



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 1. С. 80–90  
*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 1, pp. 80–90  
<https://mmi.sgu.ru> <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-80-90>, EDN: SUWSYV

Научная статья  
УДК 539.3

## Асимптотическая теория нестационарных упругих волн в оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях изгибающего типа

И. В. Кириллова

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

**Кириллова Ирина Васильевна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической теории упругости и биомеханики, [iv@sgu.ru](mailto:iv@sgu.ru), <https://orcid.org/0000-0001-8053-3680>, SPIN: 3935-1990, AuthorID: 179980

**Аннотация.** Работа посвящена завершению построения асимптотической схемы расчленения нестационарного напряжённо-деформированного состояния тонкостенных оболочек вращения при ударных торцевых нагрузках изгибающего типа на составляющие с различными показателями изменчивости по пространственным координатам и динамичности по времени. Используются разработанные ранее асимптотически приближённые уравнения таких составляющих, как изгибная составляющая по теории Кирхгофа – Лява, высокочастотная антисимметричная коротковолновая составляющая и антисимметричный гиперболический погранслои в окрестности фронта волны расширения. Доказана полнота описания нестационарных волн с помощью указанных компонент. Для этого выделены в фазовой плоскости области согласования соседних составляющих. Найдены асимптотические оценки границ этих областей согласования и доказано совпадение там асимптотик разрешающих уравнений.

**Ключевые слова:** асимптотическая теория, изгибная составляющая теории Кирхгофа – Лява, высокочастотное коротковолновое приближение, гиперболический погранслои, оболочка вращения, фронт волны расширения

**Для цитирования:** Кириллова И. В. Асимптотическая теория нестационарных упругих волн в оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях изгибающего типа // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 1. С. 80–90. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-80-90>, EDN: SUWSYV

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## Asymptotic theory of the transient waves in shells of revolution at shock edge loading of the bending type

I. V. Kirillova

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

**Irina V. Kirillova**, [iv@sgu.ru](mailto:iv@sgu.ru), <https://orcid.org/0000-0001-8053-3680>, SPIN: 3935-1990, AuthorID: 179980

**Abstract.** The present work is devoted to completing the construction of the nonstationary stress-strain state asymptotic theory of shells of revolution at shock edge bending loading. There components with different values of the variability and dynamicity indices are used. This asymptotic model applies such components as the bending component of the Kirchoff – Love shell theory, the antisymmetric high-frequency



short-wave component and the antisymmetric hyperbolic boundary layer in the vicinity of the dilatation wave front. The existence of the overlap regions is indicative of the exact statement of the boundary value problems for all the components and of the validity of the introduced separation scheme.

**Keywords:** asymptotic theory, bending component, high-frequency short-wave component, hyperbolic boundary layer, dilatation wave front, overlap region, shell of revolution.

**For citation:** Kirillova I. V. Asymptotic theory of the transient waves in shells of revolution at shock edge loading of the bending type. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 1, pp. 80–90 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-80-90>, EDN: SUWSYV

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

В работах [1, 2] были заложены основы асимптотической теории нестационарного напряжённо-деформированного состояния (НДС) тонких оболочек. При этом использовались результаты численных расчётов соответствующих процессов в пластинах и цилиндрических оболочках [3]. Асимптотический анализ основывался на применении аппарата построения асимптотической теории тонких оболочек, разработанного для статических задач в [4].

В работе [3] приведена классификация торцевых граничных условий, приводящих к трём принципиально различным видам нестационарного НДС тонких оболочек. Выделены воздействие вида LT (продольное, тангенциального типа), LM (продольное, изгибающего типа) и NW (нормального типа).

Ударные торцевые воздействия приводят к сложному взаимодействию элементарных волн, порождаемых как торцевой, так и лицевыми поверхностями. Растущее со временем количество переотражённых от лицевых поверхностей элементарных волн не позволяет строить НДС как их наложение, поэтому необходимо использовать теоретический подход учёта сразу суммарных величин компонент НДС.

Полное описание нестационарного волнового процесса в тонких пластинах и оболочках невозможно выполнить с помощью двумерных теорий: они не могут описать решение в прифронтных зонах волн расширения и сдвига, а также определяют ложные фронты, которые с точки зрения трёхмерной теории являются квазифронтами. Также можно отметить, что в рассматриваемых нестационарных задачах НДС существенно неоднородно по пространственным координатам в различных участках фазовой плоскости. Следовательно, показатели изменчивости НДС по пространственным координатам и показатель динамичности по времени имеют там различные значения, и необходимо выделять в фазовой плоскости области с однородными значениями этих показателей. В каждой области однородности изменчивости НДС возможно построение соответствующей асимптотической теории. Полнота выбора составляющих НДС во всей фазовой плоскости может быть определена доказательством наличия областей согласования соседних асимптотик.

Такая концепция асимптотической модели полностью соответствует принципу Сен-Венана в динамике тонкостенных конструкций, изложенному в работах [5, 6].

В работах [7, 8] на примере цилиндрической оболочки представлена окончательная редакция схемы расчленения нестационарного НДС на составляющие с различными показателями изменчивости и динамичности.

Настоящая работа является завершающей в плане построения асимптотической теории, описывающей распространение упругих волн в оболочках на примере оболочек вращения произвольной формы, при торцевых ударных воздействиях вида LM. Требуется доказать, что следующие компоненты: квазистатический погранслои типа Сен-Венана, моментная составляющая по теории Кирхгофа – Лява (динамический простой краевой эффект), высокочастотная антисимметричная составляющая и гиперболический погранслои в окрестности фронта волны расширения, полностью описывают искомое НДС. Для указанных составляющих использу-

ются приближённые теории, полученные методом асимптотического интегрирования точных трёхмерных уравнений теории упругости.

Уравнения для моментной составляющей получены были в работе [9], уравнения высокочастотной коротковолновой составляющей — в [2], а уравнения гиперболического погранслоя с учётом изменения геометрии переднего фронта волны в процессе её распространения — в работе [10].

Полнота описания нестационарных процессов с помощью указанных компонент доказывается асимптотическим анализом разрешающих уравнений в областях согласования на предмет их совпадения с некоторой асимптотической погрешностью.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим оболочку вращения, представленную на рис. 1, где система координат  $(\alpha, \theta, z)$  отнесена к срединной поверхности. Здесь  $\alpha$  — длина дуги вдоль образующей,  $\theta$  — угол в окружном направлении,  $z$  — координата внешней нормали срединной поверхности.

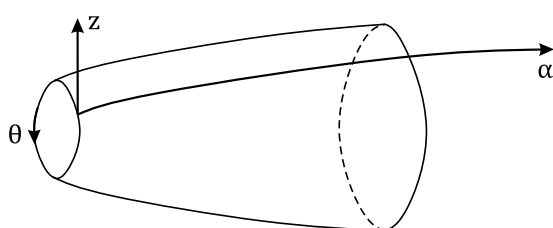


Рис. 1. Оболочка вращения  
Fig. 1. Shell of revolution

Рассматриваем осесимметричный случай НДС оболочки. Пусть граничные условия вида ЛМ (когда на торце отличен от нуля только изгибающий момент) задаются в виде

$$\sigma_{11} = Iz H(t), \quad v_3 = 0, \quad \alpha = 0, \quad (1)$$

где  $I$  — амплитуда,  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = 1, 3$ ) — напряжения,  $v_i$  ( $i = 1, 3$ ) — перемещения,  $t$  — время,  $H(t)$  — функция Хевисайда. Рассматриваем начальный промежуток времени, когда перед-

ний фронт волны проходит расстояние, соизмеримое с характерным значением радиусов кривизны оболочки и не достигает её второго торца.

Зададим однородные начальные условия:

$$v_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} = 0 \quad (i = 1, 3), \quad t = 0. \quad (2)$$

Уравнения теории упругости для рассматриваемых оболочек подробно описаны в монографиях [1, 2].

## 2. Схема расчленения нестационарного НДС оболочек вращения при ударных воздействиях изгибающего типа

В работах [3, 12–14] проведено сопоставление численных результатов, полученных для пластин и цилиндрических оболочек при решении конкретных волновых задач на базе точных трёхмерных уравнений теории упругости и приближённых двумерных уравнений теорий Кирхгофа – Лява и Тимошенко. Проведённое численное сопоставление результатов расчёта вместе с анализом волновых свойств решений точной трёхмерной и приближённых двумерных волновых теорий дали основу для разработки схемы расчленения нестационарного НДС в фазовой плоскости на составляющие с различными показателями изменчивости. Во введении было указано, что в работах [7, 8] такая схема изложена на примере цилиндрической оболочки и мы распространяем её на общий случай оболочек вращения.

На рис. 2 изображена схема решения для изгибающего момента в некоторый момент времени  $t = t_0$  (рассматривается осесимметричный случай НДС по трёхмерной теории упругости). Области  $R_1$ – $R_4$  на этом рисунке представляют области применимости приближённых теорий. Характерные свойства рассматриваемого нестационарного НДС, определяющие применение этих теорий, следующие:

– основной разрыв решения при воздействии вида ЛМ переносится фронтом волны расширения со скоростью  $c_1 = \sqrt{(1 - \nu)E / (1 + \nu)(1 - 2\nu)\rho}$ , где  $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент



Пуассона, а  $\rho$  — плотность материала оболочки;

- в малой окрестности фронта волны расширения  $R_1$  имеет место антисимметричный гиперболический погранслои;

- за прифронтной зоной  $R_1$  образуется зона малоамплитудных осцилляций  $R_2$ , описываемая высокочастотной коротковолновой составляющей;

- в зоне  $R_3$  решение определяется моментной составляющей теории Кирхгофа – Лява (динамическим простым краевым эффектом);

- в малой зоне  $R_4$  имеет место квазистатический погранслои типа Сен-Венана.

В настоящей работе представлен анализ асимптотического совпадения соседних составляющих в областях согласования  $B_1, B_2$ :

$B_1$  — область согласования высокочастотного коротковолнового приближения и антисимметричного гиперболического погранслоя;

$B_2$  — область согласования моментной составляющей теории Кирхгофа – Лява и высокочастотного коротковолнового приближения.

Исследование асимптотического совпадения составляющих в областях согласования и оценка границ этих областей выполнены в следующих разделах асимптотическим анализом разрешающих уравнений в этих областях.

### 3. Область согласования изгибной составляющей теории Кирхгофа – Лява и высокочастотного коротковолнового приближения

В работе [1] было введено понятие динамического погранслоя, включающего в себя в рассматриваемом случае ЛМ-воздействия такие составляющие, как высокочастотное коротковолновое приближение и гиперболический погранслои, т. е. составляющие с показателями изменчивости и динамичности, большими или равными единице. Там же рассматривалось согласование этого динамического погранслоя с изгибной составляющей теории Кирхгофа – Лява. Путём сравнения асимптотик решений для этих составляющих, полученных методом интегрального преобразования Лапласа, экспоненциального представления решений в пространстве изображений и метода перевала при обращении изображений, было установлено следующим асимптотическим неравенством:

$$\varepsilon^{1/2} \ll \xi_0 \ll \varepsilon^{1/4} \tag{3}$$

расположение искомой области согласования. Здесь  $\xi_0 = \alpha/R$ ,  $R$  — характерное значение радиусов кривизны,  $\varepsilon$  — малый параметр:  $\varepsilon = h/R$ ,  $h$  — толщина оболочки.

Отметим, что при выделении антисимметричного высокочастотного коротковолнового приближения область его согласования с изгибной составляющей рассматривалась на примере цилиндрической оболочки в работах [2, 8]. Здесь расположение области согласования также исследовалось на базе сравнения асимптотик решения, что также привело к оценке её границ в форме (3).

В настоящем разделе мы анализируем существование и границы расположения искомого составляющих в самом общем случае. Рассматриваем произвольную форму оболочек вращения и проводим асимптотические оценки разрешающих уравнений. Начнём с анализа поведения уравнений изгибной составляющей при выходе из основной области её применимости.

Уравнения изгибной составляющей были получены автором в работах [9, 15] с показателями изменчивости по продольной координате и динамичности, связанными соотношением

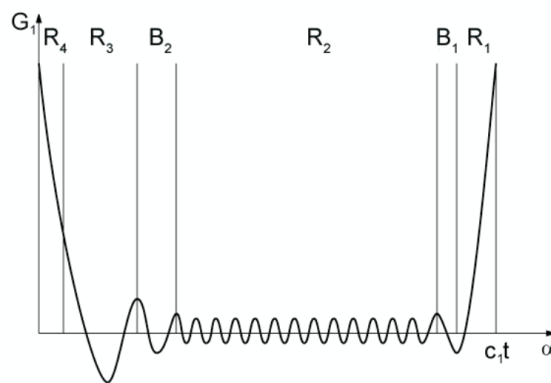


Рис. 2. Схема расчленения нестационарного НДС в оболочке вращения

Fig. 2. Scheme of dissection of non-stationary stress-strain state in a shell of revolution

$q = (1 + a)/2$ . В рассматриваемом осесимметричном случае показатели изменчивости и динамичности принимают следующие значения:  $q = 1/2, a = 0$ . Уравнения высокочастотных коротковолновых колебаний получены в работах [1, 2, 15] с показателями изменчивости и динамичности  $q = a = 1$ . Следовательно, в рассматриваемой области согласования, как переходной зоне, показатель изменчивости должен быть больше  $1/2$  и менее  $1$ .

Для записи уравнений изгибающей составляющей введём безразмерные переменные

$$\xi = \varepsilon^{-1/2}\xi_0, \quad \xi_0 = \alpha/R, \quad \tau_0 = c_3 t/R, \quad c_3 = \sqrt{E/\rho(1-\nu^2)} \quad (4)$$

и безразмерные усилия  $T_i^*$ , моменты  $G_i^*$ , перерезывающие силы  $N_i^*$  и перемещения  $u^*, w^*$ :

$$u = h\varepsilon^{-1/2}u^*, \quad w = h\varepsilon^{-1}w^*, \quad T_i = \frac{2Eh}{1-\nu^2}\varepsilon T_i^*, \quad (5)$$

$$G_i = \frac{2Eh^2}{1-\nu^2}G_i^*, \quad N_i = \frac{2Eh}{1-\nu^2}\varepsilon^{1/2}N_i^*,$$

где величины со звёздочками имеют один и тот же асимптотический порядок (звёздочки в дальнейшем будем опускать); через  $c_3$  обозначена скорость распространения продольной волны по двумерной теории. Тогда разрешающие уравнения в перемещениях будут иметь следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2}\right) \frac{\partial w}{\partial \xi} + \varepsilon^{1/2} \frac{B'}{B} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{1}{3} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau_0^2} + \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{2\nu}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2}\right) w - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2}\right) \frac{\partial u}{\partial \xi} + \varepsilon^{1/2} \frac{2B'}{3B} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} = 0,$$

где  $R_i$  — главные радиусы кривизны срединной поверхности,  $B$  — расстояние от оси вращения до срединной поверхности. Уравнения состояния записываются следующим образом:

$$T_1 = \frac{\partial u}{\partial \xi} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2}\right) w + \varepsilon^{1/2} \frac{\nu B'}{B} u, \quad (7)$$

$$T_2 = \nu \frac{\partial u}{\partial \xi} - \left(\frac{\nu}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) w + \varepsilon^{1/2} \frac{B'}{B},$$

$$G_1 = -\frac{1}{3} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \varepsilon^{1/2} \frac{\nu B'}{B} \frac{\partial w}{\partial \xi}\right), \quad G_2 = -\frac{1}{3} \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \varepsilon^{1/2} \frac{B'}{B} \frac{\partial w}{\partial \xi}\right).$$

В приграничной переходной зоне, рассматриваемой как область согласования с соседней высокочастотной коротковолновой составляющей, показатель изменчивости больше  $1/2$ . Соответственно, введём новые переменные  $\xi_*, \tau_*$ , отвечающие увеличенным значениям показателей изменчивости и динамичности:

$$\xi_* = \varepsilon^{-r}\xi, \quad \tau_* = \varepsilon^{-2r}\tau_0, \quad r > 0. \quad (8)$$

Введём также показатель уменьшенной интенсивности продольного перемещения

$$u = \varepsilon^r u_*. \quad (9)$$

Формулы (8) определяют новые значения показателей изменчивости и динамичности решения для изгибающей составляющей в предполагаемой области согласования:  $q = 1/2 + r, a = 2r$ .

Перейдём в уравнениях (6) к новым переменным  $\xi_*, \tau_*$  и перемещению  $u_*$ :

$$\frac{\partial^2 u_*}{\partial \xi_*^2} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2}\right) \frac{\partial w}{\partial \xi_*} + \varepsilon^{1/2+r} \frac{B'}{B} \frac{\partial u_*}{\partial \xi_*} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{1}{3} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi_*^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau_*^2} + \varepsilon^{4r} \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{2\nu}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2}\right) w - \varepsilon^{4r} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2}\right) \frac{\partial u_*}{\partial \xi_*} + \varepsilon^{1/2+r} \frac{2B'}{3B} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi_*^3} = 0.$$



Отметим, что во втором уравнении (10) с асимптотической погрешностью  $O(\varepsilon^{4r})$  можно пренебречь членами, содержащими радиусы кривизны. Отметим также, что при  $r > 1/6$  указанными членами можно пренебречь по сравнению со слагаемыми, содержащими функцию  $B$  и её производную. Тогда интегрирование (10) сводится к интегрированию следующего разрешающего уравнения:

$$\frac{1}{3} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi_*^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau_*^2} + \varepsilon^{1/2+r} \frac{2B'}{3B} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi_*^3} = 0. \quad (11)$$

Таким образом, уравнение (11) описывает изгибную составляющую в области, где значение показателя изменчивости  $q$  увеличивается, т.е. при  $\xi_0 \gg \varepsilon^{1/2}$ .

Перейдём к построению асимптотически оптимальных уравнений для антисимметричного высокочастотного коротковолнового приближения в предполагаемой области согласования. Введём для рассматриваемой области показатели изменчивости и динамичности, аналогичные предшествующему случаю изгибной составляющей:

$$q = \frac{1}{2} + r, \quad a = 2r \quad (0 < r < 1/2). \quad (12)$$

В соответствии с (12) перейдём в разрешающих уравнениях высокочастотного коротковолнового приближения [1, 2] к безразмерным переменным с учётом изменчивости и динамичности

$$\alpha = R\varepsilon^{1/2+r} \xi_*, \quad z = R\varepsilon \zeta, \quad t = R\varepsilon^{2r} \tau_*/c_2 \quad (13)$$

и зададим асимптотические величины компонент напряжений и перемещений в виде

$$\begin{aligned} v_1 &= R\varepsilon v_1^*, & v_3 &= R\varepsilon^{1/2+r} v_3^*, \\ \sigma_{11} &= E\varepsilon^{1/2-r} \sigma_{11}^*, & \sigma_{31} &= E\varepsilon^{1-2r} \sigma_{31}^*, & \sigma_{33} &= E\varepsilon^{3/2-3r} \sigma_{33}^*, \end{aligned} \quad (14)$$

где величины со звёздочками обладают одним и тем же асимптотическим порядком. Пренебрегая в разрешающих уравнениях рассматриваемой составляющей величинами порядка  $O(\varepsilon^{1-2r})$ , приходим к следующей системе:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{31}^*}{\partial \zeta} + \frac{\partial \sigma_{11}^*}{\partial \xi_*} + \varepsilon^{1/2+r} \frac{B'}{B} (\sigma_{11}^* - \sigma_{22}^*) &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{33}^*}{\partial \zeta} + \frac{\partial \sigma_{31}^*}{\partial \xi_*} + \varepsilon^{1/2+r} \frac{B'}{B} \sigma_{31}^* - \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial v_3^*}{\partial \tau_*^2} &= 0, \\ \sigma_{11}^* &= \frac{1}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial v_1^*}{\partial \xi_*} + \varepsilon^{1/2+r} \nu \frac{B'}{B} \right), \\ \frac{\partial v_3^*}{\partial \zeta} &= 0, \quad \frac{\partial v_1^*}{\partial \zeta} + \frac{\partial v_3^*}{\partial \xi_*} &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Уравнения (15) определяют следующую зависимость компонент НДС от нормальной координаты  $\zeta$ :

$$\begin{aligned} v_1^* &= \zeta v_1^{(1)}, & v_3^* &= \zeta v_3^{(0)}, & \sigma_{11}^* &= \zeta \sigma_{11}^{(1)}, \\ \sigma_{31}^* &= \sigma_{31}^{(0)} + \zeta^2 \sigma_{31}^{(2)}, & \sigma_{33}^* &= \zeta \sigma_{33}^{(1)} + \zeta^3 \sigma_{33}^{(2)}, \end{aligned} \quad (16)$$

которая показывает выполнение геометрических гипотез Кирхгофа – Лява относительно неизменности длины нормального элемента к срединной поверхности и его перпендикулярности к ней.

Поскольку рассматриваются однородные граничные условия на лицевых поверхностях

$$\sigma_{31}^* = \sigma_{33}^* = 0, \quad \zeta = \pm 1, \quad (17)$$



то зависимости для составляющих разложения компонент НДС по нормальной координате из (16) примут следующий вид:

$$\begin{aligned}
 v_1^{(1)} &= -\frac{\partial v_3^{(0)}}{\partial \xi_*}, \\
 \sigma_{11}^{(1)} &= \frac{1}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial \xi_*} + \varepsilon^{1/2+r} \nu \frac{B'}{B} v_1^{(1)} \right), \\
 \sigma_{31}^{(0)} &= -\sigma_{31}^{(2)}, \\
 \sigma_{31}^{(2)} &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \sigma_{11}^{(1)}}{\partial \xi_*} + \varepsilon^{1/2+r} \frac{B'}{B} (\sigma_{11}^{(1)} - \sigma_{22}^{(2)}) \right], \\
 \sigma_{33}^{(1)} &= -\frac{\partial \sigma_{31}^{(0)}}{\partial \xi_*} - \varepsilon^{1/2+r} \frac{B'}{B} \sigma_{31}^{(0)} + \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 v_3^{(0)}}{\partial \tau_*^2}, \\
 \sigma_{33}^{(3)} &= -\frac{1}{3} \left( \frac{\partial \sigma_{31}^{(2)}}{\partial \xi_*} + \varepsilon^{1/2+r} \frac{B'}{B} \sigma_{31}^{(2)} \right).
 \end{aligned} \tag{18}$$

Система (18) определяет следующее разрешающее уравнение относительно прогиба  $v_3^{(0)}$ :

$$\frac{1}{3} \frac{\partial^4 v_3^{(0)}}{\partial \xi_*^4} - \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial v_3^{(0)}}{\partial \tau_*^2} + \varepsilon^{1/2+r} \frac{2B'}{3B} \frac{\partial^3 v_3^{(0)}}{\partial \xi_*^3} = 0. \tag{19}$$

Поскольку  $c_2^2/c_3^2 = (1-\nu)/2$ , временная переменная  $\tau_*^{(1)}$  из (8) и временная переменная  $\tau_*^{(2)}$  из (13) связаны соотношением

$$\tau_*^{(2)} = \sqrt{\frac{1-\nu}{2}} \tau_*^{(1)}, \tag{20}$$

то уравнения (11) и (19) совпадают в области изменения показателя  $q$

$$\frac{1}{2} < q < 1. \tag{21}$$

Это соответствует границам области согласования изгибной составляющей Кирхгофа – Лява и антисимметричной высокочастотной коротковолновой составляющей, определяемой следующим асимптотическим неравенством:

$$\varepsilon^{1/2} \ll \xi_0 \ll 1. \tag{22}$$

Данный вывод, основанный на сравнении асимптотик разрешающих уравнений, уточняет оценку (3).

#### 4. Область согласования высокочастотного коротковолнового приближения и антисимметричного гиперболического погранслоя

В работе [15] область согласования высокочастотного коротковолнового приближения рассматривалась на примере оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны. Поскольку показатели изменчивости высокочастотной коротковолновой составляющей имеют значения  $q = a = 1$ , а показатели изменчивости гиперболического погранслоя имеют значения  $q = a = 2$ , то в [15] было показано, что для того узкого класса оболочек показатели изменчивости увеличиваются от значений единица на расстоянии  $O(\varepsilon)$  от фронта до значений двух на расстоянии от фронта  $O(\varepsilon^2)$ . Прифронтная область  $O(\varepsilon^2)$  и является при этом областью применимости гиперболического погранслоя. Таким образом, область согласования и была выделена как область такого увеличения значений показателей изменчивости и динамичности.

Рассмотрим поведение уравнений высокочастотной коротковолновой составляющей для нашего общего случая оболочек вращения. Поскольку, как показано в [10], фронтальная



поверхность формируется повернутыми нормальными к срединной поверхности, то приведённая ранее схема расположения области согласования рассматриваемых составляющих уже не имеет места. Проанализируем асимптотику разрешающих уравнений этой составляющей в окрестности фронта волны расширения.

В работе [10] построено асимптотическое представление геометрии переднего фронта волны расширения в произвольной оболочке вращения: в рамках погрешности  $O(\varepsilon^2)$  он может быть задан повернутой нормалью к срединной поверхности по формуле

$$\alpha = \alpha_0 \left[ 1 - \varepsilon \frac{\zeta}{\xi_0} F(\xi_0) + O(\varepsilon^2) \right], \quad F(\xi_0) = \int_0^{\xi_0} \frac{d\xi_0}{R_1^*}, \quad (23)$$

где  $R_1^* = R_1/R$ ,  $\alpha_0 = c_1 t_0$ ,  $t_0$  — текущий момент времени. При этом длину отрезка  $z_F^0$  на повернутой нормали можно задать следующей формулой:

$$z_F^0 = z \sqrt{1 + F^2(\xi_0)}. \quad (24)$$

В соответствии с (24) и вводим новую координату  $z_F = z \sqrt{1 + F^2(\xi_0)}$ , которая при  $\alpha = c_1 t$  отсчитывается вдоль повернутой нормали, совпадающей с передним фронтом волны.

Выпишем сначала разрешающие уравнения искомой составляющей относительно перемещений и уравнения состояния в исходной системе координат  $(\alpha, z)$  [1, 2]:

$$\begin{aligned} \varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \varkappa^{-2} \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha \partial z} &= 0, \\ \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha \partial z} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha^2} + \varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} + \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{B'}{B} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} &= 0, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1 + \nu} \left( k_2 \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_1 \frac{\partial v_3}{\partial z} + k_1 \frac{B'}{B} v_1 \right), \\ \sigma_{33} &= \frac{E}{1 + \nu} \left( k_1 \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_2 \frac{\partial v_3}{\partial z} + k_1 \frac{B'}{B} v_1 \right), \\ \sigma_{13} &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \left( \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} \right), \end{aligned} \quad (26)$$

где  $k_1 = \nu/(1 - 2\nu)$ ,  $k_2 = (1 - \nu)/(1 - 2\nu)$ .

Перейдём в разрешающих уравнениях высокочастотной коротковолновой составляющей (25)–(26) к новой системе координат  $(\alpha, z_F)$ , связанной непосредственно с передним фронтом волны расширения:

$$\begin{aligned} \varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} + (1 + F^2) \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_F^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \frac{\sqrt{1 + F^2}}{1 - 2\nu} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha \partial z_F} + \\ + \frac{z_F F}{R_1} \left[ \frac{2\varkappa^{-2}}{\sqrt{1 + F^2}} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha \partial z_F} + \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial^2 v_3}{\partial z_F^2} \right] + \varkappa^{-2} \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} &= 0, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1 + F^2}}{1 - 2\nu} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha \partial z_F} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha^2} + \varkappa^{-2} (1 + F^2) \frac{\partial^2 v_3}{\partial z_F^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} + \\ + \frac{z_F}{R_1 \sqrt{1 + F^2}} \left[ \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_F^2} + \frac{2}{\sqrt{1 + F^2}} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha \partial z_F} \right] + \frac{B' \sqrt{1 + F^2}}{(1 - 2\nu) B} \frac{\partial v_1}{\partial z_F} + \frac{B'}{B} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1 + \nu} \left( k_2 \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_1 \sqrt{1 + F^2} \frac{\partial v_3}{\partial z_F} \right), \\ \sigma_{33} &= \frac{E}{1 + \nu} \left( k_1 \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_2 \sqrt{1 + F^2} \frac{\partial v_3}{\partial z_F} \right), \\ \sigma_{13} &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \left( \sqrt{1 + F^2} \frac{\partial v_1}{\partial z_F} + \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} \right). \end{aligned} \quad (28)$$



При выводе уравнений гиперболического погранслоя в оболочках вращения произвольной формы в работе [10] переход к координатам  $(\alpha, z_F)$  был произведён в исходных трёхмерных уравнениях теории упругости. При этом были выделены симметричный и антисимметричный его типы по введённой координате  $z_F$ . Для рассматриваемого антисимметричного типа с асимптотической погрешностью  $O(\varepsilon)$  компоненты НДС  $v_1, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$  по координате  $z_F$  нечётны, а  $v_3, \sigma_{13}$  — чётны. Такой анализ помог перед процедурой асимптотического интегрирования трёхмерных уравнений упростить их и получить такую форму, которая полностью совпадает с уравнениями высокочастотной коротковолновой составляющей в координатах  $(\alpha, z_F)$ , представленными выражениями (27)–(28). Следовательно, уравнения высокочастотной коротковолновой составляющей полностью описывают НДС в узкой прифронтной области в окрестности фронта волны (23) и уравнения гиперболического погранслоя согласно [10] представляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} + (1 + F^2) \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_F^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \frac{2z_F}{R_1 \sqrt{1 + F^2}} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha \partial z_F} + \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} &= 0, \\ \sigma_{11} &= \frac{E}{2(1 + \nu) \alpha^2} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha}, \\ \sigma_{33} &= \frac{E\nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha}, \\ \sigma_{13} &= \frac{E}{1 + \nu} \sqrt{1 + F^2} \frac{\partial v_1}{\partial z_F}. \end{aligned} \quad (29)$$

Таким образом, мы получим, что уравнения высокочастотной коротковолновой составляющей (25)–(26) являются общими с точки зрения описания также и в узкой прифронтной области переднего фронта волны расширения. Это является вполне естественным, поскольку эти уравнения строились для НДС с показателями изменчивости и динамичности, равными единице и выше.

Областью применимости уравнений гиперболического погранслоя (29) является область в окрестности фронта, которая в прифронтных координатах  $\xi_0 = \alpha/R, \zeta_F = z_F/h, \tau_0 = c_1 t/R$  определяется асимптотическим неравенством

$$\tau_0 - \xi_0 = O(\varepsilon^2), \quad |\zeta_F| \leq \sqrt{1 + F^2(\xi_0)}. \quad (30)$$

В исходных координатах  $(\alpha, z, t)$  область (30) входит в область  $\tau_0 - \xi_0 = O(\varepsilon)$ , а границу этой области можно считать областью согласования гиперболического погранслоя и высокочастотной коротковолновой составляющей.

## Вывод

Проведённое в представленной работе исследование позволило завершить для случая ударных торцевых воздействий вида LM построение полной асимптотической теории нестационарных волновых процессов в оболочках вращения произвольной формы. Доказана полнота представления нестационарного НДС четырьмя составляющими: изгибной составляющей теории Кирхгофа – Лява, антисимметричной высокочастотной коротковолновой составляющей, антисимметричным гиперболическим погранслоем и квазистатическим погранслоем типа Сен-Венана. Определены асимптотически границы областей согласования соседних составляющих. Следует также отметить, что приведённая концепция расчленения нестационарного НДС полностью соответствует принципу Сен-Венана в динамике тонкостенных конструкций.

## Список литературы

1. Коссович Л. Ю. Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек. Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 1986. 176 с. EDN: [VIOSWL](#)
2. *Kaplunov J. D., Nolde E. V., Kossovich L. Y.* Dynamics of thin walled elastic bodies. San Diego ; London ; Boston ; New York ; Sydney ; Tokyo ; Toronto : Academic Press, 1998. 226 p. <https://doi.org/10.1016/C2009-0-20923-8>, EDN: [WNSAFB](#)



3. Nigul U. K. Regions of effective application of the methods of three-dimensional and two-dimensional analysis of transient stress waves in shells and plates // *International Journal of Solids and Structures*. 1969. Vol. 5, iss. 6. P. 607–627. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(69\)90031-6](https://doi.org/10.1016/0020-7683(69)90031-6)
4. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. Москва : Наука, 1976. 512 с.
5. Новожилов В. В., Слепян Л. И. О принципе Сен-Венана в динамике стержней // *Прикладная математика и механика*. 1965. Т. 29, вып. 2. С. 261–281.
6. Слепян Л. И. Нестационарные упругие волны. Ленинград : Судостроение, 1972. 374 с.
7. Kossovich L. Yu., Kirillova I. V. Dynamics of shells under shock loading: an asymptotic approach // *Civil-Comp Proceedings*. 2008. Vol. 88. P. 1–20. EDN: QPMORG
8. Коссович Л. Ю., Кириллова И. В. Асимптотическая теория нестационарных процессов в тонких оболочках // *Proceedings of the Second International Conference Topical Problems of Continuum Mechanics*. Dilijan, Armenia, 2010. P. 321–325.
9. Каплунов Ю. Д., Кириллова И. В., Коссович Л. Ю. Асимптотическое интегрирование динамических уравнений теории упругости для случая тонких оболочек // *Прикладная математика и механика*. 1993. Т. 57, вып. 1. С. 83–91. EDN: UJSTAN
10. Кириллова И. В. Асимптотическая теория гиперболического погранслоя в оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях тангенциального типа // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2024. Т. 24, вып. 2. С. 222–230. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-222-230>, EDN: SFYWV
11. Кириллова И. В., Коссович Л. Ю. Асимптотическая теория волновых процессов в оболочках вращения при ударных поверхностных и торцевых нормальных воздействиях // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2022. № 2. С. 35–49. <https://doi.org/10.31857/S057232992202012X>, EDN: HHWAXC
12. Нигул У. К. О методах и результатах анализа переходных волновых процессов изгиба упругой плиты // *Известия Академии наук Эстонской ССР. Серия физико-математических и технических наук*. 1965. Т. 14, № 3. С. 345–384. <https://doi.org/10.3176/phys.math.tech.1965.3.04>
13. Нигул У. К. О применимости приближенных теорий при переходных процессах деформаций круговых цилиндрических оболочек // *Труды 6-й Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин*. Москва : Наука, 1966. С. 593–599.
14. Нигул У. К. Сопоставление результатов анализа переходных волновых процессов в оболочках и пластинах по теории упругости и приближенным теориям // *Прикладная математика и механика*. 1969. Т. 33, вып. 2. С. 308–322.
15. Кириллова И. В. Асимптотический вывод двух типов приближения динамических уравнений теории упругости для тонких оболочек : дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Саратов, 1998. 122 с.

### References

1. Kossovich L. Yu. *Nestatsionarnye zadachi teorii uprugikh tonkikh obolochek* [Non-stationary problems of the theory of elastic thin shells]. Saratov, Saratov State University Publ., 1986. 176 p. (in Russian). EDN: VIOSWL
2. Kaplunov J. D., Nolde E. V., Kossovich L. Y. Dynamics of thin walled elastic bodies. San Diego, London, Boston, New York, Sydney, Tokyo, Toronto, Academic Press, 1998. 226 p.. <https://doi.org/10.1016/C2009-0-20923-8>, EDN: WNSAFB
3. Nigul U. K. Regions of effective application of the methods of three-dimensional and two-dimensional analysis of transient stress waves in shells and plates. *International Journal of Solids and Structures*, 1969, vol. 5, iss. 6, pp. 607–627. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(69\)90031-6](https://doi.org/10.1016/0020-7683(69)90031-6)
4. Goldenveizer A. L. Theory of elastic thin shells. Oxford, Pergamon Press, 1961. 658 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1976. 512 p.).
5. Novozhilov V. V., Slepian L. I. On Saint-Venant's principle in the dynamics of beams. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1965, vol. 29, iss. 2, pp. 293–315. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(65\)90032-8](https://doi.org/10.1016/0021-8928(65)90032-8)
6. Slepian L. I. *Nestatsionarnye uprugie volny* [Unsteady elastic waves]. Leningrad, Sudostroenie, 1972. 374 p. (in Russian).
7. Kossovich L. Yu., Kirillova I. V. Dynamics of shells under shock loading: an asymptotic approach. *Civil-Comp Proceedings*, 2008, vol. 88, pp. 1–20. EDN: QPMORG
8. Kossovich L. Yu., Kirillova I. V. Asymptotic theory of non-stationary processes in thin shells. *Proceedings of the Second International Conference Topical Problems of Continuum Mechanics*. Dilijan, Armenia, 2010, pp. 321–325 (in Russian).
9. Kaplunov Yu. D., Kirillova I. V., Kossovich L. Yu. Asymptotic integration of the dynamic equations



- of the theory of elasticity for the case of thin shells. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 57, iss. 1, pp. 83–91 (in Russian). EDN: UJSTAN
10. Kirillova I. V. Asymptotic theory of the hyperbolic boundary layer in shells of revolution at shock edge loading of the tangential type. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 2, pp. 222–230 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-222-230>, EDN: SFYWBV
  11. Kirillova I. V., Kossovich L. Yu. Asymptotic theory of wave processes in shells of revolution under surface impact and normal end actions. *Mechanics of Solids*, 2022, vol. 57, iss. 2, pp. 232–243. <https://doi.org/10.3103/S0025654422020078>, EDN: WCTBUQ
  12. Nigul U. K. On the methods and the results of analysis of transient wave processes of bending of an elastic plate. *Eesti NSV Teaduste Akadeemia Toimetised. Füüsika-, Matemaatika- ja Tehnikateaduste Seeria*, 1965, vol. 14, iss. 3, pp. 345–384 (in Russian). <https://doi.org/10.3176/phys.math.tech.1965.3.04>
  13. Nigul U. K. On the applicability of approximate theories in transient processes of deformations of circular cylindrical shells. *Trudy 6-y Vsesoyuznoy konferentsii po teorii obolochek i plastin* [Proceedings of the 6th All-Union Conference on the Theory of Shells and Plates]. Moscow, Nauka, 1966, pp. 593–599 (in Russian).
  14. Nigul U. K. Comparison of the results of the analysis of transient wave processes in shells and plates according to the theory of elasticity and approximate theories. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1969, vol. 33, iss. 2, pp. 308–322 (in Russian).
  15. Kirillova I. V. *Asymptotic derivation of two types of approximation of dynamic equations of the theory of elasticity for thin shells*. Diss. Cand. Sci. (Phys.-Math.). Saratov, 1998. 122 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 21.10.2024

Принята к публикации / Accepted 19.11.2024

Опубликована / Published 28.02.2025