

МЕХАНИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 1. С. 57–69

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2025, vol. 25, iss. 1, pp. 57–69

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-57-69>

EDN: NAODYG

Научная статья

УДК 514.85,531.36

Динамика парадоксального механизма П. Л. Чебышёва

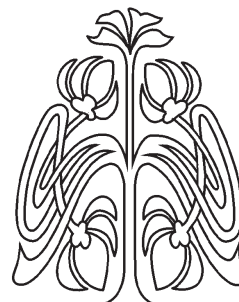
С. Н. Бурьян

Государственный научно-исследовательский институт прикладных проблем, Россия, 191167, г. Санкт-Петербург, наб. Обводного канала, д. 29

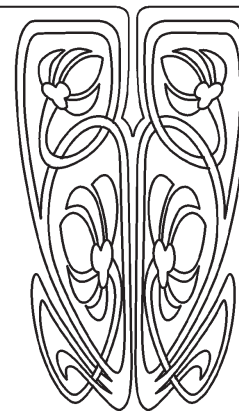
Бурьян Сергей Николаевич, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, burianserg@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7795-6735>, SPIN: 1839-6004, AuthorID: 974092

Аннотация. Рассматривается парадоксальный механизм П. Л. Чебышёва. Этот механизм может быть представлен как объединение лямбда-механизма и двойного маятника, свободные вершины которых соединены шарнирно. Одно из звеньев двойного маятника обычно заменяется массивным диском. Среди известных механизмов П. Л. Чебышёва только в парадоксальном механизме возникают особые точки конфигурационного пространства, или точки ветвления. В соответствующих конфигурациях механизма стержни двойного маятника становятся параллельными или антипараллельными. Механизм может продолжить движение из особых точек двумя различными способами, которые отличаются направлением вращения диска. В одном случае при полном обороте ведущего звена диск делает два полных оборота, а в другом случае — четыре полных оборота. Траектория свободной вершины лямбда-механизма в парадоксальном механизме находится между двумя концентрическими окружностями и поочередно касается каждой окружности в трех точках. В статье рассматривается обобщение для случая, когда количество последовательных точек касания с двумя окружностями является произвольным четным числом. Доказывается, что в этом случае возможно получить любое заданное количество оборотов диска за один оборот ведущего звена механизма. Для парадоксального механизма записаны основные уравнения динамики, получено выражение для момента сил инерции диска. Сравняется работа внешнего момента, который приложен к ведущему звену механизма, и работа сил инерции диска.

Ключевые слова: механизмы Чебышёва, парадоксальный механизм, шарнирный механизм, особая точка, голономная связь, множители Лагранжа



Научный
отдел





Для цитирования: Бурьян С. Н. Динамика парадоксального механизма П. Л. Чебышёва // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 1. С. 57–69. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-57-69>, EDN: NAODYG
Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Dynamics of P. L. Chebyshev's paradoxical mechanism

S. N. Burian

State Research Institute of Applied Problems, 29 Naberezhnaya Obvodnogo kanala, St. Petersburg 191167, Russia

Sergey N. Burian, burianserg@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7795-6735>, SPIN: 1839-6004, AuthorID: 974092

Abstract. The paradoxical mechanism of P. L. Chebyshev is the main issue of this article. The paradoxical mechanism could be considered as the union of the lambda-mechanism and a double pendulum the free vertices of which are hingedly connected. One of the pendulum rods is usually replaced by a massive disk. Among all known mechanisms of P. L. Chebyshev, singular points of the configuration space or branching points arise only in the paradoxical mechanism. In particular configurations of the paradoxical mechanism the rods of the double pendulum become parallel. In this case, the mechanism could continue the motion from the singular points in two different ways. There are two types of smooth motion of the paradoxical mechanism, which differ by the direction of the disk rotation. In the first case, with a full circle of the drive link, the disk makes two full circles. In the second case, it makes four full circles. The trajectory of the free vertex of the lambda-mechanism in the paradoxical mechanism is located between two concentric circles and alternately touches each circle at three points. In addition, the curve that is located between two concentric circles and touches each circle in an arbitrary number of points is considered in the article. It is proved that it is possible to obtain any given number of disk revolutions in one revolution of the mechanism-driving link. The basic equations of dynamics are written down for the paradoxical mechanism. The expression for the moment of inertia forces of the disk is written down. The work of the external moment, which is applied to the leading link of the mechanism, and the work of the disk inertia forces are compared.

Keywords: Chebyshev's mechanisms, paradoxical mechanism, hinge mechanism, singular point, holonomic constraint, Lagrange multipliers

For citation: Burian S. N. Dynamics of P. L. Chebyshev's paradoxical mechanism. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 1, pp. 57–69 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-57-69>, EDN: NAODYG

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

В работах П. Л. Чебышёва по теории механизмов рассматривается специальный механизм для преобразования вращательного движения в движение по заданной кривой, который получил название «лямбда-механизм». Вероятно, такое название возникло из-за того, что в некоторых положениях этот шарнирный механизм становится похожим на греческую букву «λ». Лямбда-механизм является плоским шарнирным механизмом с одной степенью свободы, который состоит из трех связанных стержней. У механизма есть три параметра, которые однозначно определяют его геометрию. В зависимости от отношений параметров возможно получить различные формы кривых, которые описывает свободная вершина лямбда-механизма.

Для решения задач о синтезе шарнирных механизмов с остановками, механизмов для двух качаний коромысла за один оборот кривошипа, механизмов передачи вращательного движения



Чебышёвым используются свойства кривых, которые описываются лямбда-механизмом [1, 2]. Например, для механизма с двумя качаниями за один оборот применяется вспомогательный лямбда-механизм, который описывает кривую типа «восьмерки». Среди известных механизмов П. Л. Чебышёва только в «парадоксальном» механизме возникают особые точки конфигурационного пространства, или точки ветвления. Этот «парадоксальный» механизм является основным объектом исследования в данной статье. Далее кавычки в названии «парадоксальный механизм» опускаются.

На интернет-ресурсе [3] есть цифровые модели механизмов П. Л. Чебышёва. Некоторые оригинальные модели П. Л. Чебышёва находятся в музее истории Санкт-Петербургского государственного университета. Фотографии, описания и истории некоторых моделей механизмов есть в [4].

Для описания движения парадоксального механизма применяются уравнения Лагранжа второго рода, которые подробно описываются в [5, 6]. В динамике парадоксального механизма за один оборот ведущего звена ведомый диск (маховик) совершает два или четыре полных оборота. Соответственно, при этом получается кратное увеличение скорости на самом диске в сравнении со скоростью вращения ведущего звена. Поэтому интерес также представляет сравнение работы, которую совершает ведущее звено под действием (постоянного) внешнего момента, и работы, которую совершает момент сил инерции диска. Для определения работы маховика применяется понятие момента сил инерции, которое рассматривается в [7, 8] с точки зрения теории механизмов.

Конфигурационное пространство парадоксального механизма имеет геометрические особые точки, через которые проходит не одна, а две возможные траектории движения системы. Особенности конфигурационного пространства возникают из-за зависимых (не)голономных связей, наложенных на систему. В литературе проблема динамики для систем с геометрическими особенностями является мало исследованной. Перестройки конфигурационного пространства и бифуркации положений равновесия для особенностей голономных связей исследуются в [9]. Движение механической системы с особенностями неголономных связей анализируется в [10]. В статье [11] исследуется механизм с особенностями конфигурационного пространства, сингулярный маятник. Аналогичный маятник есть и в парадоксальном механизме. В работе [12] рассматриваются свойства векторных полей на конфигурационном пространстве с особенностью с помощью методов дифференциальной геометрии.

Статья имеет следующую структуру. В разделе 1 кратко сформулированы результаты П. Л. Чебышёва по парадоксальному механизму. В разделе 2 обобщаются свойства кривой, которая описывается свободной вершиной лямбда-механизма в парадоксальном механизме. В разделе 3 находится момент сил инерции диска (маховика). Статья является продолжением статьи автора [13], в которой более подробно рассматриваются построения, связанные с кинематикой и динамикой парадоксального механизма.

В данной работе рассматриваются два новых вопроса, связанных с парадоксальным механизмом и его обобщениями. Первым вопросом является общее количество оборотов ведомого звена (обобщенного) парадоксального механизма. В парадоксальном механизме ведомое звено (или маховик) делает два или четыре полных оборота за один виток ведущего звена. Рассматривается обобщение парадоксального механизма, в котором ведомое звено совершает произвольное заданное число оборотов. Вторым вопросом является изучение момента сил инерции маховика для некоторых типов движения парадоксального механизма. Рассматриваются два случая: вращение ведущего звена с постоянной угловой скоростью и действие постоянного момента на ведущее звено.

1. Движения парадоксального механизма

Приведем кратко общую конструкцию парадоксального механизма П. Л. Чебышёва, следуя работам [1, 2]. Парадоксальный механизм состоит из двух частей: лямбда-механизма $OABMC$ и двойного маятника MDO_1 . Вершины O , C и O_1 неподвижны. Звено OA длины r вращается

вокруг вершины O . Расстояние CO равно d . Длины отрезков AB , BM и CB равны 1 (параметр масштаба). Длина звена AM равна 2, вершина B является серединой отрезка AM . Передвижение звена AM ограничено звеном CB . Параметры r, d и CO_1 подбираются таким образом, чтобы траектория точки M была заключена между двумя концентрическими окружностями ω_1 и ω_2 с центром в точке O_1 и радиусами $R_1 > R_2$. Кривая Υ , которую описывает точка M , последовательно касается каждой окружности ω_1 и ω_2 в трех точках. Длины стержней DO_1 и DM подбираются по условиям на сумму и разность длин стержней: $DO_1 + DM = R_1$ и $DM - DO_1 = R_2$. Точка O_1 находится на прямой, ортогональной прямой CO . Общая схема парадоксального механизма показана на рис. 1.

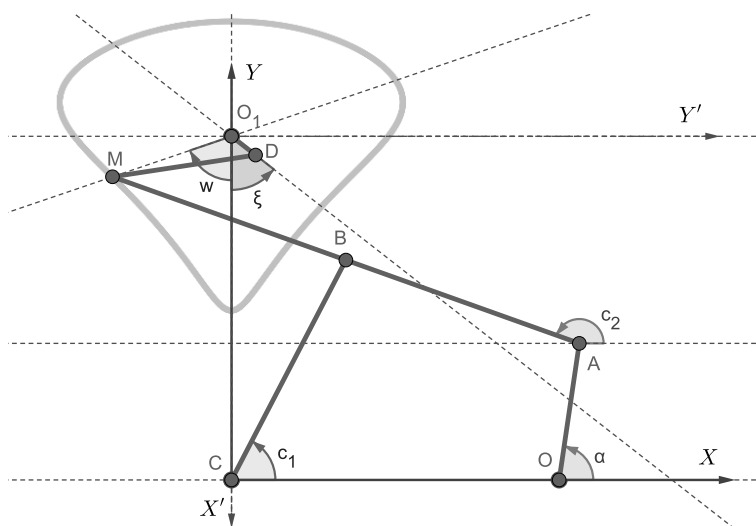


Рис. 1. Общая схема парадоксального механизма П. Л. Чебышёва. Показана траектория вершины M , которая находится между двумя концентрическими окружностями с центрами в точке O_1
 Fig. 1. General scheme of the paradoxical mechanism of P. L. Chebyshev. The trajectory of the vertex M which is located between two concentric circles with centers in point O_1 is highlighted

Решение Чебышёва позволяет определить параметры r, d и CO_1 парадоксального механизма, для которых вершина M описывает кривую, наименее отклоняющуюся от некоторой окружности ω с центром в точке O_1 и радиуса R . Аналитические выражения для параметров механизма формулируются в терминах вспомогательного угла ψ . Приведем конечные формулы из [1]:

$$r = \frac{2 \sin \psi \cdot \sin 2\psi \cdot \sqrt{2 \cos 2\psi}}{\sin 3\psi}, \quad d = \frac{\sin 2\psi}{\sin 3\psi}, \quad CO_1 = \frac{2 \cos^2 \psi}{\sin 3\psi}. \quad (1)$$

Полученная кривая, заметаемая точкой M , три раза касается окружности радиуса R_1 с центром в точке O_1 и три раза касается окружности радиуса R_2 с центром в точке O_1 . Точки касания окружностей чередуются. Для радиусов R_1 и R_2 получаются выражения [1]:

$$\frac{R_1 + R_2}{2} = \frac{2 \cos \psi \sin 2\psi \sqrt{2 \cos 2\psi}}{\sin 3\psi}, \quad \frac{R_1 - R_2}{2} = \frac{2 \cos 2\psi}{\sin 3\psi}. \quad (2)$$

По результатам сравнения с длинами стержней в сборнике трудов [2], оригинальный парадоксальный механизм был построен для значения параметра $\psi \approx 43.669^\circ$. При вычислениях для угла $\psi = 43.669^\circ$ по формулам (1) и (2) получаются следующие значения параметров:

$$r = 0.5571409122, \quad d = 1.323723763, \quad CO_1 = 1.386699116, \\ R_1 = 0.7067373020, \quad R_2 = 0.4605558024. \quad (3)$$



Углы α поворота звена OA , при которых достигается минимальное или максимальное расстояние MO_1 , получаются при анализе функции MO_1 :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0.000^\circ, & \alpha_2 &= 63.491^\circ, & \alpha_3 &= 130.281^\circ, \\ \alpha_4 &= 180.000^\circ, & \alpha_5 &= 229.718^\circ, & \alpha_6 &= 296.510^\circ, & \alpha_7 &= 360.000^\circ. \end{aligned} \quad (4)$$

Введем вспомогательную функцию знака, которая меняется с $+1$ на -1 при прохождении значений α через точки α_i из списка (4):

$$\text{sign}(\alpha) = \begin{cases} +1, & \text{если } \alpha_1 < \alpha \text{ и } \alpha < \alpha_2, \\ -1, & \text{если } \alpha_2 < \alpha \text{ и } \alpha < \alpha_3, \\ +1, & \text{если } \alpha_3 < \alpha \text{ и } \alpha < \alpha_4, \\ -1, & \text{если } \alpha_4 < \alpha \text{ и } \alpha < \alpha_5, \\ +1, & \text{если } \alpha_5 < \alpha \text{ и } \alpha < \alpha_6, \\ -1, & \text{если } \alpha_6 < \alpha \text{ и } \alpha < \alpha_7, \\ 0, & \text{если } \alpha = \alpha_i, i = 1, \dots, 7. \end{cases}$$

Функция $\text{sign}(\alpha)$ позволяет описывать движение стержня DO_1 в парадоксальном механизме при движении DO_1 в одну сторону. В этом случае маятник MDO_1 движется симметрично относительно подвижной прямой MO_1 при прохождении через углы α_i из набора (4).

Параметризация парадоксального механизма рассматривалась автором в статье [13]. Приведем здесь только конечные формулы. Введем систему координат в плоскости движения парадоксального механизма. Начало координат совпадает с точкой C , ось Cx направлена по вектору CO , ось Cy ортогональна оси Cx (см. рис. 1). Координаты вершин A , B и M можно параметризовать углом α следующим образом. Положение вершины A явно определяется углом α . Положение вершины B определяется из равнобедренного треугольника ABC . Для этого сначала находится середина H отрезка CA . Далее из точки H выходит отрезок с длиной, равной высоте AH треугольника ABC . Для параметризации также вводится середина K отрезка DM . В результате получается следующая параметризация лямбда-механизма:

$$\begin{aligned} x_A &= d + r \cos \alpha, & y_A &= r \sin \alpha, & CA &= \sqrt{r^2 + d^2 + 2rd \cos \alpha}, & h &= \sqrt{1 - \frac{(CA(\alpha))^2}{4}}; \\ x_B &= \left(\frac{0 + x_A(\alpha)}{2} \right) - h(\alpha) \cdot \left(\frac{y_A(\alpha) - 0}{CA(\alpha)} \right), & y_B &= \left(\frac{0 + y_A(\alpha)}{2} \right) + h(\alpha) \cdot \left(\frac{x_A(\alpha) - 0}{CA(\alpha)} \right), \\ x_M &= x_A(\alpha) + 2(x_B(\alpha) - x_A(\alpha)), & y_M &= y_A(\alpha) + 2(y_B(\alpha) - y_A(\alpha)), \\ v_B &= \sqrt{(x'_B(\alpha))^2 + (y'_B(\alpha))^2}, & MO_1 &= \sqrt{(x_M(\alpha) - x_{O_1})^2 + (y_M(\alpha) - y_{O_1})^2}, \\ x_K &= \frac{x_M(\alpha) + x_D(\alpha)}{2}, & y_K &= \frac{y_M(\alpha) + y_D(\alpha)}{2}, & v_K &= \sqrt{(x'_K(\alpha))^2 + (y'_K(\alpha))^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Значения $x_{O_1} = 0$ и $y_{O_1} = CO_1$. Полученные зависимости координат вершин B и M в (5) являются гладкими, если $h \neq 0$, т. е. треугольник ABC является невырожденным. Это условие выполняется для параметров (3). Углы поворота стержней CB и AM :

$$c_1 = \arctan(y_B(\alpha), x_B(\alpha)), \quad c_2 = \arctan(y_B(\alpha) - y_A(\alpha), x_B(\alpha) - x_A(\alpha)).$$

В функции $\arctan(y, x)$ угол находится с учетом октанта точки (x, y) .

Угол поворота w оси O_1M отсчитывается в следующей неподвижной системе отсчета: ось X' совпадает с лучом O_1C , ось Y' параллельна оси Cx . Эта система координат введена по аналогии с системой координат двойного математического маятника (см. рис. 1). Угол θ_1 измеряет отклонение стержня DO_1 от прямой MO_1 , угол θ_2 равен углу MDO_1 . Величина

углов θ_1 и θ_2 определяется по теореме косинусов в треугольнике MDO_1 . Также введем углы ξ и η , которые равны углам отклонения стержней DO_1 и DM от оси $X' = O_1C$. Углы ξ и η являются стандартными параметрами для описания положения двойного маятника MDO_1 .

Зададим знаки углов θ_1 и θ_2 , для которых получается гладкое движение вершины D парадоксального механизма:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \text{sign}(\alpha) \cdot \arccos\left(\frac{(MO_1(\alpha))^2 + DO_1^2 - MD^2}{2MO_1(\alpha) \cdot DO_1}\right), \\ \theta_2 &= \text{sign}(\alpha) \cdot \arccos\left(\frac{DO_1^2 + MD^2 - (MO_1(\alpha))^2}{2MD \cdot DO_1}\right), \\ w &= \arctan(x_M(\alpha), -(y_M(\alpha) - CO_1)). \end{aligned} \quad (6)$$

Выражение для угла w в (6) получается при переходе из системы координат Cxy в систему $O_1x'y'$. Углы ξ и η задаются в зависимости от гладкой ветви движения парадоксального механизма [13]:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= w(\alpha) + \theta_1(\alpha), & \eta_1 &= \xi_1 + \pi + \theta_2(\alpha), \\ \xi_2 &= w(\alpha) - \theta_1(\alpha), & \eta_2 &= \xi_2 + \pi - \theta_2(\alpha). \end{aligned} \quad (7)$$

Положительный знак перед углами θ_1 и θ_2 в (7) соответствует типу движения, при котором точка D вращается против часовой стрелки при полном обороте рукоятки OA против часовой стрелки. Отрицательный знак соответствует вращению вершины D по часовой стрелке. За счет смены знака при прохождении через «сложенное» и «раскрытое» положение маятника MDO_1 при углах $\alpha = \alpha_i$ из списка (4) полученное движение (7) является гладким. Без смены знаков при $\alpha = \alpha_i$ вершина D имеет разрывную скорость движения. Это следует из теории движения сингулярного маятника, которая подробнее рассматривается в [11]. В парадоксальном механизме двузвенник MDO_1 является сингулярным маятником. Кратко сформулируем теорему о свойстве конфигурационного пространства.

Теорема 1. *Рассматривается двойной маятник MDO_1 , вершина M движется по заданной гладкой кривой Υ . Координаты вершины M являются гладкими функциями некоторого параметра α . Пусть при значении параметра $\alpha = \alpha_*$ выполняются следующие условия:*

$$MO_1(\alpha_*) = DM \pm DO_1, \quad \frac{d}{d\alpha} MO_1(\alpha_*) = 0, \quad \frac{d^2}{d\alpha^2} MO_1(\alpha_*) \neq 0.$$

Первое условие соответствует особой точке конфигурационного пространства. Тогда в окрестности точки, которая соответствует α_ , конфигурационное пространство представляется как объединение двух гладких кривых, которые пересекаются под ненулевым углом. При гладком движении углы θ_1 и θ_2 должны менять знак при прохождении особой точки α_* .*

В особых конфигурациях функция $MO_1(\alpha)$ имеет нулевую первую производную, так как расстояние MO_1 достигает минимума или максимума. Прямым вычислением можно проверить, что функция $MO_1(\alpha)$ имеет ненулевую вторую производную [13]. Следовательно, по теореме 1 кривые (ξ_1, η_1) и (ξ_2, η_2) являются гладкими, а геометрическая особенность может быть представлена как две пересекающиеся кривые.

Теперь запишем уравнения движения парадоксального механизма под действием сил инерции или приложенного внешнего момента M_Σ , который действует на ведущее звено. В статье автора [13] было показано, что кинетическая энергия парадоксального механизма может быть представлена как сумма двух приведенных моментов:

$$T(\alpha, \dot{\alpha}) = \frac{1}{2} J_\Sigma(\alpha) (\dot{\alpha})^2 = \frac{1}{2} (J_\lambda(\alpha) + J_p(\alpha)) (\dot{\alpha})^2. \quad (8)$$



Приведенный момент J_λ в (8) для лямбда-механизма:

$$J_\lambda(\alpha) = I_{OA} + I_{CB}(c'_1(\alpha))^2 + m_{AM}(v_B(\alpha))^2 + I_{AM}(c'_2(\alpha))^2.$$

Приведенный момент J_p в (8) для двойного маятника MDO_1 :

$$J_p(\alpha) = I_{DO_1}(\xi'(\alpha))^2 + I_{DM}(\eta'(\alpha))^2 + m_{DM}(v_K(\alpha))^2.$$

Уравнение движения при действии момента M_Σ , который приложен к ведущей рукоятке OA , получается применением уравнений Лагранжа второго рода:

$$\ddot{\alpha} = \frac{M_\Sigma(\alpha)}{J_\Sigma(\alpha)} - \frac{1}{2} \frac{J'_\Sigma(\alpha)}{J_\Sigma(\alpha)} (\dot{\alpha})^2. \quad (9)$$

В модели парадоксального механизма из [2] стержень DO_1 заменяется на массивный диск. В результате получается дополнительный момент, который должен обеспечивать вращение звена DO_1 в одну сторону. Для модели динамики парадоксального механизма с диском достаточно заменить момент инерции стержня DO_1 на момент инерции диска в выражении для J_p в (8).

Замечание 1. При численном моделировании движения парадоксального механизма по формулам (9) необходима повышенная точность в десятичных знаках для параметров механизма. Округление до третьей цифры после запятой у длин стержней (3) приводит к заметным скачкам кинетической энергии. При использовании шести знаков после запятой результаты получаются более «гладкими».

2. Особые точки и количество вращений

Рассмотрим более общий случай, когда вершина M маятника MDO_1 движется по некоторой гладкой кривой Υ . Кривая Υ может отличаться от множества точек, которое замечает вершина лямбда-механизма. При этом считается, что кривая Υ как множество точек диффеоморфна окружности на плоскости, поэтому возможно говорить об одном обороте точки M по кривой Υ .

Предполагается, что положение точки M на кривой Υ гладко параметризуется углом w отклонения луча MO_1 от некоторой фиксированной прямой (в парадоксальном механизме от прямой O_1C). Пусть кривая Υ заключена между двумя концентрическими окружностями ω_1 и ω_2 с центром в точке O_1 и радиусами $r_1 > r_2$. Предположим также, что кривая Υ касается окружности ω_1 в точках α_i , $i = 1, \dots, n$ и касается окружности ω_2 в точках β_i , $i = 1, \dots, n$, причем порядок касания чередуется: $\alpha_1 = 0, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_{n-1}, \beta_{n-1}, \alpha_n = 2\pi$. Длины стержней DO_1 и MD подобраны так, что сумма длин $DO_1 + MD$ равна радиусу r_1 большей окружности, а разность длин $MD - DO_1$ равна радиусу r_2 меньшей окружности. Предполагается, что $MD > DO_1$.

В точках α_i стержни DO_1 и MD становятся параллельными (маятник MDO_1 «раскрытый»), а в точках β_i стержни DO_1 и MD становятся антипараллельными (маятник MDO_1 «сложенный»). Общая схема показана на рис. 2. Точками M_1, M_2, M_3 и D_1, D_2, D_3 показаны три положения маятника для двух максимальных расстояний (точки M_1 и M_3) и для минимального расстояния (точка M_2). Значения Δ_1 и Δ_2 показывают угол, на который поворачивается звено D_iO_1 .

Рассмотрим, сколько оборотов сделает звено DO_1 при движении точки M по кривой Υ . Как будет показано далее, дополнительное количество оборотов звена DO_1 связано с наличием особых точек, в которых стержни DO_1 и MD становятся (анти)параллельными. Также общее число оборотов зависит от направления вращения звена DO_1 .

Предложение 1. Если стержни DO_1 и DM не становятся параллельными или антипараллельными при движении $0 \leq w \leq 2\pi$, то за один оборот точки M по кривой Υ стержень DO_1 делает один оборот.

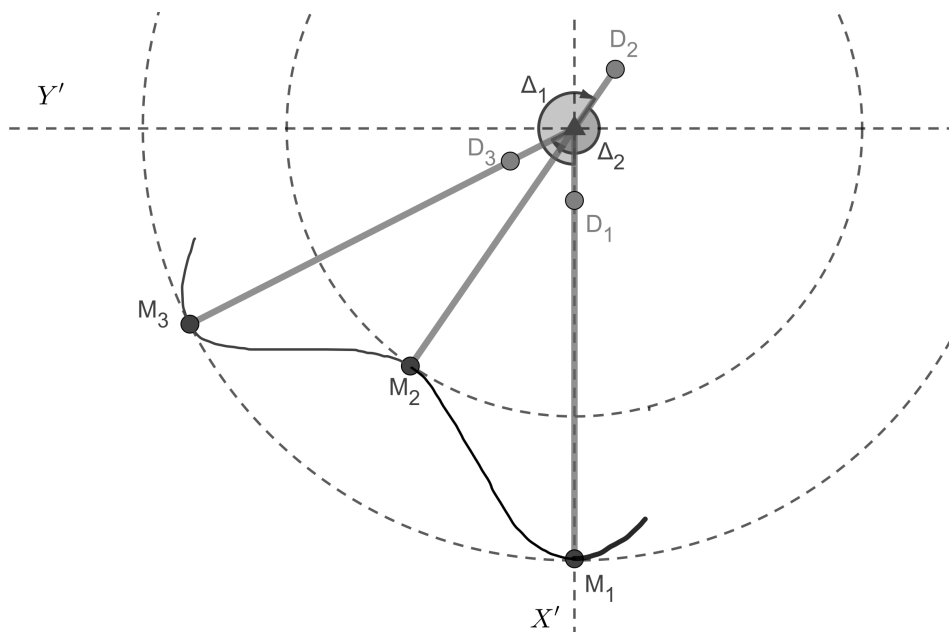


Рис. 2. Перемещение звена DO_1 при обороте точки M и DO_1 в одну сторону
 Fig.. 2. Motion of the rod DO_1 with full circle of vertexes M and DO_1 in similar direction

Доказательство. Так как стержни DO_1 и DM не могут стать параллельными или антипараллельными, то угол θ_1 заключен в интервале $0 < \theta_1 < \pi$ или в интервале $-\pi < \theta_1 < 0$. Угол поворота стержня DO_1 равен $w + \theta_1(w)$. Тогда сумма $w + \theta_1(w)$ не может быть равной $0, 4\pi$ или -2π . При движении вершины M по кривой Υ угол w меняется от 0 до 2π . Так как стержень DO_1 возвращается в начальное положение, делая целое число оборотов, то сумма $w + \theta_1(w)$ может быть равной только 2π . Следовательно, возможен только один оборот вершины D . \square

Предложение 2. Пусть выполнены следующие условия: $DO_1 + DM = r_1, DM - DO_1 = r_2$ и стержень DO_1 всегда вращается в ту же сторону, в которую движется точка M . Предположим, что стержни DO_1 и DM последовательно становятся параллельными и антипараллельными $2n$ раз. Тогда за один оборот точки M по кривой Υ стержень DO_1 суммарно делает $n + 1$ оборот.

Доказательство. Будем считать, что движение вершины M идет по часовой стрелке. Такое движение будет у парадоксального механизма при движении по кривой (ξ_2, η_2) . Рассмотрим, на какой угол должен повернуться стержень DO_1 при переходе от значения $\xi = \alpha_1$ (максимальное расстояние MO_1) к значению $\xi = \beta_1$ (минимальное расстояние MO_1). При повороте в точки M и стержня DO_1 в одну сторону стержень DO_1 должен повернуться на угол $\beta_1 - \alpha_1 + \pi$ (см. рис. 2). При переходе от угла $\xi = \beta_1$ к углу $\xi = \alpha_2$ (максимальное расстояние MO_1) стержень DO_1 должен повернуться на угол $\alpha_2 - \beta_1 + \pi$. Продолжая аналогично, получаем суммарное приращение Δ угла поворота DO_1 :

$$\Delta = (\beta_1 - \alpha_1 + \pi) + (\alpha_2 - \beta_1 + \pi) + \dots + (\alpha_n - \beta_{n-1} + \pi) = 2\pi n + (\alpha_n - \alpha_1) = 2\pi(n + 1).$$

Значит, суммарно будет $n + 1$ полный оборот стержня DO_1 . \square

Предложение 3. Пусть выполнены следующие условия: $DO_1 + DM = r_1, DM - DO_1 = r_2$ и стержень DO_1 всегда вращается в сторону, противоположную движению точки M . Предположим, что стержни DO_1 и DM последовательно становятся параллельными и



антипараллельными $2n$ раз. Тогда за один оборот точки M по кривой Υ стержень DO_1 суммарно делает $n - 1$ оборот.

Доказательство. Будем считать, что движение вершины M идет по часовой стрелке, а стержень DO_1 движется против часовой стрелки. Рассмотрим, на какой угол должен повернуться стержень DO_1 при переходе от значения $\xi = \alpha_1$ (максимальное расстояние MO_1) к значению $\xi = \beta_1$ (минимальное расстояние MO_1). При повороте точки M и стержня DO_1 в разные стороны стержень DO_1 должен повернуться на угол $-\pi + (\beta_1 - \alpha_1)$. Действительно, для поворота по часовой стрелке стержень DO_1 должен повернуться на угол $\pi + \beta_1 - \alpha_1$. Тогда при повороте против часовой стрелки, с учетом знака, получаем поворот на угол

$$-(2\pi - (\pi + \beta_1 - \alpha_1)) = -\pi + (\beta_1 - \alpha_1).$$

При переходе от угла $\xi = \beta_1$ к углу $\xi = \alpha_2$ (максимальное расстояние MO_1) стержень DO_1 должен повернуться на угол $-\pi + (\alpha_2 - \beta_1)$. Продолжая аналогично, получаем суммарное приращение Δ угла поворота DO_1 :

$$\Delta = -\pi + (\beta_1 - \alpha_1) - \pi + (\alpha_2 - \beta_1) + \dots - \pi + (\alpha_n - \beta_{n-1}) = -2\pi n + (\alpha_n - \alpha_1) = -2\pi(n - 1).$$

Значит, суммарно будет $n - 1$ полный оборот стержня DO_1 . \square

Вернемся к парадоксальному механизму П. Л. Чебышёва. В парадоксальном механизме [1, 2] параметры лямбда-механизма $OABCM$ и положение точки O_1 подобраны так, что расстояние MO_1 ровно 3 раза достигает максимального значения и ровно 3 раза достигает минимального значения. Минимальные и максимальные значения расстояния MO_1 чередуются. В модели механизма на сайте [3] показано, что при вращении ведущего звена возможно два варианта для суммарного числа оборотов ведомого маховика: 4 оборота или 2 оборота.

Замечание 2. Выводы в предложениях 2 и 3 согласуются с движением парадоксального механизма. В этом механизме есть $n = 3$ пар минимумов и максимумов функции MO_1 . Когда точки M и D движутся в одну сторону, то стержень DO_1 делает $n + 1 = 4$ оборота. Когда точки M и D движутся в разные стороны, то получается $n - 1 = 2$ полных оборота.

3. Работа сил инерции на диске

В этом разделе рассматривается соотношение работы момента внешних сил M_Σ , приложенного к рукоятке OA , к работе момента сил инерции M_1 , приложенного к звену (или диску) DO_1 парадоксального механизма. Анализируются два варианта движения. В первом случае момент M_Σ подбирается так, что угол α имеет постоянную скорость. Как следствие, $\ddot{\alpha} = 0$. Во втором варианте считается, что момент M_Σ является постоянным. В общем случае функции M_Σ , ξ , J_Σ являются функциями угла α . Момент инерции J_1 диска DO_1 является константой.

Замечание 3. В лямбда-механизме $OABCM$ положение вершин A , B и M зависит только от угла α поворота звена OA относительно луча CO (см. рис. 1). Угол w описывает поворот точки M относительно луча O_1C . За один оборот звена OA вершина M делает один полный оборот вокруг точки O_1 . Следовательно, за один поворот звена OA угол w меняется от 0 до 2π . За один оборот угол w получает приращение в 2π радиан. Тогда для k оборотов

$$w(\alpha + 2\pi k) = w(\alpha) + 2\pi k.$$

При дифференцировании получаем, что скорость изменения угла

$$w'(\alpha + 2\pi k) = w'(\alpha) + 0 = w'(\alpha)$$

является периодической функцией с периодом 2π .

В двойном маятнике MDO_1 угол ξ (см. рис. 1) делает 2 или 4 оборота при изменении угла α от 0 до 2π , т. е.

$$\xi(\alpha + 2\pi k) = \xi(\alpha) + 2\pi k m$$

для некоторого целого m (в зависимости от направления вращения диска). Следовательно, скорость изменения угла

$$\xi'(\alpha + 2\pi k) = \xi'(\alpha) + 0 = \xi'(\alpha)$$

будет 2π -периодической функцией.

Также рассмотрим приращения $\Delta_k w$ и $\Delta_k \xi$ функций w и ξ , которые получаются за k полных оборотов угла α . Выражения для приращений углов

$$\Delta_k w = w(\alpha + 2\pi k) - w(\alpha) = 2\pi k, \quad \Delta_k \xi = \xi(\alpha + 2\pi k) - \xi(\alpha) = 2\pi k m$$

линейно зависят от числа полных оборотов k . Следовательно, функции w и ξ можно представить как суммы линейных и периодических функций:

$$w(\alpha) = \alpha + \underbrace{(w(\alpha) - \alpha)}_{2\pi\text{-периодическая}}, \quad \xi(\alpha) = m\alpha + \underbrace{(\xi(\alpha) - m\alpha)}_{2\pi\text{-периодическая}}.$$

Полученное представление в виде суммы линейной и периодической функции также доказывает, что функции w и ξ имеют периодические производные.

Периодичность производных функции $\eta(\alpha)$ доказывается аналогично периодичности производных функции $\xi(\alpha)$.

Замечание 4. Приведенный момент парадоксального механизма J_Σ зависит от приведенного момента J_λ лямбда-механизма и приведенного момента J_p двойного маятника. Линейные и угловые скорости звеньев лямбда-механизма и двойного маятника являются 2π -периодическими функциями угла α по замечанию 3. Следовательно, приведенный момент J_Σ также является периодической функцией: $J_\Sigma(\alpha + 2\pi k) = J_\Sigma(\alpha)$.

Замечание 5. Динамически углы w и ξ получают приращения на целое число оборотов при полном обороте угла α . При этом геометрически для значений угла $\alpha = 0$ и $\alpha = 2\pi$ лямбда-механизм $OABCM$ находится в одной и той же конфигурации. Двойной маятник MDO_1 также возвращается в начальное положение при изменении угла α от 0 до 2π радиан. При этом звено O_1D делает 2 или 4 полных оборота. Геометрическая периодичность движения звеньев парадоксального механизма с периодом 2π наглядно показана в анимации 3D-модели механизма на сайте *Механизмы П. Л. Чебышева* <https://tcheb.ru/>.

Работа момента M_Σ за один оборот рукоятки OA :

$$A_{in} = \int_0^{2\pi} M_\Sigma d\alpha. \tag{10}$$

Работа момента сил инерции M_1 (за один оборот ведущего звена), который приложен к диску DO_1 , можно привести к следующему виду с учетом $d\xi = \xi' d\alpha$:

$$A_{out} = \int_0^{2\pi} M_1 d\xi = \int_0^{2\pi} M_1 \xi' d\alpha. \tag{11}$$

Кинетическая энергия T_1 звена (или диска) DO_1 :

$$T_1 = \frac{1}{2} J_1 (\dot{\xi})^2.$$

При движении парадоксального механизма под действием внешнего момента M_Σ на ведущем звене OA диск DO_1 движется по инерции. На каждую малую часть диска массой dm на



расстоянии h от неподвижной вершины O_1 действует сила инерции $\mathbf{F}(\xi, \dot{\xi}, \ddot{\xi}, h)$, которая вызвана ускорением \mathbf{a} этой массы. Мгновенная работа силы инерции A_{Disk} является суммой работ всех сил инерции \mathbf{F} . Обозначим как ds мгновенный вектор перемещения массы dm . После упрощений получаем:

$$\begin{aligned} ds &= h(-\sin(\xi), \cos(\xi)) d\xi, \\ \mathbf{F} &= \mathbf{a} dm = h(-\cos(\xi)(\dot{\xi})^2 - \sin(\xi)\ddot{\xi}, -\sin(\xi)(\dot{\xi})^2 + \cos(\xi)\ddot{\xi}) dm, \\ A_{Disk} &= \int_{Disk} \mathbf{F} ds = \ddot{\xi} d\xi \left(\int_{Disk} h^2 dm \right) = J_1 \ddot{\xi} d\xi. \end{aligned}$$

Тогда можно положить, что момент M_1 «сил инерции диска» определяется выражением

$$M_1 = J_1 \ddot{\xi}. \quad (12)$$

Аналогичные определения момента сил инерции приведены в литературе. Например, в [7] и [8] применяется уравновешивающий момент $M_1' = -J_1 \ddot{\xi}$ для движения диска по инерции.

Скорость и ускорения угла ξ выражаются через производные угла α :

$$\dot{\xi} = \xi' \dot{\alpha}, \quad \ddot{\xi} = \xi'' (\dot{\alpha})^2 + \xi' \ddot{\alpha}.$$

При подстановке $\ddot{\alpha}$ из уравнения (9) в формулу (12) получается

$$M_1 = J_1 \left(\left(\xi'' - \frac{1}{2} \xi' \frac{J_\Sigma'}{J_\Sigma} \right) (\dot{\alpha})^2 + \xi' \frac{M_\Sigma}{J_\Sigma} \right). \quad (13)$$

Квадрат скорости $(\dot{\alpha})^2$ находится по уравнению изменения кинетической энергии всего парадоксального механизма под действием внешнего момента M_Σ от начального угла $\alpha = \alpha_0$ до угла α :

$$J_\Sigma(\alpha)(\dot{\alpha})^2 - J_\Sigma(\alpha_0)(\dot{\alpha}_0)^2 = 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} M_\Sigma d\alpha. \quad (14)$$

Предложение 4. Если вращение звена OA происходит с постоянной угловой скоростью, то работа момента M_1 за один оборот звена OA равна 0.

Доказательство. При постоянной угловой скорости звена OA получаем $\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_0$ и $\ddot{\alpha} = 0$. Тогда выражение (12) для момента M_1 упрощается:

$$M_1 = J_1 \xi''(\alpha) (\dot{\alpha})^2 = J_1 \xi''(\alpha) (\dot{\alpha}_0)^2.$$

Функция $\xi'(\alpha)$ является 2π -периодической по замечанию 3. Тогда выполняется соотношение

$$A_{out} = J_1 \int_0^{2\pi} \xi'' \cdot (\dot{\alpha}_0)^2 (\xi' d\alpha) = (\dot{\alpha}_0)^2 J_1 \int_0^{2\pi} \xi' \xi'' d\alpha = (\dot{\alpha}_0)^2 J_1 \left(\frac{(\xi')^2}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Значит, при постоянной скорости вращения звена OA работа сил инерции за один оборот ведущего звена равна нулю. \square

Предложение 5. Если вращение происходит под действием постоянного момента $M_\Sigma(\alpha) = M_\Sigma$, то работа момента сил инерции M_1 зависит от отношения J_1 и J_Σ при значении $\alpha = 0$.

Доказательство. По замечанию 4 приведенный момент J_Σ является 2π -периодическим, т. е. $J_\Sigma(2\pi) = J_\Sigma(0)$. Тогда при постоянном моменте M_Σ из выражения (14) получаем

$$J_\Sigma(2\pi)(\dot{\alpha}_{2\pi})^2 - J_\Sigma(0)(\dot{\alpha}_0)^2 = J_\Sigma(0) \cdot ((\dot{\alpha}_{2\pi})^2 - (\dot{\alpha}_0)^2) = 4\pi M_\Sigma. \quad (15)$$



После подстановки (14) и (13) в (11) получаем выражение для работы A_{out} момента M_1 за один оборот звена OA :

$$A_{out} = J_1 \int_0^{2\pi} \left(\left(\xi'' - \frac{1}{2} \xi' \frac{J'_\Sigma}{J_\Sigma} \right) \left(\frac{2 \int_0^\alpha M_\Sigma d\alpha + J_\Sigma(0)(\dot{\alpha}_0)^2}{J_\Sigma} \right) + \xi' \frac{M_\Sigma}{J_\Sigma} \right) \xi' d\alpha.$$

Величину работы A_{out} проще найти через изменение кинетической энергии диска. С учетом 2π -периодичности функции $\xi'(\alpha)$ по замечанию 3 получаем

$$2 \int_0^{2\pi} M_1 d\xi = J_1(\dot{\xi}_{2\pi})^2 - J_1(\dot{\xi}_0)^2 = J_1(\xi'(0))^2 \cdot ((\dot{\alpha}_{2\pi})^2 - (\dot{\alpha}_0)^2). \quad (16)$$

Выразим $(\dot{\alpha}_{2\pi})^2 - (\dot{\alpha}_0)^2$ из уравнения (15) и подставим в (16). Тогда

$$A_{out} = \int_0^{2\pi} M_1 d\xi = 2\pi M_\Sigma (\xi'(0))^2 \left(\frac{J_1}{J_\Sigma(0)} \right).$$

Отношение работ A_{out} и $A_{in} = 2\pi M_\Sigma$:

$$k = \frac{A_{out}}{A_{in}} = \frac{J_1(\xi'(0))^2}{J_\Sigma(0)} = \frac{J_1(\xi'(0))^2}{J_1(\xi'(0))^2 + \dots} < 1$$

зависит от соотношения J_1 и $J_\Sigma(0)$. □

Заключение

В данной работе исследовались свойства движения ведомого маховика (диска) в парадоксальном механизме П. Л. Чебышёва. Количество оборотов, которые совершит диск за один оборот ведущего звена, зависит от свойств конфигурационного пространства. Если в конфигурационном пространстве нет геометрических особенностей, то диск делает только один полный оборот. При наличии особенностей диск может совершить более одного полного оборота. Геометрически особым положениям механизма соответствуют конфигурации, в которых стержни двойного маятника в парадоксальном механизме становятся параллельными или антипараллельными. При наличии особых точек диск может всегда двигаться в одну сторону: только по часовой или только против часовой стрелки. Без особых точек диск периодически меняет направление движения на противоположное.

В парадоксальном механизме ведомый диск может сделать два или четыре полных оборота за один оборот ведущей рукоятки. Количество оборотов зависит от начального направления вращения диска. В общем случае показано, что механизмы типа парадоксального могут совершать любое заданное количество оборотов. Также изучен коэффициент передачи между работой, совершаемой внешним моментом, и работой сил инерции на диске.

Список литературы

1. Чебышёв П. Л. О простейшей суставочной системе, доставляющей движения, симметричные около оси // Полное собрание сочинений П. Л. Чебышева : в 5 т. Т. 4. Теория механизмов. Москва ; Ленинград : Изд-во АН СССР, 1948. С. 167–211.
2. Научное наследие П. Л. Чебышёва. Вып. 2. Теория механизмов / под ред. И. Г. Бруевича, И. И. Артоболовского. Москва ; Ленинград : Изд-во АН СССР, 1945. 192 с.
3. Механизмы П. Л. Чебышева : сайт / Математический институт им. В. А. Стеклова РАН ; Фонд "Математические этюды". 2009–2023. URL: <https://tcheb.ru/> (дата обращения: 10.03.2023).
4. Кутеева Г. А. О кабинете практической механики в Санкт-Петербургском государственном университете // Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки. 2013. № 7. С. 177–185. EDN: XXEBHV
5. Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П. Теоретическая механика. Москва : Юрайт, 2016. 592 с.



6. Зегжда С. А., Солтаханов Ш. С., Юшков М. П. Уравнения движения неголономных систем и вариационные принципы механики. Новый класс задач управления. Москва : Физматлит, 2005. 268 с.
7. Тимофеев Г. А. Теория машин и механизмов: курс лекций. Москва : Юрайт, 2010. 351 с.
8. Ильин М. М., Колесников К. С., Саратов Ю. С. Теория колебаний. Москва : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003. 272 с.
9. Самсонов В. А., Михалев А. А. Перестройка пространства положений механической системы // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2005. № 4. С. 13–16. EDN: [HRVSYR](https://doi.org/10.17653/2005-4-13-16)
10. Закалюкин Г. А. Динамика балки с двумя коньками и системы неявных дифференциальных уравнений // Труды МАИ. 2011. № 42. С. 1–25.
11. Бурьян С. Н. Силы реакции сингулярного маятника // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9, № 2. С. 278–293. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.209>, EDN: [GCBILE](https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.209)
12. Бурьян С. Н. Конические особые точки и векторные поля // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7, № 4. С. 649–661. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.407>, EDN: [TIKKSE](https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.407)
13. Бурьян С. Н. «Парадоксальный» механизм П. Л. Чебышёва // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 4. С. 536–551. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-536-551>, EDN: [NZJSQK](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-536-551)

References

1. Chebyshev P. L. On the simplest articular system that delivers movements that are symmetrical about the axis. In: *Polnoye sobraniye sochineniy P. L. Chebysheva. T. 4. Teoriya mekhanizmov* [Complete works of P. L. Chebyshev. Vol. 4. Theory of mechanisms]. Moscow, Leningrad, Academy of Sciences of the USSR Publ., 1948, pp. 167–211 (in Russian).
2. Bruevich I. G., Artobolevsky I. I. (eds.) *Nauchnoye naslediyе P. L. Chebysheva. Vyp. 2. Teoriya mekhanizmov* [Scientific legacy of P. L. Chebyshev. Iss. 2. Theory of mechanisms]. Moscow, Leningrad, Academy of Sciences of the USSR Publ., 1945. 192 p. (in Russian).
3. *Mechanisms by Tchebyshev*. Steklov Mathematical Institute of RAS, Mathematical Etudes Foundation, 2009–2023. Available at: <https://tcheb.ru/> (accessed March 10, 2023).
4. Kuteeva G. A. The Cabinet of applied mechanics in Saint-Petersburg State University. *Mechanics. Scientific Research and Educational Development*, 2013, vol. 7, pp. 177–185 (in Russian). EDN: [XXEBHV](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2013-7-177-185)
5. Polyakhov N. N., Zegzhda S. A., Yushkov M. P., Tovstik P. E. *Rational and applied mechanics*. Springer Nature, 2021. 520 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-64118-4> (Russ. ed.: Moscow, Yurayt, 2016. 592 p.).
6. Zegzhda S. A., Soltakhanov Sh. S., Yushkov M. P. *Mechanics of non-holonomic systems: A new class of control systems*. Springer Science & Business Media, 2009. 332 p. (Russ. ed.: Moscow, Fizmatlit, 2005. 268 p.).
7. Timofeev G. A. *Teoriya mashin i mekhanizmov: kurs lektsiy* [Theory of machines and mechanisms: A course of lectures]. Moscow, Yurayt, 2010. 351 p. (in Russian).
8. Ilyin M. M., Kolesnikov K. S., Saratov Yu. S. *Teoriya kolebaniy* [Theory of vibrations]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2003. 272 p. (in Russian).
9. Samsonov V. A., Mikhalev A. A. Restructuring of the position space of a mechanical system. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2005, vol. 4, pp. 13–16 (in Russian). EDN: [HRVSYR](https://doi.org/10.17653/2005-4-13-16)
10. Zakalyukin I. V. Dynamics of a beam with two sleights via system of implicit differential equations. *Trudy MAI*, 2011, vol. 42, pp. 1–25 (in Russian).
11. Burian S. N. Reaction forces of a singular pendulum. *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics*, 2022, vol. 55, pp. 192–202. <https://doi.org/10.1134/S1063454122020054>
12. Burian S. N. Conical singular points and vector fields. *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics*, 2021, vol. 54, pp. 311–320. <https://doi.org/10.1134/S106345412104004X>
13. Burian S. N. The “paradoxical” mechanism of P. L. Chebyshev. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 4, pp. 536–551. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-536-551>, EDN: [NZJSQK](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-536-551)

Поступила в редакцию / Received 02.04.2023

Принята к публикации / Accepted 18.06.2024

Опубликована / Published 28.02.2025