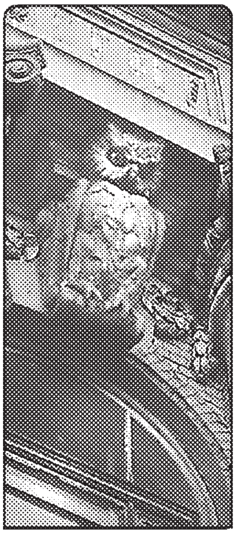

НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПРИМЕРЫ СУПЕРУСТОЙЧИВЫХ ПОЛУГРУПП И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕОРИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

Ву Нгуен Шон Тунг

Ву Нгуен Шон Тунг, аспирант кафедры математического анализа, Московский педагогический государственный университет, Россия, 107140, Москва, Краснопрудная, 14, vnsontung@mail.ru

В работе изучаются специальные примеры суперустойчивых (квазинильпотентных) полугрупп, применяемых в теории линейных обратных задач для эволюционных уравнений. Термин «полугруппа» означает здесь полугруппу линейных ограниченных операторов класса C_0. Используется стандартная схема исследования. В банаховом пространстве для эволюционного уравнения рассматривается линейная обратная задача с финальным переопределением. Вводится специальное предположение, связанное с суперустойчивостью основной эволюционной полугруппы, тогда для обратной задачи справедлива теорема существования и единственности решения. Отмечено, что решение задачи представимо сходящимся рядом Неймана. Для иллюстрации к общей теории рассмотрены специальные примеры суперустойчивых полугрупп, порождаемых одномерным оператором переноса с поглощением в весовом банаховом пространстве функций на полуоси. Показано, что существует широкий спектр возможностей для выбора коэффициента поглощения и веса пространства, при которых гарантирована суперустойчивость полугруппы. Установленные результаты допускают применение к конкретной обратной задаче для уравнения переноса с поглощением на полуоси. Предложенный подход можно распространить на многомерное уравнение переноса в неограниченной области без интеграла столкновений.

Ключевые слова: обратная задача, эволюционное уравнение, теорема существования и единственности решения, суперустойчивая полугруппа, уравнение переноса.

DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-252-262

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья написана в связи с одним вопросом, возникшим при изучении линейных обратных задач для эволюционных уравнений в банаховом пространстве. Общая теория обратных задач интересующего нас типа изложена в [1–3]. В недавнем исследовании, выполненном по данной теме [4], было использовано специальное предположение о *суперустойчивости* (квазинильпотентности) основной эволюционной полугруппы линейных операторов. Этот вырожденный класс особых полугрупп привлек внимание специалистов в последние десятилетия [5–9]. Для обратных задач упомянутое требование «суперустойчивости» является достаточно жестким, но в то же время оно позволяет избежать почти всех других ограничений. Естественно, что такой экстремальный случай полезно рассмотреть с должной подробностью.

Итак, используем стандартный полугрупповой подход [10–12]. Пусть $t \geqslant 0$. Напомним, что полугруппа $U(t)$ класса C_0 называется *суперустойчивой* (квазинильпотентной) в банаховом пространстве E, если ее *экспоненциальный тип*

$$\omega_0 \equiv \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln \| U(t)\|}{t} \tag{1}$$

оказывается равным $(-\infty)$. В таком случае при любом выборе сколь угодно большого числа $\alpha > 0$ найдется константа $M = M_\alpha \geqslant 1$, для которой

$$\| U(t)\| \leqslant M e^{-\alpha t}, \qquad t \geqslant 0. \tag{2}$$

Как известно (см. [10, с. 59]), при использовании эквивалентной нормы

$$\|f\|_\alpha = \sup_{\tau\geqslant 0} \| e^{\alpha\tau} U(\tau) f \|, \qquad f \in E, \tag{3}$$

с тем же значением $\alpha > 0$, что и в формуле (2), получим упрощенную оценку

$$\| U(t)\|_\alpha \leqslant e^{-\alpha t}, \qquad t \geqslant 0. \tag{4}$$

Выделим также специальный класс *нильпотентных* полугрупп, когда

$$U(t) = 0, \qquad \forall\, t \geqslant t_0 > 0, \tag{5}$$

с некоторым фиксированным значением $t_0 > 0$. Каждая нильпотентная полугруппа очевидно является квазинильпотентной (суперустойчивой).

В работе [4] (см. также [3]) в предположении о суперустойчивости эволюционной полугруппы была установлена корректная разрешимость общей линейной обратной задачи с переопределением в виде интеграла Римана–Стильтьеса. Для применения «абстрактных» результатов полезно располагать достаточным запасом суперустойчивых полугрупп. Отчасти такие примеры известны (см., например, [5, 8]). Сейчас мы придадим конструкции расширенную форму и покажем, что она дает применительно к теории обратных задач.

1. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА С ФИНАЛЬНЫМ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЕМ

Для простоты изложения ограничимся случаем обратной задачи с финальным переопределением. Ее активное изучение началось с работ [13–15].

В банаховом пространстве E на отрезке $[0,T]$ рассмотрим задачу

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + \varphi(t)g, & 0 \leqslant t \leqslant T, \\ u(0) = u_0, & u(T) = u_1, \end{cases} \tag{6}$$

с заданной скалярной функцией $\varphi(t) \not\equiv 0$, принадлежащей классу $C^1[0,T]$, и неизвестным элементом $g \in E$. Считаем, что A — линейный замкнутый оператор в пространстве E с плотной областью определения $D(A) \subset E$. Предполагаем также, что A порождает в E полугруппу $U(t)$ класса C_0. Элементы u_0, u_1 заданы в $D(A)$.

Решением задачи (6) назовем пару $(u(t), g)$, где $u \in C^1([0,T]; E)$, $u(t) \in D(A)$ при любом $t \in [0,T]$ и $g \in E$. Все соотношения в системе (6) должны быть выполнены. Общая теория подобных обратных задач представлена в [1–3].

Как известно (см. [3, 16]), удобный технический инструмент при исследовании обратной задачи (6) дает операторное уравнение

$$\beta g - Bg = f \tag{7}$$

относительно неизвестного элемента $g \in E$. Здесь $\beta \equiv \varphi(T)$. Правая часть

$$f = A(U(T)u_0 - u_1) \tag{8}$$

определяется данными из задачи (6). Линейный ограниченный оператор B имеет вид

$$B = U(T)\varphi(0) + \int_0^T U(T-s)\varphi'(s)\,ds. \tag{9}$$

Интеграл в формуле (9) понимается в сильной операторной топологии.

Предполагаем сейчас, что полугруппа $U(t)$ является суперустойчивой в банаховом пространстве E. В таком случае число $\lambda = 0$ не может быть собственным значением оператора A. Соответственно (см. [3]) операторное уравнение (7) оказывается эквивалентным исходной обратной задаче (6). Сформулируем следующий результат, основанный на принципах работы [4, теорема 2].

Теорема 1. *Пусть оператор A порождает в E суперустойчивую полугруппу $U(t)$ класса C_0. Предположим, что $\varphi \in C^1[0,T]$, причем $\beta \equiv \varphi(T) \neq 0$. Тогда при любом выборе элементов $u_0, u_1 \in D(A)$ обратная задача* (6) *имеет и притом единственное решение $(u(t), g)$. Нужный элемент $g \in E$ представим рядом Неймана*

$$g = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\beta^{k+1}} B^k f, \tag{10}$$

сходящимся по норме пространства E, а первый компонент решения находится по формуле

$$u(t) = U(t)u_0 + \int_0^t U(t-s)\varphi(s)g\,ds, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{11}$$

В конструкции ряда (10) *используются оператор B из формулы* (9) *и элемент f из формулы* (8). *Для элемента $g \in E$, найденного по формуле* (10), *справедлива оценка устойчивости*

$$\|g\| \leqslant C\,(\,\|Au_0\| + \|Au_1\|\,) \tag{12}$$

с некоторой константой $C > 0$.

Доказательство. Коротко напомним схему рассуждений (подробности см. в [4]). При заданном $g \in E$ прямая задача для дифференциального уравнения

$$u'(t) = Au(t) + \varphi(t)g, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

с начальным условием $u(0) = u_0$ имеет классическое решение $u(t)$ вида (11) (см. [11]). Сейчас требуется подобрать элемент $g \in E$ так, чтобы выполнялось предписанное финальное условие $u(T) = u_1$. Для нахождения нужного g вводим эквивалентное операторное уравнение (7) с оператором B из формулы (9) и правой частью f из формулы (8) (см. [3, 16]). Оценивая оператор B по норме (3) с учетом соотношения (4), имеем

$$\|B\|_\alpha \leqslant e^{-\alpha T}\,|\varphi(0)| + \int\limits_0^T e^{-\alpha(T-s)}\,|\varphi'(s)|\,ds \leqslant C_\varphi \left(e^{-\alpha T} + \frac{1}{\alpha}\right),$$

где $C_\varphi > 0$ — числовая мажоранта для $|\varphi(0)|$ и $|\varphi'(s)|$ при $0 \leqslant s \leqslant T$. Выбирая $\alpha > 0$ достаточно большим (что возможно в силу суперустойчивости полугруппы $U(t)$), добиваемся соотношения

$$\|B\|_\alpha < |\beta| \equiv |\varphi(T)|. \tag{13}$$

При получении (13) учтено предположение $\beta \equiv \varphi(T) \neq 0$. Из (13) следует однозначная разрешимость уравнения (7) и то, что его решение представимо рядом Неймана (10). Используя представление (8) для правой части $f \in E$ в корректно разрешимом операторном уравнении (7), устанавливаем оценку устойчивости (12). Теорема доказана. □

Несложный дополнительный анализ показывает (см. [4]), что в условиях теоремы 1 оператор B из формулы (9) сам является квазинильпотентным.

В случае, когда $\varphi(t) \equiv 1$ на $[0, T]$, формула для нахождения решения уравнения (7) сильно упрощается. Действительно, заметим, что тогда $\beta \equiv \varphi(T) = 1$ и $B = U(T)$ по формуле (9). Поэтому после несложных преобразований ряд (10) сводится к виду

$$g = -Au_1 + \sum_{k=1}^{\infty} U(kT)\,A(u_0 - u_1), \tag{14}$$

особенно удобному на практике. Если дополнительно полугруппа $U(t)$ является нильпотентной, удовлетворяющей условию (5) с некоторым фиксированным $t_0 > 0$, то формула (14) становится «конечной» в том смысле, что

$$g = \begin{cases} -Au_1, & t_0 \leqslant T, \\ -Au_1 + \sum\limits_{k=1}^{N_0} U(kT)\,A(u_0 - u_1), & t_0 > T, \end{cases} \tag{15}$$

со значением $N_0 \equiv \lceil t_0/T \rceil - 1$. Здесь $\lceil t_0/T \rceil$ означает потолок числа t_0/T, т. е. наименьшее целое число, большее или равное t_0/T. Подобное представление (15) указано также в статье [4].

Рассмотрим типичные примеры суперустойчивых полугрупп, раскрывающие возможности теоремы 1.

2. ПРИМЕРЫ СУПЕРУСТОЙЧИВЫХ ПОЛУГРУПП

Зафиксируем значение $p \in [1, +\infty)$ и возьмем неотрицательную, монотонно неубывающую функцию $\gamma(x)$, заданную при $x \geqslant 0$. На полуоси $\mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty)$ введем весовое банахово пространство

$$E \equiv L^p\big(\mathbb{R}_+ ;\, e^{-\gamma(x)}\, dx\big) \tag{16}$$

с нормой

$$\|h\| = \|h\|_{p,\gamma} \equiv \left(\int\limits_0^{+\infty} |h(x)|^p\, e^{-\gamma(x)}\, dx \right)^{1/p}, \qquad h \in E. \tag{17}$$

Рассмотрим оператор

$$A \equiv -\frac{d}{dx} - \sigma(x), \qquad x \geqslant 0, \tag{18}$$

где $\sigma(x)$ — измеримая, неотрицательная и локально ограниченная функция на $\mathbb{R}_+$. Оператор A в пространстве E имеет область определения

$$D(A) = \{\, h \in AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+) : \quad h \in E, \quad Ah \in E, \quad h(0) = 0 \,\}. \tag{19}$$

Здесь $AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ означает локально абсолютно непрерывные функции на $\mathbb{R}_+$. Так введенный оператор (18) порождает в пространстве (16) полугруппу сдвигов $U(t)$ (а точнее, сдвигов с поглощением), действующую при $t \geqslant 0$ на элемент $h \in E$, по правилу

$$U(t)h(x) = \begin{cases} h(x-t)\exp\left(-\int\limits_0^t \sigma(x-s)\, ds \right), & x > t, \\ 0, & x \leqslant t. \end{cases} \tag{20}$$

Стандартным способом — сначала на непрерывных функциях с компактным носителем в $\mathbb{R}_+$, а затем предельным переходом на все пространство (16) — показывается, что формула (20) определяет в E полугруппу $U(t)$ класса C_0.

При оценке нормы полугруппы $U(t)$ используем выражение

$$F(\tau, t) = p \int\limits_\tau^{\tau+t} \sigma(s)\, ds + \gamma(\tau + t) - \gamma(\tau), \qquad \tau \geqslant 0, \qquad t \geqslant 0, \tag{21}$$

связывающее две заданные функции $\gamma(x)$ и $\sigma(x)$. Справедлив следующий результат.

Лемма 1. *Пусть полугруппа $U(t)$ определена в пространстве* (16) *по формуле* (20). *Пусть функция $F(\tau, t)$, заданная по формуле* (21), *удовлетворяет оценке*

$$F(\tau, t) \geqslant a t^q, \qquad \tau \geqslant 0, \qquad t \geqslant 0, \tag{22}$$

с некоторыми константами $a > 0$ и $q > 1$. Тогда полугруппа $U(t)$ будет суперустойчивой в пространстве (16).

Доказательство. Оценим полугруппу (20) по норме (17) на элементе $h \in E$. При фиксированном $t \geqslant 0$ имеем

$$\| U(t)h \|^p = \int\limits_0^{+\infty} | U(t)h(x) |^p e^{-\gamma(x)} dx = \int\limits_t^{+\infty} |h(x-t)|^p e^{-p\eta(x,t)} e^{-\gamma(x)} dx, \qquad (23)$$

где

$$\eta(x,t) \equiv \int\limits_0^t \sigma(x-s)\, ds = \int\limits_{x-t}^{x} \sigma(s)\, ds = \int\limits_{x-t}^{(x-t)+t} \sigma(s)\, ds.$$

После замены $\tau = x - t$ в интеграле (23) получим, что

$$\| U(t)h \|^p = \int\limits_0^{+\infty} |h(\tau)|^p \exp\left(-p \int\limits_\tau^{\tau+t} \sigma(s)\, ds - \gamma(\tau+t) \right) d\tau.$$

Используя обозначение (21), приходим к выражению

$$\| U(t)h \|^p = \int\limits_0^{+\infty} |h(\tau)|^p e^{-F(\tau,t)} e^{-\gamma(\tau)} d\tau,$$

верному при всех $t \geqslant 0$. Теперь, применяя оценку (22), заключаем, что

$$\| U(t)h \|^p \leqslant \exp(-at^q) \int\limits_0^{+\infty} |h(\tau)|^p e^{-\gamma(\tau)} d\tau = \exp(-at^q)\, \|h\|^p, \qquad t \geqslant 0.$$

Поскольку выбор элемента h в пространстве (16) был произвольным, то

$$\| U(t) \| \leqslant \exp(-ct^q), \qquad t \geqslant 0, \qquad (24)$$

с константой $c = a/p$. По условию $q > 1$. Вычисляя экспоненциальный тип (1) с учетом полученной оценки (24), устанавливаем, что $\omega_0 = -\infty$, т. е. полугруппа (20) действительно является суперустойчивой в пространстве E. Лемма доказана. □

При проверке оценки (22) может пригодиться следующее элементарное утверждение о супераддитивности степенной функции.

Лемма 2. *При любом выборе числа $q > 1$ справедливо неравенство*

$$(\tau + t)^q \geqslant \tau^q + t^q, \qquad \tau \geqslant 0, \qquad t \geqslant 0. \qquad (25)$$

Доказательство. Учитывая ограничения леммы, имеем

$$(\tau + t)^q = \tau(\tau+t)^{q-1} + t(\tau+t)^{q-1} \geqslant \tau\tau^{q-1} + tt^{q-1} = \tau^q + t^q,$$

что и означает справедливость (25). □

Сохраняя исходные ограничения на функции $\gamma(x)$ и $\sigma(x)$, отметим два специальных случая, когда полугруппа (20) является суперустойчивой в пространстве (16).

Теорема 2. *Пусть* $\gamma(x) = ax^q$ *при* $x \geqslant 0$ *с константами* $a > 0$ *и* $q > 1$. *Тогда при любом выборе измеримой, неотрицательной, локально ограниченной функции* $\sigma(x)$ *полугруппа* (20) *является суперустойчивой в пространстве* (16).

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы 2. Для функции (21) с учетом неотрицательности $\sigma(x)$ и леммы 2 имеем

$$F(\tau,t) \geqslant \gamma(\tau+t) - \gamma(\tau) = a(\tau+t)^q - a\tau^q \geqslant at^q, \qquad \tau \geqslant 0, \qquad t \geqslant 0,$$

что соответствует оценке (22). Поскольку по условию $q > 1$, то на основании леммы 1 полугруппа (20) будет суперустойчивой в пространстве (16). Теорема доказана. □

Теорема 3. *Пусть* $\sigma(x) \geqslant bx^r$ *при* $x \geqslant 0$ *с константами* $b > 0$ *и* $r > 0$. *Тогда при любом выборе неотрицательной и неубывающей функции* $\gamma(x)$ *полугруппа* (20) *является суперустойчивой в пространстве* (16). *В частности, годится случай* $\gamma(x) \equiv 0$.

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы 3. Для функции (21) с учетом монотонности $\gamma(x)$ и леммы 2 имеем

$$F(\tau,t) \geqslant p \int\limits_{\tau}^{\tau+t} \sigma(s)\,ds \ \geqslant \ p \int\limits_{\tau}^{\tau+t} bs^r\,ds = a(\tau+t)^q - a\tau^q \geqslant at^q, \qquad \tau \geqslant 0, \qquad t \geqslant 0,$$

с константами $a = pb/(r+1) > 0$ и $q = r+1 > 1$. Но тогда на основании леммы 1 полугруппа (20) будет суперустойчивой в пространстве (16). Теорема доказана. □

Применим полученные результаты к обратной задаче типа (6) для уравнения переноса на полуоси.

3. ОДНОМЕРНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА С ПОГЛОЩЕНИЕМ

Итак, рассмотрим обратную задачу с финальным переопределением для одномерного уравнения переноса с поглощением на полуоси

$$\begin{cases} u_t + u_x + \sigma(x)u = \varphi(t)g(x), \qquad 0 \leqslant x < +\infty, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ u(0,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \qquad u(x,T) = u_1(x). \end{cases} \tag{26}$$

Пусть $T > 0$, $\sigma(x)$, $\varphi(t)$ известны. Функции $u_0(x)$ и $u_1(x)$ считаем заданными. Требуется восстановить неизвестную пару $(u(x,t), g(x))$.

Отметим, что теоремы 2, 3 дают широкий спектр возможностей для выбора коэффициента $\sigma(x) \geqslant 0$ и банахова пространства (16), при которых гарантирована корректность задачи (26). За счет квазинильпотентности возникающей полугруппы ограничения на функцию $\varphi(t)$ будут минимальными. Установим для примера только один результат.

При фиксированном значении $p \in [1, +\infty)$ рассматриваем задачу (26) в банаховом пространстве $E = L^p(\mathbb{R}_+)$ с оператором A из формулы (18), заданным на области определения (19). Решение обратной задачи (26) понимаем так же, как при постановке абстрактной задачи (6) в парагр. 1. Тогда для корректности поставленной обратной задачи достаточно потребовать определенного роста по x коэффициента $\sigma(x) \geqslant 0$.

Теорема 4. *Пусть* $\varphi \in C^1[0,T]$, *причем* $\varphi(T) \neq 0$. *Пусть* $\sigma(x)$ — *измеримая, неотрицательная и локально ограниченная на* $\mathbb{R}_+$ *функция, причем*

$$\sigma(x) \geqslant bx^r, \qquad x \geqslant 0, \tag{27}$$

с константами $b > 0$ *и* $r > 0$. *Тогда при любом выборе функций* $u_0(x)$, $u_1(x)$ *в области* (19) *обратная задача* (26) *имеет и притом единственное решение* $(u(x,t), g(x))$, *согласованное с выбором пространства* $E = L^p(\mathbb{R}_+)$.

Доказательство. По теореме 3 при требовании (27) полугруппа, порожденная оператором (18), будет суперустойчивой в пространстве $E = L^p(\mathbb{R}_+)$. Но тогда в силу теоремы 1 при любом выборе функций $u_0(x)$, $u_1(x)$ в области (19) обратная задача (26) имеет и притом единственное решение $(u(x,t), g(x))$, согласованное с выбором пространства $L^p(\mathbb{R}_+)$. Теорема доказана. □

В условиях теоремы 4 решение представимо конструктивным методом на основе ряда Неймана (10) с оператором B вида (9) и элементом f вида (8). Для найденной правой части $g(x)$ справедлива оценка устойчивости вида (12) относительно стандартной нормы пространства $L^p(\mathbb{R}_+)$.

Отметим еще, что при рассмотрении уравнения переноса не на полуоси, а на конечном отрезке $[0,l]$ возникает обратная задача

$$\begin{cases} u_t + u_x + \sigma(x)u = \varphi(t)\,g(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ u(0,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \qquad u(x,T) = u_1(x). \end{cases} \tag{28}$$

Здесь оператор A и полугруппа $U(t)$ задаются прежними формулами (18) и (20) с ограничением $0 \leqslant x \leqslant l$, а не $x \geqslant 0$, как было ранее. При этом полугруппа $U(t)$ оказывается нильпотентной, удовлетворяющей условию (5) со значением $t_0 = l$.

Выберем теперь $\varphi(t) \equiv 1$ на $[0,T]$. Тогда функция $g(x)$ в задаче (28) выражается в «конечном» виде на основе формулы (15). Предлагаемый подход можно распространить на многомерное уравнение переноса, взятое в неограниченной области без интеграла столкновений (см. также [17], где подробно разобрана аналогичная нелокальная задача для многомерного уравнения переноса).

Благодарности. Автор искренне благодарен И. В. Тихонову за постановку задачи и поддержку в исследовании, а также А. В. Подорога и Д. Г. Цветкович за помощь при оформлении статьи.

Библиографический список

1. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. N. Y. ; Basel : Marcel Dekker, 2000. 723 p.
2. *Прилепко А. И., Тихонов И. В.* Восстановление неоднородного слагаемого в абстрактном эволюционном уравнении // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58, № 2. С. 167–188. DOI: http://dx.doi.org/10.1070/IM1995v044n02ABEH001602
3. *Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С.* Вопросы корректности прямых и обратных задач для эволюционного уравнения специального вида // Матем. заметки. 1994. Т. 56, вып. 2. С. 99–113. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02110743

4. *Тихонов И. В., Ву Нгуен Шон Тунг.* Разрешимость линейной обратной задачи для эволюционного уравнения с суперустойчивой полугруппой // Вестн. РУДН. Сер. МИФ. 2018. Т. 26, № 2. С. 103–118. DOI: http://dx.doi.org/10.22363/2312-9735-2018-26-2-103-118
5. *Balakrishnan A. V.* On superstability of semigroups // Systems Modelling and Optimization : Proceedings of the 18th IFIP Conference. Ser. Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics. CRC Press, 1999. P. 12–19.
6. *Balakrishnan A. V.* Superstability of systems // Appl. Math. and Comput. 2005. Vol. 164, iss. 2. P. 321–326. DOI: https://doi.org/10.1016/j.amc.2004.06.052
7. *Jian-Hua Chen, Wen-Ying Lu.* Perturbation of nilpotent semigroups and application to heat exchanger equations // Appl. Math. Letters. 2011. Vol. 24. P. 1698–1701. DOI: https://doi.org/10.1016/j.aml.2011.04.023
8. *Creutz D., Mazo M., Preda C.* Superstability and finite time extinction for C_0-Semigroups. arXiv:0907.4812v4 [math.FA]. 12 p. URL: https://arxiv.org/pdf/0907.4812.pdf (дата обращения: 24.12.2013).
9. *Kmit I., Lyul'ko N.* Perturbations of superstable linear hyperbolic systems // Online journal. arXiv:1605.04703v3 [math.AP]. 29 p. URL: https://arxiv.org/pdf/1605.04703.pdf (дата обращения: 09.01.2018).
10. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М : Наука, 1967. 464 с.
11. *Pazy A.* Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. N. Y. : Springer, 1983. 279 p.
12. *Engel K.-J., Nagel R.* One-parameter semigroups for linear evolution equations. N. Y. : Springer, 2000. 586 p.
13. *Искендеров А. Д., Тагиев Р. Г.* Обратная задача об определении правых частей эволюционных уравнений в банаховом пространстве // Вопросы прикл. матем. и киберн. Науч. тр. Азерб. ун-та. 1979. № 1. С. 51–56.
14. *Rundell W.* Determination of an unknown non-homogeneous term in a linear partial differential equation from overspecified boundary data // Appl. Anal. 1980. Vol. 10, iss. 3. P. 231–242. DOI: https://doi.org/10.1080/00036818008839304
15. *Эйдельман Ю. С.* Краевые задачи для дифференциальных уравнений с параметрами : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Воронеж, 1984. 16 с.
16. *Орловский Д. Г.* К задаче определения параметра эволюционного уравнения // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 9. С. 1614–1621.
17. *Тихонов И. В., Ву Нгуен Шон Тунг.* Формулы явного решения в модельной нелокальной задаче для уравнения простого переноса // Матем. заметки СВФУ. 2017. Т. 24, № 1. С. 57–73. DOI: https://doi.org/10.25587/SVFU.2017.1.8437

Образец для цитирования:

Ву Нгуен Шон Тунг. Специальные примеры суперустойчивых полугрупп и их применение в теории обратных задач // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 3. С. 252–262. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-252-262

Special Examples of Superstable Semigroups and Their Application in the Inverse Problems Theory

Vu Nguyen Son Tung

Vu Nguyen Son Tung, https://orcid.org/0000-0002-8494-7669, Moscow State University of Education, 14, Krasnoprudnaya Str., Moscow, 107140, Russia, vnsontung@mail.ru

Special examples of superstable (quasinilpotent) semigroups and their application in the theory of linear inverse problems for evolutionary equations are studied. The term "semigroup" means here the semigroup of bounded linear operators of class C_0. The standard research scheme is used. The linear inverse problem with the final overdetermination in a Banach space for the evolution equation is considered. A special assumption is introduced, related to the superstability of the main evolutionary semigroup. For the inverse problem we establish the existence and uniqueness theorem of the solution. It is noted that the solution of the problem can be represented by the convergent Neumann series. To illustrate the general theory, we consider special examples of superstable semigroups that are generated by a one-dimensional streaming operator with absorption in the weighted Banach space of functions on the ray. It is shown that there are many possibilities for choosing the absorption coefficient and the weight function, under which the superstability of the corresponding semigroup is guaranteed. The established results allow applying to a particular inverse problem for the transport equation with absorption on the ray. The applied approach can be extended to the multidimensional transport equation in an unbounded domain without the collision integral.

Key words: inverse problem, evolution equation, existence and uniqueness theorem of the solution, superstable semigroup, transport equation.

Acknowledgements: The author is sincerely grateful to I. V. Tikhonov for posing the problems and support during research, and also A. V. Podoroga and D. G. Cvetkovic for help with the preparation of the article.

References

1. Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. *Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics*. New York ; Basel, Marcel Dekker, 2000. 723 p.
2. Prilepko A. I., Tikhonov I. V. Recovery of the nonhomogeneous term in an abstract evolution equation. *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, 1995, vol. 44, iss. 2, pp. 373–394. DOI: http://dx.doi.org/10.1070/IM1995v044n02ABEH001602
3. Tikhonov I. V., Eidelman Yu. S. Problems on correctness of ordinary and inverse problems for evolutionary equations of a special form. *Math. Notes*, 1994, vol. 56, iss. 2, pp. 830–839. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02110743
4. Tikhonov I. V., Vu Nguyen Son Tung. The solvability of the inverse problem for the evolution equation with a superstable semigroup. *RUDN Journal of MIPh*, 2018, vol. 26, iss. 2, pp. 103–118 (in Russian). DOI: http://dx.doi.org/10.22363/2312-9735-2018-26-2-103-118
5. Balakrishnan A. V. On superstability of semigroups. *Systems modelling and optimization: Proceedings of the 18th IFIP Conference on System Modelling and Optimization. Ser. Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics*, CRC Press, 1999, pp. 12–19.
6. Balakrishnan A. V. Superstability of systems. *Appl. Math. and Comput.*, 2005, vol. 164, iss. 2, pp. 321–326. DOI: https://doi.org/10.1016/j.amc.2004.06.052

7. Jian-Hua Chen, Wen-Ying Lu. Perturbation of nilpotent semigroups and application to heat exchanger equations. *Appl. Math. Letters*, 2011, vol. 24, pp. 1698–1701. DOI: https://doi.org/10.1016/j.aml.2011.04.023
8. Creutz D., Mazo M., Preda C. *Superstability and finite time extinction for C_0-Semigroups*. arXiv:0907.4812v4 [math.FA], 12 p. Available at: https://arxiv.org/pdf/0907.4812.pdf (accessed 24 December 2013).
9. Kmit I., Lyul'ko N. *Perturbations of superstable linear hyperbolic systems*. arXiv:1605.04703v3 [math.AP], 29 p. Available at: https://arxiv.org/pdf/1605.04703.pdf (accessed 9 January 2018).
10. Krein S. G. *Lineinye differentsial'nye uravneniia v banakhovom prostranstve* [Linear differential equations in Banach space]. Moscow, Nauka, 1967, 464 p. (in Russian).
11. Pazy A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. New York, Springer, 1983. 279 p.
12. Engel K.-J., Nagel R. *One-parameter semigroups for linear evolution equations*. New York, Springer, 2000. 586 p.
13. Iskenderov A. D., Tagiev R. G. The inverse problem on the determination of right sides of evolution equations in Banach space. *Nauchn. Tr., Azerb. Gos. Univ.*, 1979, iss 1, pp. 51–56 (in Russian).
14. Rundell W. Determination of an unknown non-homogeneous term in a linear partial differential equation from overspecified boundary data. *Appl. Anal.*, 1980, vol. 10, iss. 3, pp. 231–242. DOI: https://doi.org/10.1080/00036818008839304
15. Eidelman. Yu. S. *Krayevyye zadachi dlya differentsial'nykh uravneniy s parametrami*. Avtoref. dis. kand. fiz.-mat. nauk [Boundary value problems for differential equations with parameters : Thesis Diss. Cand. Sci. (Phys. and Math.)]. Voronez, 1984. 16 p. (in Russian).
16. Orlovsky D. G. On a problem of determining the parameter of an evolution equation. *Differ. Equ.*, 1990, vol. 26, iss. 9, pp. 1201–1207.
17. Tikhonov I. V., Vu Nguyen Son Tung. Formulas for an explicit solution of the model nonlocal problem associated with the ordinary transport equation. *Yakutian Math. J.*, 2017, vol. 24, no. 1, pp. 57–73. DOI: https://doi.org/10.25587/SVFU.2017.1.8437

Cite this article as:

Vu Nguyen Son Tung. Special Examples of Superstable Semigroups and Their Application in the Inverse Problems Theory. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 3, pp. 252–262 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-252-262