



Научная статья

УДК 517.98

## Расчет параметров упругих и гиперупругих моделей кожи лица

С. А. Муслов<sup>1</sup>, С. Д. Арутюнов<sup>1</sup>, П. Ю. Сухочев<sup>2✉</sup>, Е. А. Чижмаков<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный медико-стоматологический университет имени А. И. Евдокимова, Россия, 127006, Москва, ул. Долгоруковская, д. 4

<sup>2</sup>Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1

**Муслов Сергей Александрович**, кандидат физико-математических наук, доктор биологических наук, профессор кафедры нормальной физиологии и медицинской физики, muslov@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9752-6804>, SPIN: 7213-2852, AuthorID: 185513

**Арутюнов Сергей Дарчоевич**, доктор медицинских наук, заведующий кафедрой цифровой стоматологии, <https://orcid.org/0000-0001-6512-8724>, SPIN: 1052-4131, AuthorID: 262790

**Сухочев Павел Юрьевич**, научный сотрудник лаборатории математического обеспечения имитационных динамических систем, <https://orcid.org/0000-0002-8004-6011>, SPIN: 7780-8694, AuthorID: 1004519

**Чижмаков Евгений Александрович**, ассистент кафедры технологий протезирования в стоматологии, <https://orcid.org/0000-0003-1313-3307>, SPIN: 8122-7810, AuthorID: 1079573

**Аннотация.** Результаты одноосных механических испытаний кожи лица (лба) *in vitro* были сопоставлены с линейной, билинейной и нелинейной экспоненциальной, а также пятью гиперупругими моделями. Результаты показали, что деформационные свойства тканей наилучшим образом описываются экспоненциальной функцией. В рамках феноменологической модели определены параметры упругого дифференциального модуля (минимальные, средние и максимальные значения). Рассмотрены линейная и билинейная упругие модели и определены численные значения параметров моделей. Для изучения гиперупругих свойств кожи были использованы неогуксовская, Муни – Ривлина, Огдена, Веронда – Вестманн и полиномиальная модели. С целью поиска наиболее совершенных алгоритмов расчеты производились в системе компьютерной алгебры Mathcad 15.0 и многоцелевом программном пакете Ansys 2022 R2. Определены параметры моделей и теснота корреляционной связи между экспоненциальной кривой и расчетными данными, коэффициент корреляции использовался как критерий соответствия моделей. Наибольшую корреляцию с данными феноменологической модели продемонстрировала полиномиальная модель и модель Огдена, наименьшую — неогуксовская. Значения модулей Юнга и других упругих и гиперупругих характеристик тканей сравнивались для изучения факторов, влияющих на механическое поведение кожи лица человека, и могут быть использованы при расчетах в конечно-элементном анализе и разработке замещающих материалов для пластических операций.

**Ключевые слова:** кожа, лицо, линии Лангера, упругие свойства, гиперупругие модели

**Для цитирования:** Муслов С. А., Арутюнов С. Д., Сухочев П. Ю., Чижмаков Е. А. Расчет параметров упругих и гиперупругих моделей кожи лица // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 1. С. 91–105. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-91-105>, EDN: TJSJGIS

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Article

## Calculation of parameters of elastic and hyperelastic facial skin models

S. A. Muslov<sup>1</sup>, S. D. Arutyunov<sup>1</sup>, P. Yu. Sukhochev<sup>2✉</sup>, E. A. Chizhnikov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Evdokimov Moscow State University of Medicine and Dentistry, 4 Dolgorukovskaya St., Moscow 127006, Russia

<sup>2</sup>Lomonosov Moscow State University, GSP-1, Leninskie Gory, Moscow 119991, Russia

**Sergey A. Muslov**, muslov@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9752-6804>, SPIN: 7213-2852, AuthorID: 185513

**Sergey D. Arutyunov**, <https://orcid.org/0000-0001-6512-8724>, SPIN: 1052-4131, AuthorID: 262790

**Pavel Yu. Sukhochev**, <https://orcid.org/0000-0002-8004-6011>, SPIN: 7780-8694, AuthorID: 1004519

**Evgeny A. Chizhnikov**, <https://orcid.org/0000-0003-1313-3307>, SPIN: 8122-7810, AuthorID: 1079573

**Abstract.** The results of uniaxial mechanical tests of the facial (forehead) skin in vitro were compared with linear, bilinear and non-linear exponential, as well as five hyperelastic models. The results showed that the deformation properties of tissues are best described by the exponential function. Linear and bilinear elastic models are considered and the numerical values of the model parameters are determined. To study the hyperelastic properties of the skin, neohookean, Mooney – Rivlin, Ogden, polynomial and Veronda – Westmann phenomenological models were used. In order to find the most advanced algorithms for calculating the parameters of hyperelastic models, calculations were performed in the Mathcad 15 computer algebra system and the Ansys 2022 R2 multi-purpose software package. The parameters of the models and the closeness of the correlation between the exponential curve and the calculated data were determined, the correlation coefficient was used as a criterion for the correspondence of the models. The polynomial model and the Ogden model demonstrated the highest correlation with the experimental values, and the neohookean one demonstrated the lowest correlation. The values of Young's moduli and other elastic and hyperelastic characteristics of tissues were compared to study the factors affecting the mechanical behavior of human facial skin, and can be used in calculations in finite element analysis and in the development of replacement materials for plastic surgery.

**Keywords:** skin, face, Langer lines, elastic properties, hyperelastic models

**For citation:** Muslov S. A., Arutyunov S. D., Sukhochev P. Yu., Chizhnikov E. A. Calculation of parameters of elastic and hyperelastic facial skin models. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 1, pp. 91–105 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-91-105>, EDN: TJSJGIS

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Данные по механическим свойствам кожи лица человека весьма переменчивы. Это достаточно сильно затрудняет их интерпретацию врачами хирургами при подготовке к пластическим операциям, инженерами, создающими замещающие материалы для косметологии, и просто исследователями, занимающимися вопросами биомеханики тканей органов и разрабатывающими модели конечных элементов. Тем более эти данные весьма немногочисленны.

Т. Yamaguchi в 1960 г. первым сообщил о механических свойствах кожи лба человека [1]. По его данным, разрушающее растягивающее усилие на единицу ширины образцов составляет в среднем 0.9 кгс/мм, предел прочности (Ultimate Tensile Strength, UTS) 0.46 кгс/мм<sup>2</sup>, предельное удлинение 54% у взрослых, 1.0 кгс/мм, 0.51 кгс/мм<sup>2</sup> и 70% у обследованных в возрасте 10–49 лет соответственно. Для кожи щек эти данные составили 1.1 кгс/мм, 0.56 кгс/мм<sup>2</sup>, 70% и 1.3 кгс/мм, 0.62 кгс/мм<sup>2</sup> и 70% соответственно. Для кожи шеи, в свою очередь, 1.6 кгс/мм, 1.19 кгс/мм<sup>2</sup>, 93% и 2.2 кгс/мм, 1.32 кгс/мм<sup>2</sup>, 120%. Результаты этих исследований также содержатся в энциклопедическом труде Н. Yamada «Strength of Biological Materials» [2]. Однако данные по упругим свойствам кожи лица в этих сообщениях отсутствуют. Также нет сведений о том, каким образом были получены результаты.



В [3] эти показатели (4.6 МПа, 54%) были использованы для сравнения со своими оригинальными результатами, полученными динамическим методом корреляции изображений (*Image Correlation Method*). Авторы на площади 0.1 мм×0.1 мм и в разрешении 1536×1024 на частоте 1000 Гц наблюдали с помощью цифровой видеокамеры за плоской деформацией образца кожи лба мужчины, умершего в возрасте 85 лет. При этом ими были получены следующие результаты: предел прочности  $3.5 \pm 1.5$  МПа, полная деформация Грина – Лагранжа  $9.5 \pm 1.9\%$  и локальная —  $24.0 \pm 5.3\%$ . Деформации анализировали с помощью симметричного тензора Грина – Лагранжа:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right),$$

где  $u$  — вектор, описывающий смещение точки тела, его координаты — разность между координатами близких точек до и после деформации.

В обзорной публикации [4] со ссылкой на [3] были приведены следующие прочностные параметры кожи лба и рук, полученные при растяжении образцов со скоростью  $55 \text{ с}^{-1}$ : предел прочности 5.7–12.6 МПа, максимальная относительная деформация до разрушения 1.27–1.59. Однако при изучении сообщения [3] такие данные обнаружены не были.

Заслуживают внимания исследования стоматологов в 2015 г. [5], занимающихся косметологией кожи лица и влиянием на ее эластичные свойства высоко- и низкомолекулярных комплексов гиалуроновой кислоты. Модуль Юнга кожи лица, измеренный методом ультразвуковой эхографии до, через один и три месяца после процедур, составил справа  $9.0 \pm 0.7$ ,  $7.9 \pm 0.9$ ,  $7.0 \pm 0.5$  МПа ( $M \pm SEM$ ) и слева  $9.8 \pm 0.9$ ,  $7.8 \pm 0.7$ ,  $6.45 \pm 0.7$  МПа ( $p < 0.01$ ), т.е. эластичность кожи после процедур статистически значимо повысилась. Очевидно, это первые опубликованные исследования упругих свойств кожи лица в биомеханике.

В [6] методом динамического анализа изучали реологические свойства кожи лица (щеки) женщин в возрасте 18–40, 40–60 и 60–80 лет. Кожа была получена в качестве хирургических отходов после операций по подтяжке лица. Наблюдали значительное снижение жесткости (модуля упругости накопления  $G'$ ) кожи лица с возрастом от 3.3 до 2.4 кПа, что авторы связали с ее прогрессирующей деградацией при старении. Определяли также угол  $\delta$  механических потерь — важную характеристику вязко-упругих материалов.

Реологические вязко-упругие свойства кожи бедра и живота мужчин и женщин в возрасте 49–85 лет и «длительный модуль упругости  $E^*$  экспериментального графика растяжения-релаксации» изучали в [7]. В этих исследованиях использовали трехпараметрическую модель Кельвина вязко-упругого тела, а модуль Юнга  $E^*$  показал значения 2.5–4.2 МПа. Авторы отмечали, что полученные результаты могут быть использованы для расчета напряженно-деформированного состояния кожи при хирургических операциях.

Модуль Юнга кожи лба был рассчитан в [8]. По этим данным он составил  $0.33 \pm 0.04$  МПа ( $M \pm SD$ ) при толщине образцов  $1.4 \pm 0.05$  мм. Авторы выполняли сравнение механических свойств (упругих и релаксационных) различных участков кожи для реконструкции ушной раковины и носа. Исследовали образцы кожи размером 10×50 мм десяти мужчин в возрасте 77–94 года, европеоидов без каких-либо заболеваний кожи, с ориентацией продольной оси образцов параллельно линиям Лангера. Подкожный жир удалялся с образцов, оставляли только эпидермис и дерму. Толщина образцов кожи лба, измеренная электронным штангенциркулем, составляла  $1.4 \pm 0.05$  мм. Упругий модуль и скорость релаксации авторы рассчитывали на основании ранее опубликованной методики [9]. Исследователи сообщили данные: модуль Юнга кожи шеи, прилегающей к нижней челюсти —  $1.28 \pm 0.06$  МПа, кожи под височно-теменной областью —  $0.65 \pm 0.05$  МПа и кожи заушного сосцевидного отростка —  $0.86 \pm 0.05$  МПа. По порядку величины приведенные данные оказались намного ниже литературных значений для кожи различных отделов тела человека [10] и поэтому нами в расчетах были использованы в качестве начального модуля Юнга. Действительно, модуль Юнга мягких биологических



тканей человека и животных является анизотропным, дифференциальным и инкрементальным (увеличивающимся с деформацией). Мы останавливались на этом аспекте в [11]. В начальной стадии деформирования тканей «участвует» только эластиновая матрица с низким модулем упругости, именно она является несущим элементом, а гораздо более «жесткие» коллагеновые волокна еще волнисты и лишь при некотором  $\varepsilon = \varepsilon_{cr}$  «включаются» в процесс деформирования, что сопровождается возрастанием полного модуля Юнга и снижением податливости материала. Таким образом, характер переплетения коллагеновых волокон, их переориентирование и вовлечение соседних структур параллельно друг другу делает возможным значительное растяжение кожи.

Несмотря на ряд интересных результатов, полученных разными авторами, ни в одном из исследований упругих характеристик кожи лица не предпринято попыток построения механической феноменологической модели данной анатомической области тела человека.

Исследованию гиперупругих свойств кожи человека и животных посвящено весьма много работ, в том числе обзор [4] и группа оригинальных статей [12–20]. Из иерархии гиперупругих моделей чаще всего использовалась модель Огдена [4, 12–14], а также Муни – Ривлина [4, 13, 15], Веронда – Вестманн [16, 17], полиномиальная [4, 14], неогуконская [4, 13], редко – Гассера – Огдена – Хольцапфеля (GON) [4, 18]. Содержанием большинства работ была подгонка (“*fitting*”) параметров модели с целью получения наибольшего соответствия опытных и модельных данных. Часть авторов использовали полученные результаты для проведения нелинейного конечно-элементного анализа [4, 20, 21] и др. Однако гиперупругие характеристики кожи лица не изучались. Можно отметить исследования [19], в которых авторы построили конечно-элементную модель, которая имитировала экспериментальные деформации с погрешностью от 11 до 23%. Кожа лица добровольцев с помощью микророботизированного устройства демонстрировала нелинейную, анизотропную и вязкоупругую реакцию силы на перемещение и была представлена функцией энергии деформации Огдена и квазилинейным вязкоупругим законом (QLV).

Цель работы — на основании существующих литературных данных изучить зависимость упругих модулей кожи лица от деформации в рамках различных (линейной, билинейной и экспоненциальной) моделей; сравнить существующие гиперупругие модели механического поведения кожи лица для случая одноосного растяжения и определить параметры этих моделей.

## Методы исследования

Определение и исследование параметров упругих и гиперупругих моделей производили в системе компьютерной алгебры Mathcad 15.0 и многоцелевом программном комплексе Ansys 2022 R2, признанных во всем мире универсальных средствах решения широкого класса задач математической физики и механики. В пакете Mathcad оперировали со встроенными функциями `linfit`, `genfit`, при расчете силы корреляции моделей — функцией `corr`, при стыковке векторов численных данных билинейной модели — функцией `stack`.

В комплексе Ansys применяли модуль `Static Structural – Physical Properties – Hyperelastic`. При вводе данных использовали инженерные (условные) напряжения и деформации, а не истинные (Коши) как это рекомендовано в [22] для ряда версий Ansys. Соответствие модельных и экспериментальных данных в пакете Ansys 2022 R2 оценивали с помощью функции `Error Norm for Fit` в позиции `Absolute error`. Как известно, пункт меню `Error Norm for Fit` позволяет использовать различные нормы при расчете точности аппроксимаций. Если возникают большие деформации, лучше применять абсолютную погрешность, поскольку в этом случае большие значения деформации имеют больший вес [23]. Отметим также, что гиперупругая модель Веронда – Вестманн в состав версии Ansys 2022 R2 не входит, поэтому компьютерный расчет материальных констант этой модели и ее адекватности опытным данным осуществлялся только в системе Mathcad 15.0.



## Результаты и обсуждения

### Экспоненциальная, линейная и билинейная модели

#### Экспоненциальная модель

Параметры экспоненциальной модели кожи лица (лба) рассчитывали на основе зависимости

$$\sigma(\varepsilon) = a(\exp(b \cdot \varepsilon) - 1), \quad (1)$$

которая успешно применялась при изучении влияния вязкоупругости на болевые ощущения кожи в рамках квазилинейной модели вязкоупругости (*quasi-linear viscoelasticity*, QLV) [24]. На правомерность такой аппроксимации указывают также имеющиеся многочисленные сведения об экспоненциальном характере  $J$ -зависимости деформация – напряжение для большинства мягких биологических тканей [2, 25, 26]. Материальные константы  $a$  и  $b$  определялись путем решения системы уравнений

$$\begin{cases} \sigma_{\max} = a(\exp(b \cdot \varepsilon_{\max}) - 1), \\ E(0) = ab, \end{cases} \quad (2)$$

опираясь на литературные данные:  $\sigma_{\max} = 4.6$  МПа,  $\varepsilon_{\max} = 0.54$  [1, 2],  $E(0) = 0.33$  МПа [8]. В результате были получены следующие значения параметров модели:  $a = 0.037$  МПа,  $b = 8.953$ . Модуль Юнга кожи, таким образом, определялся соотношением  $E = 0.33 \cdot \exp(8.953\varepsilon)$  и являлся дифференциальным и инкрементальным (возрастающим с деформацией). Его значения составили:

- минимальное —  $E_{\min} = E(0) = 0.33$  (МПа);
- среднее —  $E_{\text{med}}(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}} \int_0^{\varepsilon_{\max}} E(\varepsilon) d\varepsilon = 8.52$  (МПа);
- максимальное —  $E_{\max} = E(\varepsilon_{\max}) = 41.51$  (МПа);
- с отношением  $E_{\max}/E_{\min} = 125.80$ .

#### Линейная модель

Для определения параметров линейной модели кожи применяли функцию **genfit** Mathcad 15.0. Модуль Юнга линейной модели составил 4.26 МПа, что соответствует интервалу значений  $E_{\min} - E_{\max}$  экспоненциальной модели и меньше  $E_{\text{med}}(\varepsilon)$  в два (2.00) раза. Среднее квадратичное отклонение линейной модели от экспоненциальной в исследуемом интервале деформаций при шаге 4.01 составило 0.74, коэффициент корреляции между моделями 0.8613. Отметим, что угловой коэффициент линии тренда экспоненциальной модели равен 4.25 МПа при коэффициенте детерминации  $R^2 = 0.62$  (данные Microsoft Office Excel 2016), что подтверждает результаты, полученные в Mathcad.

#### Билинейная модель

Параметры двухпараметрической билинейной модели кожи были заимствованы из экспоненциальной с помощью формул:  $E_1 = E_{\min}$  и  $E_2 = E_{\max}$ . В результате были получены значения  $E_1 = 0.33$  МПа и  $E_2 = 41.51$  МПа соответственно.

На диаграмме  $\sigma - \varepsilon$  (рис. 1) билинейная модель представлена касательными, проведенными к линии регрессии с координатами

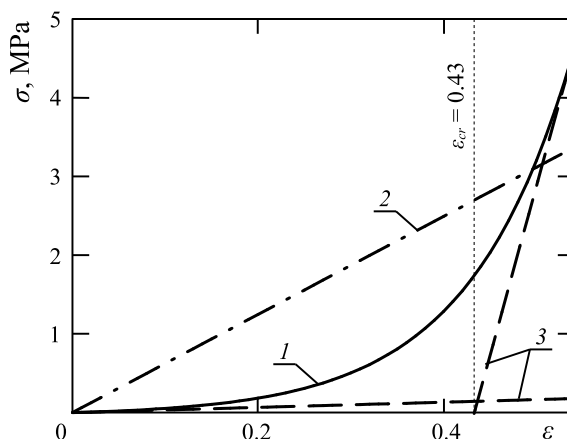


Рис. 1. Модели кожи лица: 1 — экспоненциальная; 2 — линейная; 3 — билинейная. Метка  $\varepsilon_{cr} = 0.43$  соответствует смене механизмов деформирования кожи

Fig. 1. Facial skin models: 1 — exponential; 2 — linear; 3 — bilinear. The  $\varepsilon_{cr} = 0.43$  label corresponds to a change in the mechanisms of skin deformation

$\varepsilon = 0$  и  $\varepsilon = \varepsilon_{\max}$ . При вычислении корреляции билинейной зависимости с экспоненциальной кривой, чтобы составить из двух матриц одну, применяли функцию `Mathcad stack(A, B, C, ...)`. Отметим, что точка пересечения касательных  $\varepsilon_{cr}$  соответствует моменту «переключения» режима деформирования биологических тканей с «эластинового» на «эластин-коллагеновый» и тесно связана с особенностями механизма деформации. В результате расчетов выявлено значение  $\varepsilon_{cr} = 0.43$  (43%). Это значение весьма неплохо согласуется с предсказанным Х. Markenscoff и I. Yannas [27], которые использовали простую модель сети коллагеновых волокон в дерме для расчета уровня деформации, при котором жесткость кожи резко увеличивается. Коллагеновая сеть была смоделирована как состоящая из небольших прямых волокон единичной длины, прикрепленных друг к другу. Угол в точках крепления рассматривался как случайная величина, распределенная с равной вероятностью от 0 до 180°. Они прогнозировали, что все волокна выпрямляются при деформации  $\varepsilon = 57\%$ , что неплохо соответствует нашей оценке, предъявленной выше.

Согласно [4] данные билинейной модели кожи составили в зависимости от анатомического расположения образцов (абдоминальная область, предплечье, отделы спины), метода испытания, толщины образцов и их ориентации относительно линий Лангера:  $E_1 = 0.41 - 1.95$  МПа,  $E_2 = 0.187 - 82.81$  МПа,  $\varepsilon_{cr} = 3.8 - 21\%$ .

### Гиперупругие модели

В организме человека большинство мягких тканей считаются гиперупругими. В этом случае закон Гука не может применяться, а взаимосвязь между напряжениями  $\sigma$  и деформациями  $\varepsilon$ ,  $\lambda$  ( $\lambda = \varepsilon + 1$ ) задается с помощью потенциала энергии деформации  $W$ . Многие гиперупругие модели используются для оценки механического поведения мягких тканей, и не всегда этот выбор является обоснованным. В связи с этим выбор адекватных численных моделей и определяющих соотношений для гиперупругих материалов до сих пор является актуальной задачей в биомеханике [28].

#### Неогуковская модель

В отличие от линейно-упругих материалов, кривая «напряжение – деформация» неогуковского материала не является линейной. На начальном этапе деформирования соотношение  $\sigma$ – $\lambda$  линейно, но в какой-то момент кривая выходит на плато. Это самая простая гиперэластичная модель, в которой используется постоянный модуль сдвига. Ее удобно использовать на начальном этапе, поскольку она требует минимального количества констант. Устанавливающие уравнения неогуковской модели:

$$W = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3), \quad \sigma = 2\mu \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right), \quad (3)$$

где  $I_1$  – первый инвариант тензора деформаций,  $\mu$  – единственный параметр модели,  $\lambda = \varepsilon + 1$ .

Кривая неогуковской модели кожи лица (лба), рассчитанная на основе численных данных, полученных с помощью формулы (1), представлена на рис. 2. Среднее квадратичное отклонение неогуковской кривой от экспоненциальной составило 0.817 (здесь и далее при шаге относительной деформации 0.01), коэффициент корреляции – 0.82. Параметр  $\mu$  модели 0.92 МПа (табл. 1), что весьма сильно отличается с прогнозируемым значением  $E(0)/3 \approx 0.11$  МПа. Что касается

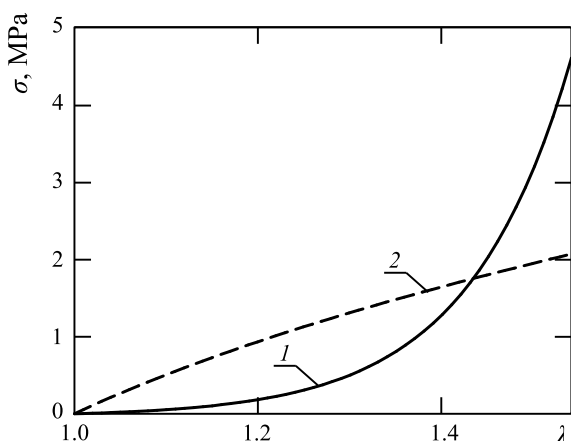


Рис. 2. Модели кожи лица: 1 – экспоненциальная; 2 – неогуковская

Fig. 2. Facial skin models: 1 – exponential; 2 – neoohookean



различий в значениях  $\mu$  ровно в два раза в программах Mathcad и Ansys, они, на наш взгляд, обусловлены разными обозначениями этого параметра в программах.

Таблица 1 / Table 1

Параметры гиперупругих моделей (Mathcad 15.0 и Ansys 2022 R2)  
Parameters of hyperelastic models (Mathcad 15.0 and Ansys 2022 R2)

Гиперупругая модель; параметры	Метод расчета	$\mu$ , МПа	$\alpha$	$C_{10}, C_1$ , МПа	$C_{01}, C_2$ , МПа	$C_{20}, C_3$ , МПа	$C_{02}$ , МПа	$C_{11}$ , МПа
Неогуковская; $\mu$	Mathcad	0.921						
	Ansys	1.8416						
Муни – Ривлина; $C_{10}, C_{01}$	Mathcad			6.861	-8.227			
	Ansys			6.8611	-8.2274			
Огдена; $\mu, \alpha$	Mathcad	0.016	13.006					
	Ansys	0.0153	14.184					
Полиномиальная; $C_{10}, C_{01}, C_{20}, C_{02}, C_{11}$	Mathcad			-6.864	7.179	64.902	114.227	-167.760
	Ansys			-6.8639	7.1794	64.9017	114.227	-167.765
Веронда – Вестманн; $C_1, C_2, C_3$	Mathcad			16.008	-0.818	14.474		
	Ansys			-	-	-		

*Модель Муни – Ривлина*

Закон Муни – Ривлина является наиболее употребительным при моделировании гиперупругих материалов. В двухпараметрической модели Муни – Ривлина второго порядка при одноосном растяжении зависимость напряжения от деформации гиперупругих тел описывается функцией [29]

$$\sigma = 2 \left( C_{10} - \frac{C_{01}}{\lambda} \right) \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) = 2C_{10} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) + 2C_{01} \left( 1 - \frac{1}{\lambda^3} \right), \tag{4}$$

где  $\sigma$  – инженерное (условное) напряжение, а две материальные константы  $C_{10}$  и  $C_{01}$  имеют размерность напряжений и определяют функцию плотности энергии деформированного материала как линейную комбинацию двух инвариантов левого тензора деформации Коши – Грина:

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3), \tag{5}$$

$I_1$  и  $I_2$  – первый и второй инварианты тензора, равные

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2; \quad I_2 = \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_3},$$

а значения  $\lambda_i = \varepsilon_i + 1$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – главные компоненты,  $\varepsilon_i$  – главные относительные деформации. Поскольку биологические ткани предполагаются несжимаемыми  $I_3 = 1$ . Если  $C_{01} = 0$ , модель эквивалентна неогуковской модели. При малых деформациях вклад  $C_{01}$  ничтожен, и можно показать, что  $C_{10}$  связан с модулем Юнга соотношением  $E = 6C_{10}$ . Модель была предложена М. Муни в 1940 г. и выражена в терминах инвариантов Р. Ривлином в 1948 г. Параметры модели Муни – Ривлина для кожи лица (лба) составили  $C_{10} = 6.861$  МПа,  $C_{01} = -8.227$  МПа (см. табл. 1). Деформационная кривая кожи лица, рассчитанная в модели Муни – Ривлина, отображена на рис. 3. Среднее квадратичное отклонение модельной от экспоненциальной

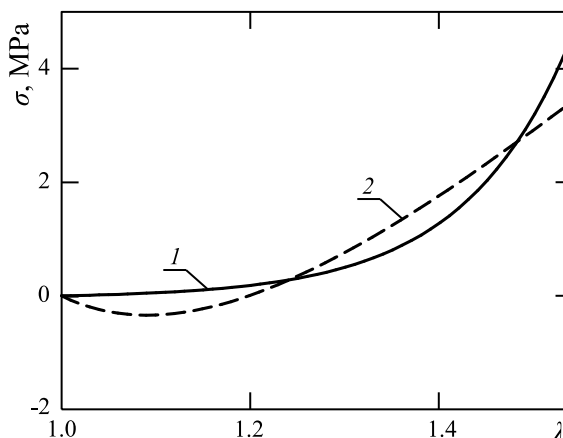


Рис. 3. Модели кожи лица: 1 – экспоненциальная; 2 – модель Муни – Ривлина  
Fig. 3. Facial skin models: 1 – exponential; 2 – Mooney – Rivlin model

кривой составило 0.378, коэффициент корреляции — 0.951 (табл. 2). Как видно, среднее квадратичное отклонение для модели Муни – Ривлина существенно ниже, а коэффициент корреляции существенно выше, чем у неогуксовской модели.

Таблица 2 / Table 2

Статистические параметры соответствия гиперупругих моделей (Mathcad 15.0 / Ansys 2022 R2)  
 Statistical parameters of compliance of hyperelastic models (Mathcad 15.0 / Ansys 2022 R2)

Параметр	Неогуксовская	Муни – Ривлина	Огдена	Полиномиальная	Веронда – Вестманн
$SD/AE^*$	0.817/36.069	0.378/7.717	0.019/0.013	0.011/0.006	0.159/-
$r^{**}$	0.82	0.951	0.9999	1	0.9915

Примечание. \*  $SD/AE$  – стандартное отклонение (*standard deviation*, Mathcad)/абсолютная погрешность (*absolute error*, Ansys); \*\*  $r$  – коэффициент корреляции.  $SD$  и  $r$  рассчитывались по отношению к нелинейной экспоненциальной модели при шаге деформации 0.01.

На рис. 3 также проявился известный недостаток модели: неустойчивость, которая может иметь место в интервале малых деформаций (при росте нагрузки деформация имеет противоположный знак). В результате модель не подходит для описания малых деформаций материала. Действительно,  $C_{10} + C_{01} < 0$  и  $C_{01} < 0$ , что противоречит критериям устойчивости материала в двухпараметрической модели Муни – Ривлина  $C_{10} + C_{01} > 0$  и  $C_{01} > 0$ , которые следуют из условия  $\partial^2 \sigma_{ij} / \partial \epsilon_{ij}^2 > 0$  [30]. В Ansys параметры модели Муни – Ривлина оказались равны  $C_{10} = 6.8611$  МПа,  $C_{01} = -8.2274$  МПа (см. табл. 1). Очевидно отсутствие расхождений в результатах расчетов параметров модели в Mathcad и Ansys, вероятно, оба приложения используют один и тот же алгоритм расчетов. Отметим, что переход в Ansys на ввод истинных (Коши) напряжений и деформаций [11, 22] не дал положительных результатов. Были зафиксированы очень значительные расхождения в значениях материальных констант, подсчитанных приложениями.

Модель Огдена

В рамках гиперупругой модели Огдена формула для упругого потенциала при одноосной деформации

$$W = \sum_{p=1}^n \frac{\mu_p}{\alpha_p} (\lambda^{\alpha_p} - 3), \tag{6}$$

что дает

$$\sigma = \sum_{p=1}^n \mu_p (\lambda^{\alpha_p} - \lambda^{-\frac{1}{2}\alpha_p}), \tag{7}$$

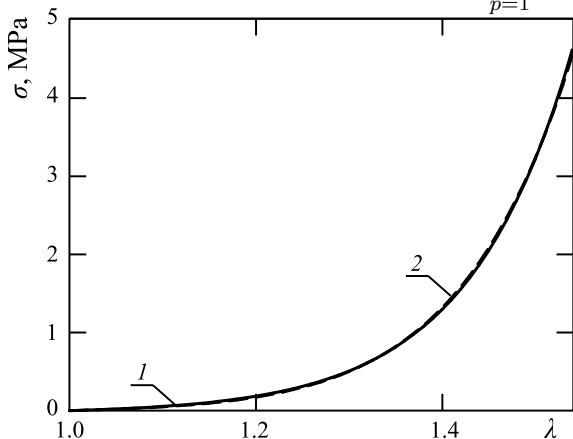


Рис. 4. Модели кожи лица: 1 – экспоненциальная; 2 – модель Огдена

Fig. 4. Facial skin models: 1 – exponential; 2 – Ogden model

где  $\mu_p$  и  $\alpha_p$  – материальные константы,  $n$  – порядок модели. Это феноменологическая модель, основанная на главных относительных удлинениях в большей степени, чем на инвариантах деформаций [31].

По отношению к экспоненциальной кривой среднее квадратичное отклонение составило 0.337, коэффициент корреляции — 0.9837, параметры модели  $\mu = 0.016$  МПа,  $\alpha = 13.006$  (см. табл. 1) и сильно зависели от начального приближения. Кривую  $\sigma$ – $\lambda$ , соответствующую модели Огдена кожи лица, можно видеть на рис. 4. В Ansys показатели составили  $\mu = 0.0153$  МПа,  $\alpha = 14.184$  (см. табл. 1). Для сравнения по данным исследований кожи человека [32], были получены следующие численные результаты:





$\mu = 0.11$  МПа,  $\alpha = 9$ ; по данным [33], для свиной кожи в зависимости от скорости компрессии образцов при испытаниях  $0.004 - 4000 \text{ с}^{-1}$   $\mu = 0.4 - 7.5$  МПа,  $\alpha = 12$ ; по данным [34], при скорости нагружения растяжением  $0.005 - 3500 \text{ с}^{-1}$   $\mu = 3 - 370$  кПа,  $\alpha = 7 - 11$ .

Согласно авторам [19], исследовавшим кривые сила – перемещение кожи лица *in vivo*, параметры примененной для интерпретации данных константы модели Огдена второго порядка были определены как  $\mu_1 = 49.8$  кПа,  $\mu_2 = 0.0003$  кПа,  $\alpha_1 = 2.10$ ,  $\alpha_2 = 35.24$ .

Отклонения результатов расчетов параметров модели Огдена в Ansys по отношению к таковым в Mathcad составили  $-4.37\%$  для  $\mu$  и  $9.05\%$  для  $\alpha$ .

#### Полиномиальная модель

В полиномиальной пятипараметрической модели второго порядка соответствующие устанавливающие выражения имеют вид [35, 36]

$$W = \sum_{i=0, j=0}^n C_{ij} (I_1 - 3)^i \cdot (I_2 - 3)^j, \quad (8)$$

где  $i = 0, 1, 2$ ;  $I_1$  и  $I_2$  – инварианты левого тензора деформации Коши – Грина;  $C_{00} = 0$  и

$$\begin{aligned} \sigma &= 2(\lambda - \lambda^{-2})[C_{10} + C_{01}\lambda^{-1} + 2C_{10}(\lambda^2 + 2\lambda^{-1} - 3) + \\ &+ 2\lambda^{-1}C_{02}(2\lambda + \lambda^{-2} - 3) + C_{11}(\lambda - 1 - \lambda^{-1} + \lambda^{-2})] = \\ &= 2C_{10}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} + 2C_{01}\left(1 - \frac{1}{\lambda^3}\right) + 4C_{20}\left(\lambda^3 - 3\lambda + 1 + \frac{3}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda^3}\right) + \right. \\ &+ 4C_{02}\left(2\lambda^3 - 3 - \frac{1}{\lambda^2} + \frac{3}{\lambda^3} - \frac{1}{\lambda^5}\right) + 6C_{11}\left(\lambda^2 - \lambda - 1 + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^3} - \frac{1}{\lambda^4}\right). \end{aligned} \quad (9)$$

Полиномиальная модель – это наиболее общий вариант записи потенциала энергии деформации. Она лежит в основе других известных моделей [28]. Среднее квадратичное отклонение от нелинейного экспоненциального представления  $\sigma - \lambda$  составило 0.011, коэффициент корреляции – 1, параметры модели  $C_{10} = -6.864$ ,  $C_{01} = 7.179$ ,  $C_{20} = 64.902$ ,  $C_{02} = 114.227$ ,  $C_{11} = -167.76$  МПа и хорошо описывают весь диапазон деформаций растяжения (рис. 5).

Таким образом, модель в данном случае правильно характеризуют поведение материала для малых и больших деформаций. Параметры полиномиальной модели, рассчитанные в Ansys, существенно не отличались от полученных в Mathcad и были равны  $C_{10} = -6.8639$ ,  $C_{01} = 7.1794$ ,  $C_{20} = 64.9017$ ,  $C_{02} = 114.227$ ,  $C_{11} = -167.765$  МПа (см. табл. 1).

Мы сравнили модельные кривые для полиномиальной модели, полученные в программах Mathcad 15.0 и Ansys 2022 R2. В последней использовали режим не **Absolute error**, как обычно, а **Normalized error**. В исследованном интервале деформаций кривые практически идентичны ( $SD = 0.058$ ,  $r = 0.9994$ ), а отсутствие сходства в данных связано, вероятно, с различными итерационными процедурами, применяемыми приложениями в процессе расчета параметров моделей. На наш взгляд, это замечание будет полезно исследователям параметров гиперупругих моделей материалов при их расчетах. Также отметим, что по своей природе функция Mathcad **linfit** сильно зависит от исходного приближения. При наличии локальных минимумов это может приводить к нестабильным результатам.

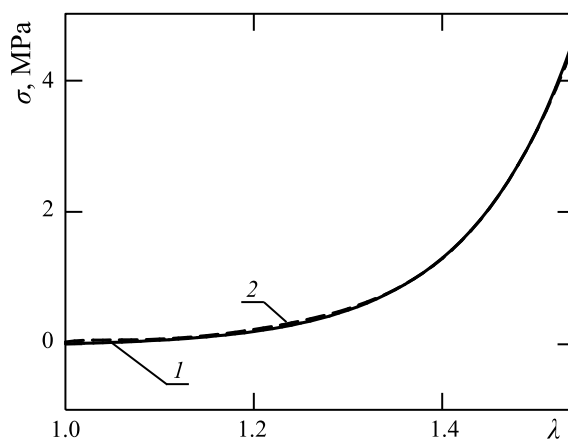


Рис. 5. Модели кожи лица: 1 – экспоненциальная; 2 – полиномиальная

Fig. 5. Facial skin models: 1 – exponential; 2 – polynomial

Для примера отметим, что Lapeer R. et al. на основании опытов на растяжение кожи в конечно-элементном моделировании в целях пластической хирургии (паховой герниопластики) использовали данные:  $C_1 = 10860$ ,  $C_2 = 150.2$ ,  $C_3 = 762.5$ ,  $C_4 = 2256$ ,  $C_5 = 354.5$  кПа для пятипараметрической полиномиальной модели и образцов кожи с изначальным расположением параллельно линиям Лангера. Также они использовали редуцированные трех- и четырехпараметрические полиномиальные модели, а также шестипараметрическую и модель Огдена [37].

*Модель Веронда – Вестманн*

Модель Веронда – Вестманн (Veronda – Westmann, V-W) задается соотношениями [38]

$$W = C_1[e^{C_2(I_1-3)} - 1] - \frac{C_1C_2}{2}(I_2 - 3),$$

$$\sigma = 2C_1C_2e^{C_2(\lambda^2+2\lambda^{-1}-3)}(\lambda - \lambda^{-2}) + 2C_3(1 - \lambda^{-3}).$$

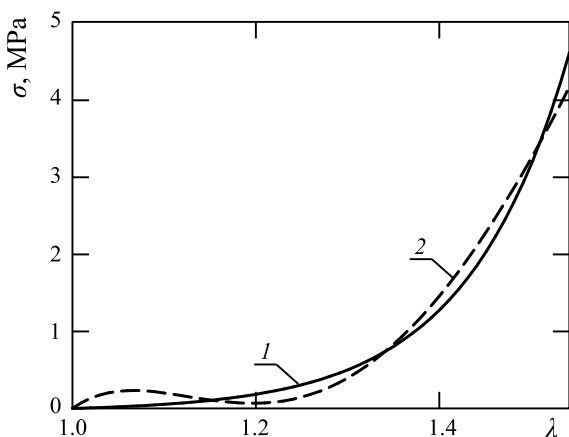


Рис. 6. Модели кожи лица: 1 – экспоненциальная; 2 – модель Веронда – Вестманн  
 Fig. 6. Facial skin models: 1 – Exponential; 2 – Veronda – Westmann model

Данная модель нечасто применяется при анализе материалов с механическими нелинейными свойствами (например, отсутствует среди гиперупругих моделей, входящих в пакет Ansys 2022 R2), но на рис. 6 видно, что удовлетворительно коррелирует с расчетными данными экспоненциальной модели, полученными в Mathcad. Среднее квадратичное отклонение составило 0.159, коэффициент корреляции – 0.9915, параметры модели равны  $C_1 = 16.008$ ,  $C_2 = -0.818$ ,  $C_3 = 14.474$  МПа. Обращает на себя внимание участок модельной нестабильности материала на участке деформации, соответствующем  $\lambda = 1.1 - 1.2$ .

Отметим, что в [16] при анализе механических свойств кожи спины человека применяли другую форму записи истинных одноосных напряжений в модели Веронда – Вестманн:

$$\sigma = 2 \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) C_1C_2 \left( e^{C_2(I_1-3)} - \frac{1}{2\lambda} \right)$$

и получили значения параметров модели  $C_1 = 13.1 - 35$ ,  $C_2 = 0.26 - 0.33$  МПа в зависимости от анатомического расположения и ориентации образцов относительно линий Лангера.

Сравним статистические показатели примененных моделей (см. табл. 2).

Видно, что наиболее близки к нелинейной экспоненциальной модели, рассмотренной вначале и наиболее часто применяемой при анализе механического поведения мягких биологических тканей, полиномиальная модель ( $SD = 0.11$ ,  $r = 1$ ) и модель Огдена ( $SD = 0.019$ ,  $r = 0.9999$ ), наименее близка к экспоненциальной модели неогуковская модель ( $SD = 0.817$ ,  $r = 0.82$ ). Таким образом, наиболее точно описывает механическое поведение кожи лица (лоб) человека полиномиальная и модель Огдена, наименее точно – неогуковская. Эти выводы подтверждаются графиками на рис. 2, 4 и 5, а также результатами, полученными в Ansys (см. табл. 2).

**Выводы**

1. Механическое поведение кожи лица характеризуется экспоненциальной функцией  $\sigma(\varepsilon) = a(\exp(b \cdot \varepsilon) - 1)$ , свойственной мягким биологическим тканям ( $a = 0.037$  МПа,  $b = 8.953$ ).



2. Дифференциальный модуль Юнга кожи лица описывается функцией  $E = ab \cdot \exp(b \cdot \varepsilon)$  и является инкрементальным, т.е. растущим по мере деформирования. Проанализированы линейная ( $r = 0.861$ ) и билинейная с двумя модулями ( $r = 0.931$ ) модели и определены параметры моделей и их корреляция с экспоненциальной зависимостью.
3. В линейной модели величина упругого модуля кожи лица равна  $E = 4.26$  МПа, в билинейной модели  $E_1 = 0.33$  и  $E_2 = 41.51$  МПа, соответственно. Величина деформации, при которой происходит смена механизма деформирования кожи лица с эластинового на коллагеновый,  $-0.43$ .
4. При исследовании гиперупругих свойств кожи лица применены феноменологические модели: неогукковская, Муни – Ривлина, Огдена, полиномиальная и Веронда – Вестманн. Для описания механического поведения кожной ткани лучше всего подходят гиперупругие модели на основе пятипараметрической полиномиальной модели и модели Огдена ( $r = 1$  и  $r = 0.9999$  соответственно). Наиболее точно описывают весь диапазон деформаций растяжения полиномиальная гиперупругая модель.
5. Некоторые расхождения в результатах расчетов параметров гиперупругих моделей Огдена в пакетах Mathcad и Ansys могут стать предметом отдельного изучения.
6. В клинической медицине знания о механических свойствах кожи лица могут быть полезны для осуществления успешной кожной пластики, которую применяют при обширных дефектах кожных покровов, обусловленных, в частности, ожогами, для закрытия гранулирующих ран, при скальпированных ранениях, после иссечения деформирующих рубцов, новообразований, при пластических челюстно-лицевых операциях, в криминалистике, анимации и т. д.

#### Список литературы

1. *Yamaguchi T.* Study on the strength of human skin // Journal of Kyoto Prefectural University of Medicine. 1960. Vol. 67. P. 347–379.
2. *Yamada H.* Strength of biological materials. Baltimore : Krieger Publ., 1973. 297 p.
3. *Jacquemoud C., Bruyere-Garnier K., Coret M.* Methodology to determine failure characteristics of planar soft tissues using a dynamic tensile test // Journal of Biomechanics. 2007. Vol. 40, iss. 2. P. 468–475. <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2005.12.010>
4. *Joodaki H., Panzer M. B.* Skin mechanical properties and modeling: A review // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part H: Journal of Engineering in Medicine. 2018. Vol. 232, iss. 4. P. 323–343. <https://doi.org/10.1177/0954411918759801>
5. *Laurino C., Palmieri B., Coacci A.* Efficacy, safety, and tolerance of a new injection technique for high- and low-molecular-weight hyaluronic acid hybrid complexes // Eplasty. 2015. Vol. 15. P. 427–437.
6. *Lynch B., Pigeon H., Le Blay H., Brizion S., Bastien P., Bornschlöggl T., Domanov Y.* A mechanistic view on the aging human skin through ex vivo layer-by-layer analysis of mechanics and microstructure of facial and mammary dermis // Scientific Reports. 2022. Vol. 12. Art. 849. <https://doi.org/10.1038/s41598-022-04767-1>
7. *Федоров А. Е., Самарцев В. А., Кириллова Т. А.* О механических свойствах кожи человека // Российский журнал биомеханики. 2006. Т. 10, № 2. С. 29–42. EDN: [JWTICT](https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2013.12.034)
8. *Griffin M. F., Leung B. C., Premakumar Y., Szarko M., Butler P. E.* Comparison of the mechanical properties of different skin sites for auricular and nasal reconstruction // Journal of Otolaryngology – Head & Neck Surgery. 2017. Vol. 46. Art. 33. <https://doi.org/10.1186/s40463-017-0210-6>
9. *Wood J. M., Soldin M., Shaw T. J., Szarko M.* The biomechanical and histological sequelae of common skin banking methods // Journal of Biomechanics. 2014. Vol. 47, iss. 5. P. 1215–1219. <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2013.12.034>
10. *Annaidh A. N., Bruyère K., Destrade M., Gilchrist M. D., Otténio M.* Characterizing the anisotropic mechanical properties of excised human skin // Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials. 2012. Vol. 5, iss. 1. P. 139–148. <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2011.08.016>
11. *Муслов С. А., Перцов С. С., Арутюнов С. Д.* Физико-механические свойства биологических тканей / под ред. О. О. Янушевича. Москва : Практическая медицина, 2023. 456 с. EDN: [MNOSIQ](https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2011.08.016)
12. *Manan N. F. A., Ramli M. H. M., Patar M. N. A. A., Holt C., Evans S., Chizari M.* Determining hyperelastic parameters of human skin using 2D finite element modelling and simulation // 2012



- IEEE Symposium on Humanities, Science and Engineering Research. Kuala Lumpur, Malaysia, 2012. P. 805–809. <https://doi.org/10.1109/shuser.2012.6268996>
13. *Othman N. L. A., Isa K. M., Manssor N. A. S.* Hyperelastic models of sheep skin under uniaxial tensile test // Proceedings of Mechanical Engineering Research Day. 2022. Vol. 2022. P. 242–243.
  14. *Gasson P., Lapeer R.* Fitting hyperelastic material models to stress-strain data from an in-vitro experiment on human skin // Proceedings of the International Conference on Polymers and Moulds Innovations (PMI) 17–18 September 2009. Ghent, Belgium, 2009. P. 127–133.
  15. *Azizzati S., Mahmud J.* Skin prestretch evaluation adapting Mooney – Rivlin model // Journal of Medical and Bioengineering. 2015. Vol. 4, iss. 1. P. 31–35. <https://doi.org/10.12720/jomb.4.1.31-35>
  16. *Chanda A.* Biomechanical modeling of human skin tissue surrogates // Biomimetics. 2018. Vol. 3, iss. 3. Art. 18. <https://doi.org/10.3390/biomimetics3030018>
  17. *Groves R. B., Coulman S. A., Birchall J. C., Evans S. L.* An anisotropic, hyperelastic model for skin: Experimental measurements, finite element modelling and identification of parameters for human and murine skin // Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials. 2013. Vol. 18. P. 167–180. <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2012.10.021>
  18. *Li W., Luo X. Y.* An invariant-based damage model for human and animal skins // Annals of Biomedical Engineering. 2016. Vol. 44, iss. 10. P. 3109–3122. <https://doi.org/10.1007/s10439-016-1603-9>
  19. *Flynn C., Taberner A. J., Nielsen P. M. F., Fels S.* Simulating the three-dimensional deformation of in vivo facial skin // Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials. 2013. Vol. 28. P. 484–494. <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2013.03.004>
  20. *Flynn C., Taberner A., Nielsen P.* Mechanical characterisation of in vivo human skin using a 3D forcesensitive micro-robot and finite element analysis // Biomechanics and Modeling in Mechanobiology. 2011. Vol. 10. P. 27–38. <https://doi.org/10.1007/s10237-010-0216-8>
  21. *Lapeer R. J., Gasson P. D., Karri V. A.* Hyperelastic finite-element model of human skin for interactive realtime surgical simulation // IEEE Transactions on Biomedical Engineering. 2011. Vol. 58, iss. 4. P. 1013–1022. <https://doi.org/10.1109/tbme.2009.2038364>
  22. *Browell R., Lin G.* The power of nonlinear materials capabilities. Part 1 of 2 on modeling materials with nonlinear characteristics / Мощь нелинейных возможностей. Первая часть статьи о моделировании материалов с нелинейными свойствами. Перевод выполнен Б. Г. Рубцовым // ANSYS Solutions. 2000. Vol. 2, iss. 1. URL: <https://studizba.com/show/1050594-1-ray-browell-the-power-of-nonlinear.html> (дата обращения: 05.09.2023).
  23. Инженерный анализ в Ansys Workbench : учеб. пособие. Ч. 1 / под. ред. В. А. Бруйка. Самара : Самарский гос. техн. ун-т, 2010. 271 с. EDN: QMHFYZ
  24. *Liu F., Li C., Liu S., Genin G. M., Huang G., Lu T. J., Xu F.* Effect of viscoelasticity on skin pain sensation // Theoretical and Applied Mechanics Letters. 2015. Vol. 5, iss. 6. P. 222–226. <https://doi.org/10.1016/j.taml.2015.11.002>
  25. *Fung Y. C.* Biomechanics: Mechanical properties of living tissues. 2nd ed. New York, NY : Springer, 1993. 586 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2257-4>
  26. *Лямец Л. Л.* Применение экспоненциальных полиномов для структурного биомеханического анализа сосудистой стенки // Математическая морфология: электронный математический и медико-биологический журнал. 1997. Т. 2, № 1. С. 71–82. EDN: ADBYXD
  27. *Markenscoff X., Yannas I.* On the stress-strain relation for skin // Journal of Biomechanics. 1979. Vol. 12. P. 127–129. [https://doi.org/10.1016/0021-9290\(79\)90151-9](https://doi.org/10.1016/0021-9290(79)90151-9)
  28. *Шмурак М. И., Кучумов А. Г., Воронова Н. О.* Анализ гиперупругих моделей для описания поведения мягких тканей организма человека // Master’s Journal. 2017. № 1. С. 230–243. EDN: YUOPFB
  29. *Melly S. K., Liu L., Liu Y., Leng J.* A review on material models for isotropic hyperelasticity // International Journal of Mechanical System Dynamics . 2021. Vol. 1. P. 71–88. <https://doi.org/10.1002/msd2.12013>
  30. *Kumar N., Rao V.* Hyperelastic Mooney – Rivlin Model: Determination and physical interpretation of material constants // MIT International Journal of Mechanical Engineering. 2016. Vol. 6, iss. 1. P. 43–46.
  31. *Ogden R. W.* Large deformation isotropic elasticity — on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences. 1972. Vol. 326, iss. 1567. P. 565–584. <https://doi.org/10.1098/rspa.1972.0026>
  32. *Shergold O. A., Fleck N. A.* Mechanisms of deep penetration of soft solids, with application to



- the injection and wounding of skin // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences. 2004. Vol. 460, iss. 2050. P. 3037–3058. <https://doi.org/10.1098/rspa.2004.1315>
33. Shergold O. A., Fleck N. A., Radford D. The uniaxial stress versus strain response of pig skin and silicone rubber at low and high strain rates // International Journal of Impact Engineering. 2006. Vol. 32, iss 9. P. 1384–1402. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2004.11.010>
  34. Lim J., Hong J., Chen W. W., Weerasooriya T. Mechanical response of pig skin under dynamic tensile loading // International Journal of Impact Engineering. 2011. Vol. 38, iss. 2–3. P. 130–135. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2010.09.003>
  35. Rackl M. Curve fitting for Ogden, Yeoh and polynomial models. ScilabTEC 2015, 7th International Scilab Users Conference. Paris, France, 21st and 22nd May 2015. 18 p.
  36. Calvo-Gallego J. L., Martinez-Reina J., Dominguez J. A polynomial hyperelastic model for the mixture of fat and glandular tissue in female breast // International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering. 2015. Vol. 31, iss. 9. Art. e02723. <https://doi.org/10.1002/cnm.2723>
  37. Lapeer R., Gasson P., Karri V. Simulating plastic surgery: From human skin tensile tests, through hyperelastic finite element models to real-time haptics // Progress in Biophysics and Molecular Biology. 2010. Vol. 103, iss. 2–3. P. 208–216. <https://doi.org/10.1016/j.pbiomolbio.2010.09.013>
  38. Veronda D., Westmann R. Mechanical characterizations of skin-finite deformations // Journal of Biomechanics. 1970. Vol. 3, iss. 1. P. 111–124. [https://doi.org/10.1016/0021-9290\(70\)90055-2](https://doi.org/10.1016/0021-9290(70)90055-2)

### References

1. Yamaguchi T. Study on the strength of human skin. *Journal of Kyoto Prefectural University of Medicine*, 1960, vol. 67, pp. 347–379.
2. Yamada H. *Strength of biological materials*. Baltimore, Krieger Publ., 1973. 297 p.
3. Jacquemoud C., Bruyere-Garnier K., Coret M. Methodology to determine failure characteristics of planar soft tissues using a dynamic tensile test. *Journal of Biomechanics*, 2007, vol. 40, iss. 2, pp. 468–475. <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2005.12.010>
4. Joodaki H., Panzer M. B. Skin mechanical properties and modeling: A review. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part H: Journal of Engineering in Medicine*, 2018, vol. 232, iss. 4, pp. 323–343. <https://doi.org/10.1177/0954411918759801>
5. Laurino C., Palmieri B., Coacci A. Efficacy, safety, and tolerance of a new injection technique for high- and low-molecular-weight hyaluronic acid hybrid complexes. *ePlasty*, 2015, vol. 15, pp. 427–437.
6. Lynch B., Pigeon H., Le Blay H., Brizion S., Bastien P., Bornschlöggl T., Domanov Y. A mechanistic view on the aging human skin through ex vivo layer-by-layer analysis of mechanics and microstructure of facial and mammary dermis. *Scientific Reports*, 2022, vol. 12, art. 849. <https://doi.org/10.1038/s41598-022-04767-1>
7. Fedorov A. E., Samartsev V. A., Kirillova T. A. On mechanical properties of human skin. *Russian Journal of Biomechanics*, 2006, vol. 10, iss. 2, pp. 29–42 (in Russian). EDN: JWTICT
8. Griffin M. F., Leung B. C., Premakumar Y., Szarko M., Butler P. E. Comparison of the mechanical properties of different skin sites for auricular and nasal reconstruction. *Journal of Otolaryngology – Head & Neck Surgery*, 2017, vol. 46, art. 33. <https://doi.org/10.1186/s40463-017-0210-6>
9. Wood J. M., Soldin M., Shaw T. J., Szarko M. The biomechanical and histological sequelae of common skin banking methods. *Journal of Biomechanics*, 2014, vol. 47, iss. 5, pp. 1215–1219. <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2013.12.034>
10. Annaidh A. N., Bruyère K., Destrade M., Gilchrist M. D., Otténio M. Characterizing the anisotropic mechanical properties of excised human skin. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 2012, vol. 5, iss. 1, pp. 139–148. <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2011.08.016>
11. Muslov S. A., Pertsov S. S., Arutyunov S. D. *Fiziko-mekhanicheskiye svoystva biologicheskikh tkaney* [Physical and mechanical properties of biological tissues]. Moscow, Practicheskaya Meditsina, 2023. 456 p. (in Russian). EDN: MNOSIQ
12. Manan N. F. A., Ramli M. H. M., Patar M. N. A. A., Holt C., Evans S., Chizari M. Determining hyperelastic parameters of human skin using 2D finite element modelling and simulation. *2012 IEEE Symposium on Humanities, Science and Engineering Research*. Kuala Lumpur, Malaysia, 2012, pp. 805–809. <https://doi.org/10.1109/shuser.2012.6268996>
13. Othman N. L. A., Isa K. M., Manssor N. A. S. Hyperelastic models of sheep skin under uniaxial tensile test. *Proceedings of Mechanical Engineering Research Day*, 2022, vol. 2022, pp. 242–243.
14. Gasson P., Lapeer R. Fitting hyperelastic material models to stress-strain data from an in-vitro experiment on human skin. *Proceedings of the International Conference on Polymers and Moulds*



- Innovations (PMI) 17–18 September 2009*. Ghent, Belgium, 2009, pp. 127–133.
15. Azzizati S., Mahmud J. Skin prestretch evaluation adapting Mooney – Rivlin model. *Journal of Medical and Bioengineering*, 2015, vol. 4, iss. 1, pp. 31–35. <https://doi.org/10.12720/jomb.4.1.31-35>
  16. Chanda A. Biomechanical modeling of human skin tissue surrogates. *Biomimetics*, 2018, vol. 3, iss. 3, art. 18. <https://doi.org/10.3390/biomimetics3030018>
  17. Groves R. B., Coulman S. A., Birchall J. C., Evans S. L. An anisotropic, hyperelastic model for skin: Experimental measurements, finite element modelling and identification of parameters for human and murine skin. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 2013, vol. 18, pp. 167–180. <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2012.10.021>
  18. Li W., Luo X. Y. An invariant-based damage model for human and animal skins. *Annals of Biomedical Engineering*, 2016, vol. 44, iss. 10, pp. 3109–3122. <https://doi.org/10.1007/s10439-016-1603-9>
  19. Flynn C., Taberner A. J., Nielsen P. M. F., Fels S. Simulating the three-dimensional deformation of in vivo facial skin. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 2013, vol. 28, pp. 484–494. <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2013.03.004>
  20. Flynn C., Taberner A., Nielsen P. Mechanical characterisation of in vivo human skin using a 3D forcesensitive micro-robot and finite element analysis. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, 2011, vol. 10, pp. 27–38. <https://doi.org/10.1007/s10237-010-0216-8>
  21. Lapeer R. J., Gasson P. D., Karri V. A. Hyperelastic finite-element model of human skin for interactive realtime surgical simulation. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 2011, vol. 58, iss. 4, pp. 1013–1022. <https://doi.org/10.1109/tbme.2009.2038364>
  22. Browell R., Lin G. The power of nonlinear materials capabilities. Part 1 of 2 on modeling materials with nonlinear characteristics // *ANSYS Solutions*, 2000, vol. 2, iss. 1. Available at: <https://studizba.com/show/1050594-1-ray-browell-the-power-of-nonlinear.html> (accessed September 05, 2023).
  23. Bruyaka V. A. (ed.). *Inzhenernyy analiz v Ansys Workbench* [Engineering analysis in Ansys Workbench]: tutorial. Part 1. Samara : Samara State Technical University Publ., 2010. 271 p. (in Russian). EDN: QMHFYZ
  24. Liu F., Li C., Liu S., Genin G. M., Huang G., Lu T. J., Xu F. Effect of viscoelasticity on skin pain sensation. *Theoretical and Applied Mechanics Letters*, 2015, vol. 5, iss. 6, pp. 222–226. <https://doi.org/10.1016/j.taml.2015.11.002>
  25. Fung Y. C. *Biomechanics: Mechanical properties of living tissues*. 2nd ed. New York, NY, Springer, 1993. 586 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2257-4>
  26. Lyamets L. L. Application of exponential polynomials for structural biomechanical analysis of the vascular wall. *Mathematical Morphology: Electronic Mathematical and Medical-Biological Journal*, 1997, vol. 2, iss. 1, pp. 71–82 (in Russian). EDN: ADBYXD
  27. Markenscoff X., Yannas I. On the stress-strain relation for skin. *Journal of Biomechanics*, 1979, vol. 12, pp. 127–129. [https://doi.org/10.1016/0021-9290\(79\)90151-9](https://doi.org/10.1016/0021-9290(79)90151-9)
  28. Shmurak M. I., Kuchumov A. G., Voronova N. O. Hyperelastic models analysis for description of soft human tissues behavior. *Master's Journal*, 2017, iss. 1, pp. 230–243 (in Russian). EDN: YUOPFB
  29. Melly S. K., Liu L., Liu Y., Leng J. A review on material models for isotropic hyperelasticity. *International Journal of Mechanical System Dynamics*, 2021, vol. 1, pp. 71–88. <https://doi.org/10.1002/msd2.12013>
  30. Kumar N., Rao V. Hyperelastic Mooney – Rivlin Model: Determination and physical interpretation of material constants. *MIT International Journal of Mechanical Engineering*, 2016, vol. 6, iss. 1, pp. 43–46.
  31. Ogden R. W. Large deformation isotropic elasticity – on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 1972, vol. 326, iss. 1567, pp. 565–584. <https://doi.org/10.1098/rspa.1972.0026>
  32. Shergold O. A., Fleck N. A. Mechanisms of deep penetration of soft solids, with application to the injection and wounding of skin. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 2004, vol. 460, iss. 2050, pp. 3037–3058. <https://doi.org/10.1098/rspa.2004.1315>
  33. Shergold O. A., Fleck N. A., Radford D. The uniaxial stress versus strain response of pig skin and silicone rubber at low and high strain rates. *International Journal of Impact Engineering*, 2006, vol. 32, iss. 9, pp. 1384–1402. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2004.11.010>



34. Lim J., Hong J., Chen W. W., Weerasooriya T. Mechanical response of pig skin under dynamic tensile loading. *International Journal of Impact Engineering*, 2011, vol. 38, iss. 2–3, pp. 130–135. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2010.09.003>
35. Rackl M. Curve fitting for Ogden, Yeoh and polynomial models. *ScilabTEC 2015, 7th International Scilab Users Conference*. Paris, France, 21st and 22nd May 2015. 18 p.
36. Calvo-Gallego J. L., Martinez-Reina J., Dominguez J. A polynomial hyperelastic model for the mixture of fat and glandular tissue in female breast. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 2015, vol. 31, iss. 9, art. e02723. <https://doi.org/10.1002/cnm.2723>
37. Lapeer R., Gasson P., Karri V. Simulating plastic surgery: From human skin tensile tests, through hyperelastic finite element models to real-time haptics. *Progress in Biophysics and Molecular Biology*, 2010, vol. 103, iss. 2–3, pp. 208–216. <https://doi.org/10.1016/j.pbiomolbio.2010.09.013>
38. Veronda D., Westmann R. Mechanical characterizations of skin-finite deformations. *Journal of Biomechanics*, 1970, vol. 3, iss. 1, pp. 111–124. [https://doi.org/10.1016/0021-9290\(70\)90055-2](https://doi.org/10.1016/0021-9290(70)90055-2)

Поступила в редакцию / Received 05.10.2023

Принята к публикации / Accepted 04.12.2023

Опубликована / Published 28.02.2025