УДК 517.956.32

КРИТЕРИЙ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ КЛАССУ W_p^l ОБОБЩЕННОГО ИЗ КЛАССА L_p РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

И. С. Мокроусов

Мокроусов Илья Сергеевич, аспирант кафедры общей математики, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, 1, mokrousov.ilya@cs.msu.su

В статье исследуется вопрос принадлежности обобщенного решения волнового уравнения различным функциональным пространствам. Рассмотрение классических решений накладывает существенные ограничения на исходные данные задачи. Но если исходить не из дифференциальных, а из интегральных уравнений, то класс решений, а значит, и класс исходных краевых задач, можно существенно расширить. Для решения краевой задачи для волнового уравнения, полученного методом учета волн, легко получить достаточное условие принадлежности тому или иному классу. Гораздо более тонкий вопрос представляет нахождение необходимого и достаточного условия. В статье устанавливается критерий принадлежности классу W_p^l обобщенного из класса L_p решения волнового уравнения. Критерий связывает между собой условие на граничную функцию $\mu(t)$ и условие на решение задачи $u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0$. Таким образом, данный критерий может быть применим к оценкам задач управления, в частности по финальному условию задачи можно установить принадлежность функции управления. Данный критерий также применим к оценкам задач наблюдения для волнового уравнения, когда по свойствам граничной функции можно предугадывать свойства решения. Эта статья состоит из постановки задачи, рассмотрения раннее полученных результатов, формулировки и доказательства основной теоремы. Доказательство основной теоремы существенно опирается на представление решения указанной задачи в явном аналитическом виде. Этот результат обобщает ранее полученный критерий принадлежности для W_p^1. Стоит отметить, что хотя доказательство критерия для класса W_p^l структурно повторяет доказательство для класса W_p^1, оно существенно осложнено более тонкими оценками норм функций, входящих в решение задачи.

Ключевые слова: волновое уравнение, обобщенное решение, класс Лебега, класс Соболева.

DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-297-304

Как и в работах [1–6] будем рассматривать в прямоугольнике $Q_T = [0 \leqslant x \leqslant X] \times \times [0 \leqslant t \leqslant T]$ обобщенное из класса $L_p(Q_T)$ решение $u(x,t)$ смешанной задачи для волнового уравнения:

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \tag{1}$$

с нулевыми начальными условиями

$$u(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = 0 \tag{2}$$

и граничными условиями первого рода

$$u(0,t) = \mu(t), \qquad u(X,t) = 0, \tag{3}$$

второе из которых мы, не ограничивая общности, будем считать однородным.

Мы установим необходимые и достаточные условия на граничную функцию $\mu(t)$, обеспечивающие принадлежность рассматриваемого обобщенного из класса $L_p(Q_T)$ решения $u(x,t)$ классу $W_p^l(Q_T)$.

Решение задачи для волнового уравнения со слабыми ограничениями на начальные условия рассматривались в работах А. П. Хромова с соавторами [7, 8].

Ранее в [9] был установлен критерий принадлежности классу W_p^1 обобщенного из класса L_p решения волнового уравнения.

В работе [10] сформулирована и доказана теорема, определяющая решение задачи для волнового уравнения в широком классе функций.

Теорема 1 (Ильина – Кулешова). *Для любых фиксированных $T > 0$ и $p \geqslant 1$ единственное обобщенное из класса $L_p(Q_t)$ решение смешанной задачи* (1)–(3) *определяется равенством*

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{n-1} \underline{\mu}(t - x - 2lk) - \sum_{k=1}^{n} \underline{\mu}(t + x - 2lk), \tag{4}$$

в котором n — наименьший из номеров, удовлетворяющих условию $n \geqslant \frac{T}{2l}$, а символ $\underline{\mu}(t)$ обозначает функцию, совпадающую с $\mu(t)$ при $t \geqslant 0$ и равную нулю при $t < 0$.

Сформулируем обобщение теоремы 2 работы [10].

Теорема 2. *Для того чтобы обобщенное из класса $L_p(Q_T)$ решение смешанной задачи* (1)–(3) *принадлежало классу $W_p^l(Q_T)$ при целых $l \geqslant 1$, $p \geqslant 1$, необходимо, чтобы принадлежащая классу $L_p[0,T]$ граничная функция $\mu(t)$ для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ принадлежала классу $W_p^l[0, T - \varepsilon]$.*

Доказательство. Доказательство этой теоремы полностью повторяет схему теоремы 2 работы [10]. В данном случае требуется доказать, что из принадлежности обобщенного решения классу $W_p^l(Q_t)$ следует существование и принадлежность классу L_p обобщенной производной $\mu^{(l)}(t)$ на сегменте $[0, T - \varepsilon]$ при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$. Доказательство работы [10] с легкостью обобщается для этого случая, стоит только потребовать существования $\frac{\partial^{(l)}}{\partial t^{(l)}} u(x,t)$. □

Далее сформулируем основную теорему данной работы.

Теорема 3. *Если при фиксированных $T > 0$ и $p \geqslant 1$ граничная функция $\mu(t)$ принадлежит классу $L_1[0, T - \varepsilon]$ при любом ε из интервала $0 < \varepsilon < T$, то для принадлежности обобщенного из класса $L_p(Q_T)$ решения $u(x,t)$ смешанной задачи* (1)–(3) *к классу $W_p^l(Q_T)$ при $l \in \mathbb{N}$ необходимо и достаточно, чтобы граничная функция $\mu(t)$ имела на полусегменте $0 \leqslant t < T$ обобщенную производную $\mu^{(l)}(t)$ и существовал интеграл*

$$\int_0^T (T - t)|\mu^{(l)}(t)|^p dt. \tag{5}$$

Доказательство. Необходимость напрямую вытекает из теоремы 2. Остается доказать достаточность данного критерия. Приведем схему доказательства основной теоремы, которая опирается на статью [9]. Так как любое $T > 0$ представимо при некотором натуральном n либо в виде $T = 2Xn - \Delta$ при $0 \leqslant \Delta < X$, либо в виде $T = 2Xn + X - \Delta$ при $0 \leqslant \Delta < X$, то следует, как в [9], рассмотреть отдельно два случая: а) $T = 2Xn - \Delta$ при $0 \leqslant \Delta < X$, б) $T = 2Xn + X - \Delta$ при $0 \leqslant \Delta < X$.

Рассмотрим сначала случай а): в этом случае при всех Δ из полусегмента $0 \leqslant \Delta < X$ обобщенное решение $u(x,t)$ смешанной задачи (1)–(3) определяется равенством (4).

Из существования обобщенных, в смысле Соболева, производных $\mu^{(l)}(t)$ на полусегменте $[0,T)$ вытекает, что функции $\mu^{(i)}(t)$ для любого $i = 1,2,\dots,l-1$ по теореме вложения можно считать определенными и непрерывными в каждой точке этого полусегмента. Особую роль для дальнейших рассуждений играет значение функции $\mu(t)$ в точке $2Xn - X$.

Отдельно рассмотрим два подслучая а): 1) $\mu(2Xn - X) = 0$; 2) $\mu(2Xn - X) \neq 0$.

Сначала рассмотрим первый подслучай $\mu(2Xn - X) = 0$. В этом подслучае мы, как и в [9], представим $\mu(t)$ в виде суммы $\mu(t) = \mu_1(t) + \mu_2(t)$ со слагаемыми

$$\mu_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t \leqslant 2Xn - X, \\ \mu(t) & \text{при} \quad 2Xn - X < t < T, \end{cases} \qquad \mu_2(t) = \begin{cases} \mu(t) & \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2Xn - X, \\ 0 & \text{при} \quad 2Xn - X < t < T. \end{cases}$$

При таком представлении в силу равенства $\mu(2Xn - X) = 0$ каждая из функций $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ имеет обобщенную производную порядка l всюду на полусегменте $[0,T)$. В соответствии с таким представлением $\mu(t)$ и работами [11–17] решение $u(x,t)$, определяемое равенством (4) и линейно зависящее от граничной функции, разбивается на сумму $u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$ со слагаемыми, определяемыми равенствами

$$u_1(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t - x \leqslant 2Xn - X, \\ \mu_1(t-x) = \mu(t-x) & \text{при} \quad 2Xn - X < t - x < T, \end{cases} \tag{6}$$

$$u_2(x,t) = \sum_{k=0}^{n-1} \underline{\mu}_2(t - x - 2Xk) - \sum_{k=1}^{n} \underline{\mu}_2(t + x - 2Xk), \tag{7}$$

во втором из которых символ $\underline{\mu}_2(\tau)$ обозначает функцию, совпадающую с $\mu_2(\tau)$ при $0 \leqslant \tau \leqslant 2Xn - X$ и равную нулю при $\tau < 0$ и $\tau > 2Xn - X$.

Нетрудно убедиться в том, что для функции $\mu_2(\tau)$ существуют интегралы $\int\limits_0^T (T-t)\left|\mu_2^{(k)}(t)\right|^p dt$, где $k = \overline{1,l}$, а функция $u_2(x,t)$ принадлежит классу $W_p^l(Q_T)$. Это вытекает из того, что в силу условия теоремы существуют интегралы $\int\limits_0^{2Xn-X} \left|\mu_2^{(k)}(t)\right|^p dt$, из цепочки соотношений

$$\int\limits_0^T (T-t)\left|\mu_2^{(k)}(t)\right|^p dt = \int\limits_0^{2Xn-X} (T-t)\left|\mu_2^{(k)}(t)\right|^p dt \leqslant T \int\limits_0^{2Xn-X} \left|\mu_2^{(k)}(t)\right|^p dt$$

и из того, что для каждого из $2n$ слагаемых, стоящих в правой части (7), справедливо неравенство

$$\int\limits_0^X \left[\int\limits_0^T \left|\underline{\mu}_2^{(k)}(t \mp x - 2lk)\right|^p dt \right] dx \leqslant X \int\limits_0^{2Xn-X} \left|\mu^{(k)}(\tau)\right|^p d\tau. \tag{8}$$

Таким образом, для доказательства основной теоремы в случае а) в силу соотношения (6) достаточно убедиться в том, что каждый интеграл

$$\int_0^X \left[\int_0^T |D^\alpha u_1(x,t)|^p \, dt \right] dx = C \int_0^X \left[\int_{2Xn-X}^T \left| \mu_1^{(|\alpha|)}(t-x) \right|^p dt \right] dx, \tag{9}$$

где $C = \mathrm{const}$ и α — двухмерный мультииндекс $0 \leqslant |\alpha| \leqslant l$, существует тогда и только тогда, когда существует интеграл

$$\int_{2Xn-X}^T (T-t) \left| \mu_1^{(l)}(t) \right|^p dt. \tag{10}$$

Стоит заметить, что для случая, когда мультииндекс $0 \leqslant |\alpha| < l$ интеграл (9) существует в силу того, что под знаком интеграла стоит непрерывная функция. Далее будем рассматривать интеграл (9), полагая мультииндекс, равным l.

В силу свойства полной аддитивности интеграла Лебега от неотрицательной функции достаточно доказать, что функция

$$I(\varepsilon) = \int_0^X \left[\int_{2Xn-X}^{T-\varepsilon} \left| \mu_1^{(l)}(t-x) \right|^p dt \right] dx \tag{11}$$

ограничена на множестве всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ тогда и только тогда, когда на множестве всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ ограничена функция

$$\int_{2Xn-X}^{T-\varepsilon} (T-t) \left| \mu_1^{(l)}(t) \right|^p dt. \tag{12}$$

Произведя в интеграле (11) замену переменной $\tau = t - x$ и учитывая, что $\mu_1(t)$ обращается в нуль при $0 \leqslant t \leqslant 2Xn - X$ и что $T - \varepsilon - x \geqslant 2Xn - X$ только при $x \leqslant l - \Delta - \varepsilon$, мы получим

$$I(\varepsilon) = \int_0^X \left[\int_{2Xn-X}^{T-\varepsilon-x} \left| \mu_1^{(l)}(\tau) \right|^p d\tau \right] dx = \int_0^{X-\Delta-\varepsilon} \left[\int_{2Xn-X}^{T-\varepsilon-x} \left| \mu_1^{(l)}(\tau) \right|^p d\tau \right] dx.$$

Применяя к последнему интегралу формулу интегрирования по частям, получим

$$I(\varepsilon) = \left[x \int_{2Xn-X}^{T-\varepsilon-x} \left| \mu_1^{(l)}(\tau) \right|^p d\tau \right]_{x=0}^{x=l-\Delta-\varepsilon} + \int_0^{l-\Delta-\varepsilon} x \left| \mu_1^{(l)}(T-\varepsilon-x) \right|^p dx.$$

При любом $\varepsilon > 0$ обе подстановки обращаются в нуль. Поэтому, сделав в последнем интеграле замену $y = x + \varepsilon$, мы получим, что

$$I(\varepsilon) = \int_\varepsilon^{X-\Delta} (y-\varepsilon) \left| \mu_1^{(l)}(T-y) \right|^p dy. \tag{13}$$

Для дальнейшего нам понадобятся следующие два тривиальных неравенства:

$$y - \varepsilon \leqslant y \quad \text{при всех} \quad \varepsilon \leqslant y \leqslant l - \triangle, \tag{14}$$

$$y-\varepsilon \geqslant \frac{1}{2}y \quad \text{при всех} \quad 2\varepsilon \leqslant y \leqslant l-\triangle. \tag{15}$$

Из (13)–(15) вытекают следующие неравенства:

$$\int\limits_{\varepsilon}^{X-\Delta} y\left|\mu_1^{(l)}(T-y)\right|^p dy \geqslant I(\varepsilon) \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{2\varepsilon}^{X-\Delta} y\left|\mu_1^{(l)}(T-y)\right|^p dy.$$

Сделаем замену $t=T-y$ и получим

$$\int\limits_{2Xn-X}^{T-\varepsilon}(T-t)\left|\mu_1^{(l)}(t)\right|^p dt \geqslant I(\varepsilon) \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{2Xn-X}^{T-2\varepsilon}(T-t)\left|\mu_1^{(l)}(T-y)\right|^p dy. \tag{16}$$

В силу сказанного выше неравенства (16) завершают доказательство основной теоремы для случая а).

Укажем теперь, как подслучай $\mu(2Xn-X)\neq 0$ случая а) сводится к рассмотренному нами подслучаю. Для этого введем в рассмотрение решение $u_0(x,t)$ смешанной задачи (1)–(3) с граничной функцией $\mu_0(t)$, имеющей следующий вид:

$$\mu_0(t)=\frac{\mu(2Xn-X)}{(2Xn-X)^2}t^2. \tag{17}$$

Для рассматриваемого нами случая а) решение $u_0(x,t)$ определяется равенством

$$u_0(t)=\frac{\mu(2Xn-X)}{(2Xn-X)^2}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(\underline{t-x-2Xk})^2-\sum_{k=1}^{n}(\underline{t+x-2Xk})^2\right\}, \tag{18}$$

в котором символ $(\underline{\tau})^2$ обозначает функцию, равную τ^2 при $\tau\geqslant 0$ и равную нулю при $\tau<0$.

Из явного вида (17) и (18) функций $\mu_0(t)$ и $u_0(x,t)$ легко проверяется, что функция $u_0(x,t)$ принадлежит классу $W_p^l(Q_T)$, а для функции $\mu_0(t)$ существует интеграл $\int\limits_0^T(T-t)\left|\mu_0^{(l)}(t)\right|^p dt$. Отсюда следует, что для завершения доказательства основной теоремы в подслучае $\mu(2Xn-X)\neq 0$ случая а) достаточно установить справедливость утверждения основной теоремы для решения $\hat{u}(x,t)=u(x,t)-u_0(x,t)$ смешанной задачи (1)–(3) с граничной функцией $\hat{\mu}(t)=\mu(t)-\mu_0(t)$. Поскольку $\hat{\mu}(2Xn-X)=0$, то мы свели рассматриваемый подслучай $\mu(2Xn-X)\neq 0$ к рассмотренному выше первому подслучаю. Итак, для случая а) основная теорема доказана.

Для случая б), когда $T=2Xn+X-\Delta$ при $0\leqslant\Delta<l$, схема доказательства основной теоремы полностью аналогична схеме, изложенной выше для случая а).

На этот раз для всех Δ из полусегмента $0\leqslant\Delta<l$ решение $u(x,t)$ смешанной задачи (1)–(3) определяется равенством

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{n}\underline{\mu}(t-x-2Xk)-\sum_{k=1}^{n}\underline{\mu}(t+x-2Xk)\,,$$

в котором $\underline{\mu}(\tau)$ равно $\mu(\tau)$ при $\tau\geqslant 0$ и равно нулю при $\tau<0$, а сегмент $0\leqslant t\leqslant$ $\leqslant 2Xn-X$ и интервал $2Xn-X<t<T$, на которые в случае а) разбивается полусегмент $[0,T)$, в случае б) заменяются сегментом $0\leqslant t\leqslant 2Xn$ и интервалом $2Xn<t<T$.

В случае б) так же, как и в случае а), рассматриваются два подслучая $\mu(2Xn) = 0$ и $\mu(2Xn) \neq 0$, причем второй из этих подслучаев сводится к первому.

На этом доказательство теоремы завершено. $\square$

Библиографический список

1. *Ильин В. А.* О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений // УМН. 1960. Т. 15, № 2. С. 97–154.
2. *Ильин В. А., Кулешов А. А.* О некоторых свойствах обобщенных решений волнового уравнения из классов L_p и W_p^1 при $p \geqslant 1$ // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 11. С. 1493–1500.
3. *Моисеев Е. И., Холомеева А. А.* О разрешимости смешанных задач для уравнения колебаний струны в пространстве $W_p^1, p \geqslant 1$ // Докл. АН. 2011. Т. 441, № 3. С. 310–312.
4. *Ильин В. А., Кулешов А. А.* Об эквивалентности двух определений обобщенного из класса l_p решения смешанной задачи для волнового уравнения // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 2014. Т. 284. С. 163–168.
5. *Ильин В. А., Кулешов А. А.* Необходимые и достаточные условия принадлежности классу W_p^1 при $p \geqslant 1$ обобщенного решения смешанной задачи для волнового уравнения // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 2013. Т. 283. С. 115–120.
6. *Моисеев Е. И., Тихомиров В. В.* О волновом процессе с конечной энергией при заданном граничном режиме на одном конце и упругом закреплении на другом конце // Нелинейная динамика и управление. М. : Физматлит, 2007. Вып. 5. С. 141–148.
7. *Хромов А. П., Бурлуцкая М. Ш.* Классическое решение методом Фурье смешанных задач при минимальных требованиях на исходные данные // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 2. С. 171–198.
8. *Хромов А. П.* О классическом решении одной смешанной задачи для волнового уравнения // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 1. С. 56–66. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-1-56-66
9. *Ильин В. А., Кулешов А. А.* Критерий принадлежности классу W_p^1 обобщенного из класса L_p решения волнового уравнения // Докл. АН. 2012. Т. 447, № 1. С. 15–17.
10. *Ильин В. А., Кулешов А. А.* Обобщенные решения волнового уравнения из классов L_p и W_p^1 при $p \geqslant 1$ // Докл. АН. 2012. Т. 446, № 4. С. 374–377.
11. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М. : Наука, 1972. 736 с.
12. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М. : Наука, 1981. 512 с.
13. *Садовничий В. А.* Теория операторов. М. : Дрофа, 2004. 381 с.
14. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969. 528 с.
15. *Стеклов В. А.* Основные задачи математической физики. М. : Наука, 1983. 432 с.
16. *Ладыженская О. А.* Смешанная задача для гиперболического уравнения. М. : Гостехиздат, 1953. 282 с.
17. *Ильин В. А.* Избранные труды : в 2 т. М. : Изд-во ООО «Макс-пресс», 2008. Т. 1. 727 с.

Образец для цитирования:

Мокроусов И. С. Критерий принадлежности классу W_p^l обобщенного из класса L_p решения волнового уравнения // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 3. С. 297–304. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-297-304

Criterion for a Generalized Solution in the Class L_p for the Wave Equation to Be in the Class W_p^1

I. S. Mokrousov

Ilya S. Mokrousov, https://orcid.org/0000-0002-9990-5859, Lomonosov Moscow State University, GSP-1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia, mokrousov.ilya@cs.msu.su

In this paper we consider the question of whether a generalized solution of the wave equation belongs to different function spaces. Consideration of classical solutions imposes substantial restrictions on the initial data of the problem. But if we proceed not from differential but from integral equations, then the class of solutions and the class of initial boundary value problems can be substantially expanded. To solve the boundary value problem for the wave equation obtained by the wave counting method, it is easy to obtain a sufficient condition for belonging to a particular class. A much more subtle question is finding the necessary and sufficient condition. A criterion is established for class W_p^l to belong to the solution of the wave equation generalized from class L_p. The criterion establishes a connection between the condition for the boundary function $\mu(t)$ and the condition on the solution of the problem $u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0$. Thus, this criterion can be applied to the estimation of control tasks, in particular, depending on the final condition of the problem, it is possible to establish the membership of the control function. In the same way this criterion can be applied to the estimates of the observation problems for the wave equation, when the properties of the solution can be predicted from the properties of the boundary function. This article consists of the formulation of the problem, the consideration of earlier results, the formulation and proof of the main theorem. The proof of the main theorem is essentially based on the representation of the solution of this problem in explicit analytical form. This result generalizes the previously obtained criterion for W_p^1. It should be noted that, although the proof of the criterion for the class W_p^l structurally repeats the proof for the class W_p^1, it is significantly complicated by more subtle estimates of the norms of functions entering into the solution of the problem.

Key words: wave equation, generalized solution, Lebesgue class, Sobolev class.

References

1. Il'in V. A. The solvability of mixed problems for hyperbolic and parabolic equations. *Russ. Math. Surv.*, 1960, vol. 15, no. 2, pp. 85–142.
2. Il'in V. A., Kuleshov A. A. On some properties of generalized solutions of the wave equation in the classes L_p and W_p^1 for $p \geqslant 1$. *Differential equations*, 2012, vol. 48, no. 11, pp. 1470–1476. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266112110043
3. Moiseev E. I., Kholomeeva A. A. Solvability of mixed problems for the string oscillation equation in the space W_p^1, with $p \geqslant 1$. *Doklady Math.*, 2011, vol. 84, no. 3, pp. 818–820. DOI: https://doi.org/10.1134/S1064562411070192
4. Il'in V. A., Kuleshov A. A. Equivalence of two definitions of a generalized L_p solution to the initial-boundary value problem for the wave equation. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2014, vol. 284, iss. 1, pp. 155–160. DOI: https://doi.org/10.1134/S0081543814010106
5. Il'in V. A., Kuleshov A. A. Necessary and sufficient conditions for a generalized solution to the initial-boundary value problem for the wave equation to belong to W_p^1 with $p \geqslant 1$. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2013, vol. 283, iss. 1, pp. 110–115. DOI: https://doi.org/10.1134/S0081543813080087
6. Moiseev E. I, Tihomirov V. V. O volnovom processe s konechnoj ehnergiej pri zadannom granichnom rezhime na odnom konce i uprugom zakreplenii na drugom konce [On a wave process with finite energy for a given boundary regime at one end and elastic fastening at the other end]. *Nelineinaia dinamika i upravlenie* [Nonlinear dynamics and control], Moscow, Physmathlit, 2007, iss. 5, pp. 141–148 (in Russian).

7. Khromov A. P., Burlutskaya M. Sh. Classical solution by the Fourier method of mixed problems with minimum requirements on the initial data. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, iss. 2, pp. 171–198 (in Russian).
8. Khromov A. P. About the classical solution of the mixed problem for the wave equation. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, iss. 1, pp. 56–66 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-1-56-66
9. Il'in V. A., Kuleshov A. A. Criterion for a generalized solution in the class L_p for the wave equation to be in the class W_p^1. *Doklady Math.*, 2012, vol. 86, no. 3, pp. 740–742. DOI: https://doi.org/10.1134/S1064562412060038
10. Il'in V. A., Kuleshov A. A. Generalized solutions of the wave equation in the classes L_p and W_p^1 with $p \geqslant 1$. *Doklady Math.*, 2012, vol. 86, no. 2, pp. 657–660. DOI: https://doi.org/10.1134/S106456241205016X
11. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. Uravneniia matematicheskoi fiziki [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka, 1972. 736 p. (in Russian).
12. Vladimirov V. S. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka, 512 p. (in Russian).
13. Sadovnichii V. A. *Teoriia operatorov* [Operator theory]. Moscow, Drofa, 2004. 381 p. (in Russian).
14. Naimark M. A. *Lineinye differentsial'nye operatory* [Linear differential operators]. Moscow, Nauka, 1969. 528 p. (in Russian).
15. Steklov V. A. *Osnovnye zadachi matematicheskoj fiziki* [Fundamental problems in mathematical physics]. Moscow, Nauka, 1983. 432 pp. (in Russian)
16. Ladyzhenskaya O. A. *Smeshannaya zadacha dlya giperbolicheskogo uravneniya* [A mixed problem for the hyperbolic equation]. Moscow, Gostehizdat, 1953. 282 p. (in Russian).
17. Il'in V. A. *Izbrannye trudy* [Selected works]. Vol. 1. Moscow, MAKS Press, 2008. 727 p. (in Russian).

Cite this article as:
Mokrousov I. S. Criterion for a Generalized Solution in the Class L_p for the Wave Equation to Be in the Class W_p^1. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 3, pp. 297–304 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-297-304