Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 184–188
*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 2, pp. 184–188
https://mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-184-188, EDN: ETQAWZ

Научная статья
УДК 517.51

# Разрывный оператор Стеклова и аппроксимационные полиномиальные сплайны

**Г. В. Хромова**

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

**Хромова Галина Владимировна**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений и математической экономики, Khromovagv@sgu.ru, https://orcid.org/0009-0009-5390-4293, SPIN: 7390-7936, AuthorID: 7998

**Аннотация.** Для непрерывной функции, заданной на равномерной сетке отрезка [0,1], представлен метод построения аппроксимационных полиномиальных сплайнов. Метод не требует никакой дополнительной информации о функции и обеспечивает равномерную сходимость к ней. Эта сходимость имеет место и для приближенно заданной сеточной функции. В случае параболического сплайна приведены формулы, готовые для непосредственного использования.

**Ключевые слова:** оператор Стеклова, ломаная, непрерывная функция, равномерная сетка, равномерные приближения, сплайн

**Для цитирования:** *Хромова Г. В.* Разрывный оператор Стеклова и аппроксимационные полиномиальные сплайны // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 184–188. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-184-188, EDN: ETQAWZ
Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

# Discontinuous Steklov operator and approximate polynomial splines

**G. V. Khromova**

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

**Galina V. Khromova**, khromovagv@sgu.ru, https://orcid.org/0009-0009-5390-4293, SPIN: 7390-7936, AuthorID: 7998

**Abstract.** For a continuous function specified on a uniform grid of the segment [0,1], a method for constructing approximation polynomial splines is presented. This method does not require any additional information about the function and ensures uniform convergence. This convergence also occurs for an approximately given grid function. In the case of a parabolic spline, the article provides formulas ready for direct use.

**Keywords:** Steklov operator, broken line, continuous function, uniform mesh, uniform approximations, spline

**For citation:** Khromova G. V. Discontinuous Steklov operator and approximate polynomial splines. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 2, pp. 184–188 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-184-188, EDN: ETQAWZ
This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

© Хромова Г. В., 2025

## Введение

Сплайн-методы широко применяются в теории функций, вычислительной математике, при решении прикладных задач. В настоящее время хорошо разработана теория интерполяционных сплайнов [1]. Построение интерполяционных полиномиальных сплайнов требует дополнительной информации об интерполируемой функции, значительного объема вычислительных работ и специального выбора сетки. В то же время, как отмечается в [2, с. 164], «во многих практических задачах не всегда необходимо выполнение условий интерполяции, а определяющим является требование хорошей аппроксимации функции при минимальных вычислительных затратах». Сплайны с такими свойствами получили название аппроксимационных, или А-сплайнов. В данной работе будут построены А-сплайны, требующие от функции, заданной на сетке на отрезке, только свойства непрерывности.

## 1. Построение и свойства параболического сплайна

Пусть $f(x) \in C[0,1]$ задана набором ее значений:

$$\widehat{f} = f(x_i)_0^n, \quad f_i = f(x_i), \quad x_{i+1} = x_i + \frac{1}{n}.$$

Построим параболический сплайн, дающий равномерные приближения к $f(x)$ на $[0,1]$. Применим следующий метод: построим ломаную $L_n\widehat{f} : (L_n\widehat{f})(x_i) = f_i$, $i = 0,\dots,n$, а затем сгладим с помощью разрывного оператора Стеклова [3]:

$$S_\alpha L_n\widehat{f} = \begin{cases} S_{\alpha 2} L_n\widehat{f}, & x \in [0, \frac{1}{2}], \\ S_{\alpha 1} L_n\widehat{f}, & x \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \tag{1}$$

где

$$S_{\alpha 1}\ \varphi = \frac{1}{\alpha}\int_{x-\alpha}^{x} \varphi(t)dt, \quad S_{\alpha 2}\ \varphi = \frac{1}{\alpha}\int_{x}^{x+\alpha} \varphi(t)dt.$$

(Запись (1) означает: как именно определено значение $(S_\alpha L_n\widehat{f})(\frac{1}{2})$ — несущественно.)

Идея построения операторов с разрывной областью значений, в том числе разрывного оператора Стеклова с целью получения равномерных приближений к непрерывным функциям на отрезке, была выдвинута в 2006 г. А. П. Хромовым. С 2010 г. эти операторы стали использоваться автором при решении задач теории приближений и некорректных задач (см. обзор [3]).

Получим формулы для вычисления параболического сплайна.

**Теорема 1** ([4]). *Функция $S_\alpha L_n\widehat{f}$ при $\alpha = \frac{1}{n}$ представляет собой параболический сплайн, разрывный в точке $x = \frac{1}{2}$ и вычисляемый по формуле*

$$(S_\alpha L_n\widehat{f})(x) = \begin{cases} A_i^+ x^2 + B_i^+ x + C_i^+, & x \in [0, \frac{1}{2}], \\ A_i^- x^2 + B_i^- x + C_i^-, & x \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

*где $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,\dots,\frac{n}{2}-1$ при $n$ четном, $i = 0,\dots,\frac{n-1}{2}$ при $n$ нечетном для $x \in [0, \frac{1}{2}]$; $i = \frac{n}{2},\dots,n-1$ при $n$ четном, $i = \frac{n-1}{2},\dots,n-1$ при $n$ нечетном для $x \in [\frac{1}{2}, 1]$,*

$$\begin{aligned} A_i^+ &= \frac{n^2}{2}(f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i), \\ B_i^+ &= -n^2[f_{i+2}x_i - f_{i+1}(x_i + x_{i+1}) + f_i x_{i+1}], \\ C_i^+ &= \frac{n^2}{2}(f_{i+2}x_i^2 + f_i x_{i+1}^2) + (\frac{1}{2} - n^2 x_i x_{i+1})f_{i+1}. \end{aligned} \tag{2}$$

*Формулы для $A_i^-$, $B_i^-$, $C_i^-$ получаются из (2) заменой $f_{i+2}$ на $f_{i+1}$, $f_{i+1}$ на $f_i$, $f_i$ на $f_{i-1}$.*

*При этом*

$$(S_\alpha L_n \widehat{f})(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{2}(f_i + f_{i+1}), & x_i \in [0, \frac{1}{2}], \\ \frac{1}{2}(f_i + f_{i-1}), & x_i \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

**Доказательство.** Любая точка $x \in [0,1]$ попадает в один из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n-1$. При этом точка разрыва $x = \frac{1}{2}$ есть узел $\frac{n}{2}$ при $n$ четном, а при $n$ нечетном она является внутренней точкой отрезка $[x_{\frac{n-1}{2}}, x_{\frac{n+1}{2}}]$.

По формулам линейной интерполяции для $x \in [x_i, x_{i+1}]$ $\quad (L_n \widehat{f})(x) = a_i x + b_i$, где $a_i = n(f_{i+1} - f_i)$, $b_i = n(f_i x_{i+1} - f_{i+1} x_i)$.

Если $x \in [0, \frac{1}{2}]$, то

$$\frac{1}{\alpha} \int_x^{x+\alpha} (L_n \widehat{f})(t)\, dt = \frac{1}{\alpha} \int_x^{x_{i+1}} (a_i t + b_i)\, dt + \frac{1}{\alpha} \int_{x_{i+1}}^{x+\alpha} (a_{i+1} t + b_{i+1})\, dt.$$

Если $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, то

$$\frac{1}{\alpha} \int_{x-\alpha}^{x} (L_n \widehat{f})(t)\, dt = \frac{1}{\alpha} \int_{x-\alpha}^{x_i} (a_{i-1} t + b_{i-1})\, dt + \frac{1}{\alpha} \int_{x_i}^{x} (a_i t + b_i)\, dt.$$

Вычисляем интегралы, группируем слагаемые при $x^2$, $x$, $x^0$— получаем формулы для коэффициентов параболы на участке $[x_i, x_{i+1}]$. Полагая $x = x_i$, получаем значение $(S_\alpha L_n \widehat{f})(x_i)$.

Другой вид формул для $A_i^-$, $B_i^-$, $C_i^-$ приведен в [5]. □

**Теорема 2.** *Для любой $f(x) \in C[0,1]$ и $\alpha = \frac{1}{n}$ справедлива оценка*

$$\left\| S_\alpha L_n \widehat{f} - f \right\|_{L_\infty} \leqslant 2\omega(\frac{1}{n}),$$

*где* $\|\cdot\|_{L_\infty} = \max\left\{ \|\cdot\|_{C[0,1/2]}, \|\cdot\|_{C[1/2,1]} \right\}$, $\omega(\frac{1}{n})$ *— модуль непрерывности функции $f(x)$ на* $[0,1]$.

**Доказательство.** Утверждение теоремы вытекает из оценок

$$\left\| S_\alpha L_n \widehat{f} - f \right\|_{L_\infty} \leqslant \|S_\alpha\|_{C[0,1]\to L_\infty} \cdot \left\| L_n \widehat{f} - f \right\|_{C[0,1]} + \|S_\alpha f - f\|_{L_\infty},$$

$$\left\| L_n \widehat{f} - f \right\|_{C[0,1]} \leqslant \omega(\frac{1}{n}), \quad \|S_\alpha f - f\|_{L_\infty} \leqslant \omega(\alpha)$$

и того, что $\|S_\alpha\|_{C[0,1]\to L_\infty} = 1$. □

**Следствие.** *Для любой $f(x) \in C[0,1]$ и $\alpha = \frac{1}{n}$ выполняется сходимость*

$$\left\| S_\alpha L_n \widehat{f} - f \right\|_{L_\infty[0,1]} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

## 2. А-сплайны произвольной степени

Если вместо оператора $S_\alpha$ в (1) мы рассмотрим оператор $S_\alpha^{m-1}$, который получается заменой в правой части (1) операторов $S_{\alpha i}$, $i = 1, 2$, на $S_{\alpha i}^{m-1}$, то таким же способом получим полиномиальный сплайн степени $m$ $S_\alpha^{m-1} L_n \widehat{f}$.

**Теорема 3.** *Максимальная степень $m$ полиномиального сплайна $S_\alpha^{m-1} L_n \widehat{f}$ на отрезке $[0,1]$ при фиксированном $n$ есть $\frac{n}{2} + 1$ при $n$ четном и $\frac{n+1}{2}$ при $n$ нечетном.*

**Доказательство.** При построении сплайна степени $m$ мы применяем оператор $S_\alpha$ к сплайну степени $m-1$. Так, при построении кубического сплайна мы применяем $S_\alpha$ к параболическому и проводим вычисления по той же схеме, что и в теореме 1. При $x \in [0, \frac{1}{2}]$ коэффициенты сплайна выражаются через $f_{i+2}$,$f_{i+1}$, $f_i$ на $[x_i, x_{i+1}]$ и через $f_{i+3}$,$f_{i+2}$, $f_{i+1}$ на $[x_{i+1}, x_{i+2}]$.

Значит, коэффициенты кубического сплайна будут выражаться через значения $f(x)$ в четырех узлах: $f_{i+3}, f_{i+2}, f_{i+1}, f_i$, а на отрезке $[\frac{1}{2}, 1]$ — через $f_{i-2}, f_{i-1}, f_i, f_{i+1}$.

Рассуждая по индукции, получим, что коэффициенты сплайна степени $m$ выражаются через значения $f(x)$ в $m+1$ узле: в узлах $x_i, x_{i+1}$ и еще в $m-1$ узле справа от $x_{i+1}$ при $x \in [0, \frac{1}{2}]$ и слева от $x_i$ при $x \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Очевидно, значение $m-1$ не может превосходить числа узлов справа и слева от отрезков $[x_{\frac{n}{2}-1}, x_{\frac{n}{2}}]$ при $n$ четном и $[x_{\frac{n-1}{2}}, x_{\frac{n+1}{2}}]$ при $n$ нечетном.

Отсюда вытекает утверждение теоремы. □

**Замечание 1.** Для сплайна степени $m$ справедлива теорема 2 с заменой $S_\alpha$ на $S_\alpha^{m-1}$, $2\omega(\frac{1}{n})$ на $\omega(\frac{1}{n}) + \omega(\frac{m-1}{n})$ и следствие из нее — с заменой $S_\alpha$ на $S_\alpha^{m-1}$.

**Замечание 2.** Сплайны любой заданной степени $m$ можно построить, если мы распоряжаемся выбором $n$.

## 3. Устойчивость решений в задаче приближения непрерывных функций А-сплайнами

Пусть вместо $\widehat{f}$ нам известен набор $\widehat{f}_\delta$ : $\left\|\widehat{f}_\delta - \widehat{f}\right\|_{E_{n+1}} \leqslant \delta$, где $E_{n+1}$ — евклидово пространство с нормой

$$\left\|\widehat{f}\right\|_{E_{n+1}} = \left(\sum_0^n f_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

либо с нормой

$$\left\|\widehat{f}\right\|_{E_{n+1}} = \max_i |f_i|.$$

**Теорема 4.** *Для сплайна $m$-й степени при $\alpha = \frac{1}{n}$ и любой $f(x) \in C[0,1]$ справедлива оценка*

$$\left\|S_\alpha^{m-1} L_n \widehat{f}_\delta - f\right\|_{L_\infty} \leqslant \delta + \omega\left(\frac{1}{n}\right) + \omega\left(\frac{m-1}{n}\right).$$

**Доказательство.** Утверждение теоремы вытекает из оценки

$$\left\|S_\alpha^{m-1} L_n \widehat{f}_\delta - f\right\|_{L_\infty} \leqslant \left\|S_\alpha^{m-1}\right\|_{C[0,1]\to L_\infty} \|L_n\|_{E_{n+1}\to C[0,1]}\, \delta + \left\|S_\alpha^{m-1} L_n \widehat{f} - f\right\|_{L_\infty},$$

того, что $\left\|S_\alpha^{m-1}\right\|_{C[0,1]\to L_\infty} = 1$, $\|L_n\|_{E_{n+1}\to C[0,1]} = 1$, и теоремы 2 с заменой $S_\alpha$ на $S_\alpha^{m-1}$. □

Если в $E_{n+1}$ выбрана метрика иная, чем указанная выше, и такая, что $\|L_n\|_{E_{n+1}\to C[0,1]} = \varphi(n)$, где $\varphi(n) \to \infty$ при $n \to \infty$, то мы попадаем в зону действия некорректно поставленных задач. Тогда, применяя технику методов регуляризации [3], мы добиваемся этой сходимости за счет согласования $n$ с $\delta$: $n(\delta) \to \infty$ и $\varphi(n(\delta))\delta \to 0$ при $\delta \to 0$.

Частный случай $\varphi(n)$ рассмотрен в [6].

Данный метод дает возможность проводить нужную коррекцию построенного сплайна. Так, может оказаться, что в формулах, приведенных в теореме 1, $A_i^+ = 0$ ($A_i^- = 0$). Это будет случай, когда у ломаной $L_n\widehat{f}$ в точке $x_{i+1}$ ($x_i$) не будет излома. Такой сплайн можно назвать параболическим с вырождением. Вырождение можно устранить: значение $f_{i+1}$ ($f_i$) заменить на близкое $f_{i+1}+\delta$ ($f_i+\delta$). Это не повлияет на аппроксимативные свойства сплайна по теореме 4.

## Список литературы


1. *Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.* Сплайны в вычислительной математике. Москва : Наука, 1976. 248 с.
2. *Старков В. Н.* Конструктивные методы вычислительной физики в задачах интерпретации. Киев : Наукова думка, 2002. 262 с.
3. *Хромова Г. В.* Об операторах с разрывной областью значений и их применении // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2021. Т. 200. С. 58–64. https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-200-58-64, EDN: MJEHGK
4. *Хромова Г. В.* Разрывный оператор Стеклова и полиномиальные сплайны // Современные проблемы теории функций и их приложения. 2024. Вып. 22. С. 296–299. EDN: XXTNRH
5. *Хромова Г. В.* Об одном аналоге интерполяционных параболических сплайнов // Труды Математического центра им. Н. И. Лобачевского. 2023. Т. 66. С. 279–281.
6. *Советникова С. Ю.* О восстановлении функций, заданных на сетке // Современные проблемы теории функций и их приложения. 2024. Вып. 22. С. 252–255. EDN: DHPJAU


## References


1. Stechkin S. B., Subbotin Yu. N. *Splayny v vychislitel'noy matematike* [Splines in computational mathematics]. Moscow, Nauka, 1976. 248 p. (in Russian).
2. Starkov V. N. *Konstruktivnye metody vychislitel'noy fiziki v zadachakh interpretatsii* [Constructive methods of computational physics in interpretation problems]. Kiev, Naukova Dumka, 2002. 262 p. (in Russian).
3. Khromova G. V. Operators with discontinuous range and their applications. *Progress in Science and Technology. Contemporary Mathematics and its Applications. Thematic Surveys*, 2021, vol. 200, pp. 58–64 (in Russian). https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-200-58-64, EDN: MJEHGK
4. Khromova G. V. Discontinuous Steklov operator and polynomial splines. *Contemporary Problems of Function Theory and Their Applications*, 2024, iss. 22, pp. 296–299 (in Russian). EDN: XXTNRH
5. Khromova G. V. An analogue of interpolation parabolic splines. *Trudy Matematicheskogo tsentra im. N. I. Lobachevskogo* [Proceedings of the N. I. Lobachevsky Mathematical Center], 2023, vol. 66, pp. 279–281 (in Russian).
6. Sovetnikova S. Yu. On restoring functions defined on a grid. *Contemporary Problems of Function Theory and Their Applications*, 2024, iss. 22, pp. 252–255 (in Russian). EDN: DHPJAU


Поступила в редакцию / Received 06.05.2024
Принята к публикации / Accepted 11.12.2024
Опубликована онлайн / Published online 30.05.2025