталья Павловна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Беларусь, 220013, Минск, П. Бровки, 6, mozheynatalya@mail.ru

Целью данной работы является классификация трехмерных нередуктивных однородных пространств, не допускающих нормальных связностей, самих связностей, их тензоров кривизны, кручения и алгебр голономии. Объектом исследования являются нередуктивные пространства и связности на них. Определены основные понятия: изотропно-точная пара, редуктивное пространство, аффинная связность, тензор кручения, тензор кривизны, алгебра голономии, нормальная связность. Локальное изучение однородных пространств равносильно исследованию пар, состоящих из алгебры Ли и ее подалгебры. Приведена локальная классификация трехмерных нередуктивных однородных пространств с неразрешимой группой преобразований, не допускающих нормальных связностей. Описаны в явном виде инвариантные аффинные связности на таких пространствах, найдены их тензоры кривизны и кручения; исследованы алгебры голономии и определено, что инвариантная связность не является нормальной. Исследования основаны на использовании свойств алгебр Ли, групп Ли и однородных пространств и носят, в основном, локальный характер. Особенностью методики, представленной в работе, является использование чисто алгебраического подхода к описанию однородных пространств и связностей на них, а также сочетание различных методов дифференциальной геометрии, теории групп и алгебр Ли и теории однородных пространств. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании многообразий, а также иметь приложения в различных областях математики и физики, поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях связаны с изучением инвариантных объектов на однородных пространствах.

Ключевые слова: редуктивное пространство, группа преобразований, нормальная связность, алгебра голономии.

DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-284-296

ВВЕДЕНИЕ

Нетривиальные геометрические структуры, в частности, речь идет о нетривиальной связности, часто возникают при решении физических уравнений, например, нетривиальная связность на главном расслоении возникает в нерелятивистской квантовой механике, причем предсказанные теоретические эффекты подтверждаются экспериментально. В данной работе обсуждаются существование и свойства инвариантных аффинных связностей на однородных пространствах (особенно на нередуктивных однородных пространствах). Трактовка понятия связности, использующая конструкцию расслоенного пространства, берет свое начало в работах В. В. Вагнера [1] и Ш. Эресмана (Elircsmatin) [2], развитие этих результатов с привлечением методов Э. Картана дал Г. Ф. Лаптев [3]. Метод Г. Ф. Лаптева был применен М. А. Акивисом с соавторами [4] к построению основ инвариантной теории поверхностей, также этот метод был использован А. В. Столяровым [5] для построения основ двойственной теории пространств с линейной связностью. Обстоятельный обзор работ по теории связностей сделал Ю. Г. Лумисте [6], см. также обзор [7].

Если существует инвариантная связность, то однородное пространство является изотропно-точным, но обратное неверно, любое же редуктивное пространство всегда допускает инвариантную связность (см., например, [8]). Связность является нормальной, если каждый элемент группы преобразований отображает расслоение голономии в себя. Целью данной работы являются классификация трехмерных нередуктивных однородных пространств, на которых существуют связности, но которые не допускают нормальных связностей, описание всех связностей на этих пространствах, их тензоров кривизны, кручения и алгебр голономии. Для достижения поставленной цели необходимо: получить классификацию трехмерных изотропно-точных однородных пространств, не являющихся редуктивными; определить, существуют ли на этих пространствах нормальные связности, и выделить пространства, не допускающие нормальных связностей; описать все инвариантные аффинные связности на каждом найденном однородном пространстве; найти тензоры кривизны, кручения, алгебры голономии указанных связностей. Трехмерные нередуктивные однородные пространства описывались в работах автора [9, 10], в которых приведен более подробный тематический обзор, а также обоснование применяемых методов; при изложении сохранены обозначения, введенные ранее. В данной работе также изучаются нередуктивные пространства, но внимание сосредоточено на пространствах, не допускающих нормальных связностей. Для описания многообразий и связностей на них применяется чисто алгебраический подход, используются методы дифференциальной геометрии, теории групп и алгебр Ли и теории однородных пространств.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $G = \bar{G}_x$ — стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ — алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ — подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление $\mathfrak{g}$. Пусть G связна; однородное пространство *редуктивно*, если алгебра Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ может быть разложена в прямую сумму векторных пространств $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$, $\mathfrak{g} \bigcap \mathfrak{m} = 0$, причем $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$, в противном случае пространство не является редуктивным (там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и факторпространство $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$). *Аффинной связностью* на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется отображение $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ такое, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным. *Тензоры кручения* $T \in InvT_2^1(\mathfrak{m})$ и *кривизны* $R \in InvT_3^1(\mathfrak{m})$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$ имеют вид

$$T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}}, \quad R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]).$$

Алгебра Ли $\mathfrak{h}^*$ группы *голономии* инвариантной связности $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ — это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ вида $V + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V] + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V]] + \ldots$, где V — подпространство, порожденное множеством $\{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) | x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$. Пусть $\mathfrak{a}$ — подалгебра в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, порожденная $\{\Lambda(x) | x \in \bar{\mathfrak{g}}\}$, связность *нормальна*, если $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{a}$ (см., например, [8]), в противном случае связность не является нормальной.

2. КЛАССИФИКАЦИЯ НЕРЕДУКТИВНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ, НЕ ДОПУСКАЮЩИХ НОРМАЛЬНЫХ СВЯЗНОСТЕЙ

Будем описывать пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ при помощи таблицы умножения алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$, через $\{e_1, ..., e_n\}$ обозначим ее базис ($n = \dim\bar{\mathfrak{g}}$), $\{e_1, ..., e_{n-3}\}$ — базис подалгебры $\mathfrak{g}$, а $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$ — базис $\mathfrak{m}$. Для нумерации подалгебр используем запись $d.n$, а для нумерации пар — запись $d.n.m$, здесь d — размерность подалгебры, n — номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$, а m — номер пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Если на параметры, появляющиеся в процессе классификации, накладываются дополнительные условия, будем записывать их после таблицы умножения. В противном случае предполагается, что параметры пробегают $\mathbb{R}$.

Теорема 1. *Любое трехмерное нередуктивное однородное пространство, не допускающее нормальных связностей, такое, что $\bar{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{g}$ неразрешимы, локально имеет вид*

6.3.2.	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	0	$-e_5$	e_6	0	u_2	$-u_3$
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	$-e_6$	0	0	0	u_2
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	0	0	$-e_5$	0	u_3	0
e_4	0	0	0	0	$-e_5$	$-e_6$	0	u_2	u_3
e_5	e_5	e_6	0	e_5	0	0	0	$e_1+3e_4+u_1$	$2e_3$
e_6	$-e_6$	0	e_5	e_6	0	0	0	$2e_2$	$-e_1+3e_4+u_1$
u_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u_2	$-u_2$	0	$-u_3$	$-u_2$	$-e_1-3e_4-u_1$	$-2e_2$	0	0	0
u_3	u_3	$-u_2$	0	$-u_3$	$-2e_3$	$e_1-3e_4-u_1$	0	0	0

.

Для получения указанного результата сначала найдены трехмерные изотропно-точные пары; далее выбраны нередуктивные пары, т. е. те, для которых не существует разложения $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$, $\mathfrak{g} \bigcap \mathfrak{m} = 0$, так как не выполняется условие $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$; определены пары с неразрешимыми алгеброй $\bar{\mathfrak{g}}$ и подалгеброй $\mathfrak{g}$ (с более подробным описанием можно ознакомиться в [9]). Для полученных пар найдены аффинные связности и алгебры голономии, соответственно, определены пары, не допускающие нормальных связностей.

Действительно, пусть $\mathfrak{g}$ имеет вид 6.3, т. е. $\mathfrak{g}$ сопряжена следующей подалгебре в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$:

$$6.3.\ \boxed{\begin{matrix} 0 & v & w \\ 0 & x & z \\ 0 & y & u \end{matrix}}\,.$$

Переменные обозначены латинскими буквами и принадлежат $\mathbb{R}$. Базис подалгебры выберем, придав одной из латинских переменных значение 1, а остальным — 0, нумерация базисных векторов соответствует алфавиту. Пусть $\mathfrak{h}$ — нильпотентная подалгебра, порожденная векторами e_1 и e_4. Имеем: $\mathfrak{g}^{(0,0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_4$, $\mathfrak{g}^{(2,0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_2$, $\mathfrak{g}^{(-2,0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_3$, $U^{(0,0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}u_1$, $\mathfrak{g}^{(-1,-1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_5$, $U^{(1,1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}u_2$, $\mathfrak{g}^{(1,-1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_6$, $U^{(-1,1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}u_3$. Отсюда следует, что $[u_1, u_2] = \alpha_2 u_2$, $[u_1, u_3] = \beta_3 u_3$, $[u_2, u_3] = 0$. Из тождества Якоби получим, что $[e_5, u_2] = pe_1 + A$, $[e_5, u_3] = 2pe_3$, $[e_6, u_2] = 2pe_2$,

$[e_6, u_3] = -pe_1 + A, [u_1, u_2] = 0$, $[u_1, u_3] = 0$, $[u_2, u_3] = 0$, где $A = 3pe_4 + u_1$. При $p = 0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}}_1, \mathfrak{g})$ является редуктивной и не входит в рассматриваемый в работе класс, при $p \neq 0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре 6.3.2 при помощи $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_2 \to \bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i) = e_i$, $i = \overline{1,6}$, $\pi(u_j) = (1/p)u_j$, $j = \overline{1,3}$. Поскольку $\bar{\mathfrak{g}}_1$ редуктивна, а $\bar{\mathfrak{g}}_2$ не редуктивна, пары не эквивалентны.

Пусть здесь и далее

$$\Lambda(u_1) = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix}, \quad \Lambda(u_2) = \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ q_{2,1} & q_{2,2} & q_{2,3} \\ q_{3,1} & q_{3,2} & q_{3,3} \end{pmatrix}, \quad \Lambda(u_3) = \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & r_{2,3} \\ r_{3,1} & r_{3,2} & r_{3,3} \end{pmatrix}$$

для некоторых $p_{i,j}$, $q_{i,j}$, $r_{i,j} \in \mathbb{R}$ (при $i, j = \overline{1,3}$). Для пары 6.3.2 однозначно определены $\Lambda(e_i)$, $i = \overline{1,6}$, так как ограничение отображения Λ на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры; отображение Λ является $\mathfrak{g}$-инвариантным, тогда $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_2, u_1]) \Rightarrow [\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = 0$, имеем: $p_{3,1} = p_{3,2} = p_{1,2} = 0$, $p_{3,3} = p_{2,2}$. Поскольку $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_1, u_1]) \Rightarrow [\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = 0$, получаем, что $p_{1,3} = p_{2,1} = p_{2,3} = 0$. Так как $[\Lambda(e_5), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_5, u_1]) \Rightarrow [\Lambda(e_5), \Lambda(u_1)] = 0$, $p_{2,2} = p_{1,1}$. Если $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_2)] = 0$, то $q_{3,1} = q_{3,2} = q_{1,2} = 0$, $q_{3,3} = q_{2,2}$. Поскольку $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_2)] = \Lambda(u_2)$, $q_{1,1} = q_{2,2} = q_{2,3} = 0$. Так как $[\Lambda(e_3), \Lambda(u_2)] = \Lambda(u_3)$, $r_{1,1} = r_{1,3} = r_{2,1} = r_{2,2} = r_{2,3} = r_{3,2} = r_{3,3} = 0$, $r_{3,1} = q_{2,1}$, $r_{1,2} = -q_{1,3}$. Если $[\Lambda(e_4), \Lambda(u_2)] = \Lambda(u_2)$, то $r_{1,2} = 0$. Поскольку $[\Lambda(e_5), \Lambda(u_2)] = \Lambda(u_1) + \Lambda(e_1) + 3\Lambda(e_4)$, имеем: $p_{1,1} = r_{3,1} = -2$. Получим, что аффинная связность следующая:

$$\Lambda(u_1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(u_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(u_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(для остальных базисных векторов условия выполняются). Тензоры кривизны и кручения, алгебра голономии получаются нулевыми, следовательно, связность не является нормальной, так как $\mathfrak{h}^* \neq \mathfrak{a}$. Аналогичными вычислениями для других неразрешимых подалгебр в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ получаем, что трехмерных нередуктивных неразрешимых пар, не допускающих нормальных связностей, кроме представленной в теореме 1, не существует.

Теорема 2. *Все трехмерные нередуктивные однородные пространства, не допускающие нормальных связностей, такие, что $\bar{\mathfrak{g}}$ не разрешима, а $\mathfrak{g}$ разрешима, локально имеют следующий вид:*

2.7.2.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_1	0	0	$u_1{+}e_2$
e_2	$-e_1$	0	0	0	u_3
u_1	0	0	0	0	0
u_2	0	0	0	0	0
u_3	$-u_1{-}e_2$	$-u_3$	0	0	0

,

2.8.7 ($\lambda \neq 0$).	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	λe_1	e_1	0	u_1
e_2	$-\lambda e_1$	0	0	u_2	λu_3
u_1	$-e_1$	0	0	0	u_3
u_2	0	$-u_2$	0	0	0
u_3	$-u_1$	$-\lambda u_3$	$-u_3$	0	0

,

2.18.3.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_1	0	0	e_2+u_1
e_2	$-e_1$	0	0	u_1	u_3
u_1	0	0	0	$-u_1$	0
u_2	0	$-u_1$	u_1	0	0
u_3	$-e_2-u_1$	$-u_3$	0	0	0

,

3.6.2.	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	e_1	e_1	0	u_1
e_2	0	0	0	0	u_2	0
e_3	$-e_1$	0	0	0	0	u_3
u_1	$-e_1$	0	0	0	0	u_3
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	0
u_3	$-u_1$	0	$-u_3$	$-u_3$	0	0

,

3.12.2.	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-e_2$	$-e_3$	0	0	u_3
e_2	e_2	0	0	e_3	$2e_2$	u_2
e_3	e_3	0	0	0	e_3	u_1
u_1	0	$-e_3$	0	0	$-u_1$	0
u_2	0	$-2e_2$	$-e_3$	u_1	0	$2u_3$
u_3	$-u_3$	$-u_2$	$-u_1$	0	$-2u_3$	0

,

3.28.2.	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_3-e_2	$-e_3$	0	u_1	u_3
e_2	e_2-e_3	0	0	e_3	$2e_3$	$2e_1+u_2$
e_3	e_3	0	0	0	$-e_3$	u_1
u_1	0	$-e_3$	0	0	$-u_1$	0
u_2	$-u_1$	$-2e_3$	e_3	u_1	0	0
u_3	$-u_3$	$-2e_1-u_2$	$-u_1$	0	0	0

,

3.13.6 ($\mu \neq 0, -1$).	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-\mu e_2$	$(1-\mu)e_3$	u_1	0	μu_3
e_2	μe_2	0	0	e_3	$2e_2$	u_2
e_3	$(\mu-1)e_3$	0	0	0	e_3	u_1
u_1	$-u_1$	$-e_3$	0	0	$-u_1$	0
u_2	0	$-2e_2$	$-e_3$	u_1	0	$2u_3$
u_3	$-\mu u_3$	$-u_2$	$-u_1$	0	$-2u_3$	0

,

4.19.2.	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	$-e_3$	$-e_4$	0	0	u_3
e_2	0	0	e_4	0	0	u_1	0
e_3	e_3	$-e_4$	0	0	$-e_4$	$-2e_3$	u_2
e_4	e_4	0	0	0	0	$-e_4$	u_1
u_1	0	0	e_4	0	0	u_1	0
u_2	0	$-u_1$	$2e_3$	e_4	$-u_1$	0	$-2u_3$
u_3	$-u_3$	0	$-u_2$	$-u_1$	0	$2u_3$	0

,

4.21.11 ($\mu \neq 0$).	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	$-\mu e_3$	$(1-\mu)e_4$	u_1	0	μu_3
e_2	$-e_2$	0	e_4	0	0	e_2+u_1	0
e_3	μe_3	$-e_4$	0	0	0	$-2e_3$	u_2
e_4	$(\mu-1)e_4$	0	0	0	0	$-e_4$	e_2+u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0	0
u_2	0	$-e_2-u_1$	$2e_3$	e_4	0	0	$-2u_3$
u_3	$-\mu u_3$	0	$-u_2$	$-e_2-u_1$	0	$2u_3$	0

,

5.9.2 ($\lambda=0$).	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	e_3	0	e_5	u_1	0	0
e_2	0	0	0	$-e_4$	$-e_5$	0	0	u_3
e_3	$-e_3$	0	0	e_5	0	0	u_1	0
e_4	0	e_4	$-e_5$	0	0	e_5	$2e_4$	u_2 .
e_5	$-e_5$	e_5	0	0	0	0	e_5	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	$-e_5$	0	0	$-u_1$	0
u_2	0	0	$-u_1$	$-2e_4$	$-e_5$	u_1	0	$2u_3$
u_3	0	$-u_3$	0	$-u_2$	$-u_1$	0	$-2u_3$	0

Для получения указанного результата найдены трехмерные изотропно-точные пары, выбраны нередуктивные пары с неразрешимой алгеброй $\bar{\mathfrak{g}}$ и разрешимой подалгеброй $\mathfrak{g}$ (с более подробным описанием можно ознакомиться в [10]), найдены аффинные связности и определены пары, не допускающие нормальных связностей.

Действительно, пусть $\mathfrak{g}$ имеет вид 5.9, т. е.

$$\boxed{\begin{matrix} x & z & v \\ 0 & \lambda x & u \\ 0 & 0 & y \end{matrix}},$$

а $\mathfrak{h}$ — нильпотентная подалгебра, порожденная e_1 и e_2, тогда $\bar{\mathfrak{g}}^{(0,0)}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}e_1\oplus\mathbb{R}e_2$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(1-\lambda,0)}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}e_3$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(1,0)}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}u_1$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(\lambda,-1)}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}e_4$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(\lambda,0)}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}u_2$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(1,-1)}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}e_5$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(0,1)}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}u_3$, а $[u_1,u_2]\in\bar{\mathfrak{g}}^{(1+\lambda,0)}(\mathfrak{h})$, $[u_1,u_3]\in\bar{\mathfrak{g}}^{(1,1)}(\mathfrak{h})$, $[u_2,u_3]\in\bar{\mathfrak{g}}^{(\lambda,1)}(\mathfrak{h})$. Если $\lambda=0$, то $[e_4,u_1]=pe_5$, $[e_4,u_2]=2pe_4,[e_5,u_2]=pe_5$, $[u_1,u_3]=0$, $[u_1,u_2]=a_3e_3+\alpha_1u_1$, $[u_2,u_3]=\gamma_3u_3$. В силу тождества Якоби $a_3=0$, $\alpha_1=-p$, $\gamma_3=2p$. При $p=0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}}_1,\mathfrak{g})$ тривиальна (пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ называется *тривиальной*, если существует коммутативный идеал $\mathfrak{m}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$ такой, что $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{m}=\bar{\mathfrak{g}}$, такая пара всегда является редуктивной и не входит в рассматриваемый в работе класс), при $p\neq0$ эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ и 5.9.2 доказывается при помощи $\pi:\bar{\mathfrak{g}}_2\to\bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i)=e_i$, $i=\overline{1,5}$, $\pi(u_j)=pu_j$, $j=\overline{1,3}$. Если же $\lambda\neq0$, то пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ всегда тривиальна. Поскольку $\dim D^2\bar{\mathfrak{g}}_1=3$, $\dim D^2\bar{\mathfrak{g}}_2=6$, пары не эквивалентны.

Для пары 5.9.2 однозначно определены $\Lambda(e_i)$, $i=\overline{1,5}$, так как ограничение отображения Λ на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры, отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным, следовательно, $[\Lambda(e_1),\Lambda(u_1)]=\Lambda([e_1,u_1])\Rightarrow[\Lambda(e_1),\Lambda(u_1)]=\Lambda(u_1)$, имеем $p_{1,1}=p_{2,1}=p_{2,2}=p_{2,3}=p_{3,1}=p_{3,2}=p_{3,3}=0$. Поскольку $[\Lambda(e_2),\Lambda(u_1)]=\Lambda([e_2,u_1])\Rightarrow[\Lambda(e_2),\Lambda(u_1)]=0$, $p_{1,3}=0$. Так как $[\Lambda(e_4),\Lambda(u_1)]=\Lambda(e_5)$, $p_{1,2}=-1$. Если $[\Lambda(e_2),\Lambda(u_2)]=0$, то $q_{3,1}=q_{3,2}=q_{1,3}=q_{2,3}=0$. Поскольку $[\Lambda(e_3),\Lambda(u_2)]=\Lambda(u_1)$, $q_{2,1}=0$, $q_{2,2}=q_{1,1}-1$. Так как $[\Lambda(e_4),\Lambda(u_2)]=2\Lambda(e_4)$, $q_{1,2}=0$, $q_{3,3}=q_{1,1}+1$. Если $[\Lambda(e_2),\Lambda(u_3)]=\Lambda(u_3)$, то $r_{1,1}=r_{1,2}=r_{1,3}=r_{2,1}=r_{2,2}=r_{2,3}=r_{3,3}=0$. Поскольку $[\Lambda(e_1),\Lambda(u_3)]=0$, имеем $r_{3,1}=0$. Так как $[\Lambda(e_4),\Lambda(u_3)]=\Lambda(u_2)$, $q_{1,1}=0$, $r_{3,2}=-1$. Получим, что связность имеет вид, указанный в табл. 1 (для остальных базисных векторов условия выполняются). Тензоры кривизны и кручения получаются нулевыми, алгебра голономии также нулевая, т. е. связность не является нормальной.

Для пары 3.13.6 при $\mu=1$ из $[\Lambda(e_3),\Lambda(u_1)]=\Lambda([e_3,u_1])\Rightarrow[\Lambda(e_3),\Lambda(u_1)]=0$ получаем $p_{3,1}=p_{3,2}=0$, $p_{3,3}=p_{1,1}$, $p_{2,1}=0$. Поскольку $[\Lambda(e_2),\Lambda(u_1)]=\Lambda(e_3)$, $p_{1,2}=-1$, $p_{1,1}=p_{2,2}$. Так как $[\Lambda(e_1),\Lambda(u_1)]=\Lambda(u_1)$, $p_{1,1}=p_{2,3}=p_{1,3}=0$. Если $[\Lambda(e_3),\Lambda(u_2)]=\Lambda(e_3)$, то $q_{3,1}=q_{3,2}=0$, $q_{3,3}=q_{1,1}+1$, $q_{2,1}=0$. Поскольку $[\Lambda(e_2),\Lambda(u_2)]=2\Lambda(e_2)$, $q_{1,2}=0$,

$q_{1,1}=q_{2,2}+1$. Так как $[\Lambda(e_1),\Lambda(u_2)]=0$, $q_{2,3}=0$. Если $[\Lambda(e_3),\Lambda(u_3)]=\Lambda(u_1)$, то $r_{3,1}=0$, $r_{3,2}=-1$, $r_{3,3}=r_{1,1}$, $r_{2,1}=0$. Поскольку $[\Lambda(e_2),\Lambda(u_3)]=\Lambda(u_2)$, $q_{1,1}=0$, $r_{1,2}=-q_{1,3}$, $r_{1,1}=r_{2,2}$. Так как $[\Lambda(e_1),\Lambda(u_3)]=\Lambda(u_3)$, $r_{1,1}=r_{1,3}=r_{2,3}=0$. Получим, что связность имеет вид, указанный в табл. 1. Тензор кривизны — нулевой, а тензор кручения $T(u_1,u_2)=T(u_1,u_3)=0$, $T(u_2,u_3)=\Lambda(u_2)(u_3)_{\mathfrak{m}}-\Lambda(u_3)(u_2)_{\mathfrak{m}}-[u_2,u_3]_{\mathfrak{m}}=(2q_{1,3},0,0)$, алгебра голономии нулевая, т. е. $\mathfrak{h}^*\neq\mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}$, и связность не является нормальной.

Для пары 3.13.6 при $\mu=1/2$ из $[\Lambda(e_3),\Lambda(u_1)]=\Lambda([e_3,u_1])\Rightarrow[\Lambda(e_3),\Lambda(u_1)]=0$ получаем $p_{3,1}=p_{3,2}=0$, $p_{3,3}=p_{1,1}$, $p_{2,1}=0$. Поскольку $[\Lambda(e_2),\Lambda(u_1)]=\Lambda([e_2,u_1])\Rightarrow$ $\Rightarrow[\Lambda(e_2),\Lambda(u_1)]=\Lambda(e_3)$, $p_{1,2}=-1$, $p_{1,1}=p_{2,2}$. Так как $[\Lambda(e_1),\Lambda(u_1)]=\Lambda(u_1)$, $p_{1,1}=p_{2,3}=p_{1,3}=0$. Если $[\Lambda(e_3),\Lambda(u_2)]=\Lambda(e_3)$, то $q_{3,1}=q_{3,2}=0$, $q_{3,3}=q_{1,1}+1$, $q_{2,1}=0$. Поскольку $[\Lambda(e_2),\Lambda(u_2)]=2\Lambda(e_2)$, $q_{1,2}=0$, $q_{1,1}=q_{2,2}+1$. Так как $[\Lambda(e_1),\Lambda(u_2)]=0$, имеем $q_{1,3}=q_{2,3}=0$. Если $[\Lambda(e_3),\Lambda(u_3)]=\Lambda(u_1)$, то $r_{3,1}=0$, $r_{3,2}=-1$, $r_{3,3}=r_{1,1}$, $r_{2,1}=0$. Поскольку $[\Lambda(e_2),\Lambda(u_3)]=\Lambda(u_2)$, $q_{1,1}=r_{1,2}=0$, $r_{1,1}=r_{2,2}$. Так как $[\Lambda(e_1),\Lambda(u_3)]=(1/2)\Lambda(u_3)$, $r_{1,1}=0, r_{2,3}=0$.

Будем выписывать аффинную связность через $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$, тензор кривизны R — через $R(u_1,u_2)$, $R(u_1,u_3)$, $R(u_2,u_3)$, а тензор кручения T — через $T(u_1,u_2)$, $T(u_1,u_3)$, $T(u_2,u_3)$. Тогда связность и тензор кривизны имеют вид, указанный в табл. 1 и 2 соответственно.

Таблица 1 / Table 1

Аффинная связность / Affine connection

Пара / Pair	Аффинная связность / Affine connection
5.9.2, 3.12.2	$\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$
4.19.2.	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$
4.21.11, $\mu\neq 0,1,1/2$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$
4.21.11, $\mu=1$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&q_{1,3}\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&-q_{1,3}&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$
4.21.11, $\mu=1/2$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&r_{1,3}\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$
3.6.2	$\begin{pmatrix}-1/2&0&0\\0&0&0\\0&0&1/2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-1/2&0&0\end{pmatrix}$

Окончание табл. 1 / End of Table 1

Пара / Pair	Аффинная связность / Affine connection
$3.13.6, \mu \neq 0, 1, -1, 1/2$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
$3.13.6,\ \mu = 1$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -q_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
$3.13.6,\ \mu = 1/2$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
3.28.2	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
2.7.2	$\begin{pmatrix} -1/2 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & 0 \\ 0 & q_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & q_{1,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}$
$2.8.7, \lambda \neq 0, 1, -1, 1/2$	$\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$2.8.7,\ \lambda = 1$	$\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{2,3} & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$2.8.7,\ \lambda = -1$	$\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & r_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$2.8.7,\ \lambda = 1/2$	$\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{2,3} \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.18.3	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & 0 \\ 0 & q_{1,1} + p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & q_{1,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,2} + 1 & 0 \end{pmatrix}$

Таблица 2 / Table 2

Тензор кривизны (тензор кручения нулевой)

Curvature tensor (torsion tensor is zero)

Пара / Pair	Тензор кривизны / Curvature tensor
4.21.11, $\mu = 1/2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3r_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3.13.6, $\mu = 1/2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3r_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.8.7, $\lambda = 1/2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3r_{2,3}/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Тензор кручения получился нулевым. Алгебра голономии при $r_{1,3} \neq 0$ не совпадает с алгеброй, порожденной множеством $V = \{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) | x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$ (т. е. алгебра голономии не является совершенной), $\mathfrak{h}^* = \begin{pmatrix} 0 & p_1 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$. Связность не является нормальной, так как $\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}) \supset \Lambda(\mathfrak{g})$, т. е. $\mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}$ по крайней мере трехмерна, и $\mathfrak{h}^* \neq \mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}$. При $r_{1,3} \neq 0$ алгебра голономии нулевая.

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Прямыми вычислениями получаем, что аффинные связности имеют вид, приведенный в табл. 1.

В случае 2.7.2 $\bar{\mathfrak{g}}$ не является полупростой, ее радикал коммутативен, в случаях 2.8.7 ($\lambda = -1$), 2.18.3 $\bar{\mathfrak{g}}$ не является полупростой, ее радикал некоммутативен, в этих случаях тензоры кривизны и кручения, алгебры голономии имеют вид, приведенный в табл. 3–5.

Таблица 3 / Table 3

Тензор кривизны (тензор кручения ненулевой)

Curvature tensor (torsion tensor is not zero)

Пара / Pair	Тензор кривизны / Curvature tensor
2.7.2	$\begin{pmatrix} 0 & -q_{1,2}/2 + p_{1,2}q_{2,2} - q_{1,1}p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{1,1}p_{1,2} + q_{1,2}/2 - p_{1,2}q_{2,2} & 0 \end{pmatrix}$

Окончание табл. 3 / End of Table 3

Пара / Pair	Тензор кривизны / Curvature tensor
2.8.7, $\lambda = -1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -q_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3r_{1,2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -q_{1,3}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{1,3}/2 \end{pmatrix}$
2.18.3	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}^2 + p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2}^2 - p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}$

Таблица 4 / Table 4

Тензор кручения (тензор кривизны ненулевой)

Torsion tensor (curvature tensor is not zero)

Пара / Pair	Тензор кручения / Torsion tensor
2.7.2	$(p_{1,2} - q_{1,1}, 0, 0)\,,\ (0,0,0),\ (0,0,q_{1,1} - p_{1,2})$
2.8.7, $\lambda = -1$	$(0,0,0),\ (0,0,0),\ (q_{1,3} - r_{1,2}, 0, 0)$
2.18.3	$(p_{1,2} - q_{1,1} + 1, 0, 0)\,,\ (0,0,0),\ (0,0,q_{1,1} - p_{1,2} - 1)$

Таблица 5 / Table 5

Алгебра голономии (тензор кручения ненулевой)

Holonomy algebra (torsion tensor is not zero)

Пара / Pair	Алгебра голономии $\mathfrak{h}^*$ / Holonomy algebra $\mathfrak{h}^*$
2.7.2	$2p_{1,2}(q_{2,2} - q_{1,1}) \neq q_{1,2}$ $\begin{pmatrix} 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \end{pmatrix}$ $2p_{1,2}(q_{2,2} - q_{1,1}) = q_{1,2}$ нулевая
2.18.3	$p_{1,2} \neq 0, -1$ $\begin{pmatrix} 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \end{pmatrix}$ $p_{1,2} = 0, -1$ нулевая
2.8.7, $\lambda = -1$	$q_{1,3} \neq 0, r_{1,2} \neq 0$ $\begin{pmatrix} p_2 & p_3 & p_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ p_4 & p_5 & -p_2 \end{pmatrix}$ $q_{1,3} \neq 0, r_{1,2} = 0$ $\begin{pmatrix} p_2 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ p_3 & 0 & -p_2 \end{pmatrix}$ $q_{1,3} = 0, r_{1,2} \neq 0$ $\begin{pmatrix} 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \end{pmatrix}$ иначе нулевая

Связность в указанных случаях не является нормальной, так как $\mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}} \supset \Lambda(\bar{\mathfrak{g}}) \supset$ $\supset \Lambda(\mathfrak{g})$, т. е. $\mathfrak{h}^* \neq \mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}$.

В случаях 5.9.2, 4.19.2, 4.21.11 ($\mu \neq 0, 1, 1/2$), 3.6.2, 3.12.2, 3.13.6 ($\mu \neq 0, 1, -1, 1/2$), 3.28.2, 2.8.7 ($\lambda \neq 0, 1, -1, 1/2$) тензоры кривизны и кручения, алгебры голономии всегда нулевые. В случаях 4.21.11 ($\mu = 1$), 3.13.6 ($\mu = 1$), 2.8.7 ($\lambda = 1$) тензор кривизны и алгебра голономии всегда нулевые, а тензор кручения имеет вид, указанный в табл. 6.

Таблица 6 / Table 6

Тензор кручения (тензор кривизны нулевой)

Torsion tensor (curvature tensor is zero)

Пара / Pair	Тензор кручения / Torsion tensor
4.21.11, $\mu = 1$	$(0,0,0),(0,0,0),(2q_{1,3},0,0)$
3.13.6, $\mu = 1$	$(0,0,0),(0,0,0),(2q_{1,3},0,0)$
2.8.7, $\lambda = 1$	$(0,0,0),(0,2p_{2,3},0),(0,0,0)$

В случаях 4.21.11 ($\mu = 1/2$), 3.13.6 ($\mu = 1/2$), 2.8.7 ($\lambda = 1/2$) тензор кручения нулевой, а тензоры кривизны и алгебры голономии имеют вид, указанный в табл. 2 и 7.

Таблица 7 / Table 7

Алгебра голономии (тензор кручения нулевой)

Holonomy algebra (torsion tensor is zero)

Пара / Pair	Алгебра голономии / Holonomy algebra
4.21.11, $\mu = 1/2$ 3.13.6, $\mu = 1/2$	$r_{1,3} \neq 0$ $\begin{pmatrix} 0 & p_1 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $r_{1,3} = 0$ нулевая
2.8.7, $\lambda = 1/2$	$r_{2,3} \neq 0$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p_1 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $r_{2,3} = 0$ нулевая

Очевидно, что во всех указанных выше случаях связность также не является нормальной.

Прямыми вычислениями получаем, что других трехмерных нередуктивных пар с неразрешимой $\bar{\mathfrak{g}}$ и разрешимой $\mathfrak{g}$, не допускающих нормальных связностей, кроме представленных в теореме 2, не существует.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведено локальное описание трехмерных нередуктивных однородных пространств с неразрешимой группой преобразований, не допускающих нормальных связностей (отдельно рассмотрены случаи, когда стабилизатор неразрешим и когда стабилизатор разрешим). Описаны в явном виде все инвариантные аффинные связности на таких пространствах, найдены тензоры кривизны, кручения, алгебры голономии указанных связностей. Полученные результаты могут быть использованы при решении математических и физических задач, требующих изучения инвариантных объектов на однородных пространствах.

Библиографический список

1. *Вагнер В. В.* Теория составного многообразия // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1950. Вып. 8. С. 11–72.
2. *Elircsmatin C.* Les connections infinitesimales dans un espace fibre differentiable // Colloque de Topologie. Bruxelles, 1950. P. 29–55.
3. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. матем. о-ва. 1953. Т. 2. С. 275–382.
4. *Акивис М. А., Гольдберг В. В., Чакмазян А. В.* Индуцированные связности на многообразиях в пространствах с фундаментальными группами // Изв. вузов. Матем. 2004. № 10. С. 3–19.
5. *Столяров А. В.* Двойственная теория оснащённых многообразий. Чебоксары : Чувашский гос. пед. ун-т, 1994. 290 с.
6. *Лумисте Ю. Г.* Теория связностей в расслоенных пространствах // Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. М. : ВИНИТИ, 1971. С. 123–168.
7. *Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии. М. : ВИНИТИ, 1979. Т. 9. С. 5–247.
8. *Kobayashi S., Nomizu K.* Foundations of differential geometry. N. Y. : John Wiley and Sons, 1963. Vol. 1; 1969. Vol. 2.
9. *Можей Н. П.* Трехмерные нередуктивные однородные пространства неразрешимых групп Ли // Докл. НАН Беларуси. 2017. Т. 61, № 4. С. 20–26.
10. *Можей Н. П.* Связности на нередуктивных однородных пространствах с неразрешимой группой преобразований // Докл. НАН Беларуси. 2017. Т. 61, № 5. С. 7–16.

Образец для цитирования:

Можей Н. П. Нередуктивные однородные пространства, не допускающие нормальных связностей // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 3. С. 284–296. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-284-296

Non-reductive Homogeneous Spaces Not Admitting Normal Connections

N. P. Mozhey

Natalya P. Mozhey, orcid.org/0000-0001-9237-7208, Belarussian State University of Informatics and Radioelectronics, 6, P. Brovki Str., Minsk, 220013, Belarus, mozheynatalya@mail.ru

The purpose of the work is the classification of three-dimensional non-reductive homogeneous spacesnot admitting normal connections, affine connections, their torsion tensors, curvature and holonomy algebras. The object of investigation arepointed-non-reductive spaces and connections on them. The basic notions, such as the isotropically-faithful pair, reductive space, af?ne connection, curvature tensor and torsion tensor, holonomy algebra and normal connection are defined. The local study of homogeneous spaces is equivalent to the investigation of pairs consisting of the Lie algebra and its subalgebra. The local classification of three-dimensional non-reductive homogeneous spaces with the unsolvable Lie group of transformations not admitting normal connections is given. All invariant affine connections on those spaces are described, curvature and torsion tensors are found; the holonomy algebras are investigated and it has been determined that the invariant connection is not normal. Studies are based on the use of properties of the Lie algebras, Lie groups and homogeneous spaces and they mainly have local character. The characteristic of the method presented in the work is the application of a purely algebraic approach to the description of homogeneous spaces and connections on them, as well as the combination of methods of differential geometry, the theory of Lie groups and algebras and the theory of homogeneous spaces. The obtained results can be used in the study of manifolds and can find application in various areas of mathematics and physics, since many fundamental problems in these areas relate to the investigation of invariant objects on homogeneous spaces.

Key words: reductive space, transformation group, normal connection, holonomy algebra.

References

1. Vagner V. V. Teoriya sostavnogo mnogoobraziya [The theory of composite manifold]. *Trudy seminara po vektornomu i tenzornomu analizu* [Proc. of the seminar on vector and tensor analysis]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1950, iss. 8, pp. 11–72 (in Russian).
2. Elircsmatin C. Les connections infinitesimales dans un espace fibre differentiable. *Colloque de Topologie*. Bruxelles, 1950, pp. 29–55.
3. Laptev G. F. Differencial'naya geometriya pogruzhennykh mnogoobrazij [Differential geometry of immersed manifolds]. *Trudy Mosk. matem. o-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1953, vol. 2, pp. 275–382 (in Russian).
4. Akivis M. A., Gol'dberg V. V., Chakmazjan A. V. Induced Connections on Manifolds in Spaces with Fundamental Groups. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2004, vol. 48, no. 10, pp. 1–15.
5. Stoljarov A. V. *Dvojstvennaya teoriya osnashchjonnykh mnogoobrazij* [Dual theory of framed manifolds]. Cheboksary, Chuvashskij State Ped. Univ., 1994. 290 p. (in Russian).
6. Lumiste U. G. Connection theory in bundle spaces. *J. Soviet Math.*, 1973, vol. 1, iss. 3, pp. 363–390.
7. Evtushik L. E., Lumiste Yu. G., Ostianu N. M., Shirokov A. P. Differential-geometric structures on manifolds. *J. Soviet Math.*, 1980, vol. 14, iss. 6, pp. 1573–1719.
8. Kobayashi S., Nomizu K. *Foundations of differential geometry*. New York, John Wiley and Sons, 1963, vol. 1; 1969, vol. 2.
9. Mozhej N. P. Trekhmernye nereduktivnyje odnorodnyje prostranstva nerazreshymykh grupp Li [Three-dimensional non-reductive homogeneous spaces of unsolvable Lie groups]. *Doklady NAN Belarusi* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus], 2017, vol. 61, no. 4, pp. 20–26 (in Russian).
10. Mozhej N. P. Svjaznosti na nereduktivnykh odnorodnykh prostranstvakh s nerazreshimoj gruppoj preobrazovanij [Connections on the non-reductive homogeneous spaces with the unsolvable group of transformations]. *Doklady NAN Belarusi* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus], 2017, vol. 61, no. 5, pp. 7–16 (in Russian).

Cite this article as:

Mozhey N. P. Non-Reductive Homogeneous Spaces Not Admitting Normal Connections. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 3, pp. 284–296 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-284-296