



Научная статья

УДК 532.533

## Численное исследование коагуляции дисперсных включений при вдуве капельных фракций в поток запыленной среды

Д. А. Тукмаков

Федеральный исследовательский центр «Казанский научный центр Российской академии наук», Россия, 420111, г. Казань, ул. Лобачевского, д. 2/31

**Тукмаков Дмитрий Алексеевич**, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории механики сплошных сред, [tukmakovda@imm.knc.ru](mailto:tukmakovda@imm.knc.ru), ORCID: [0000-0002-0335-8548](https://orcid.org/0000-0002-0335-8548), SPIN: [3556-8576](https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=3556-8576), AuthorID: [739648](https://orcid.org/0000-0002-0335-8548)

**Аннотация.** В работе численно решается задача о коагуляции твердых частиц и капель при вдуве газокапельного потока в поток газовзвеси. Предполагалось, что в плоском канале движется запыленная среда, а через боковую поверхность канала происходит вдув газокапельной смеси. В результате коагуляции твердых частиц и капель происходит уменьшение средней плотности фракции твердых частиц и изменение фракционного состава капельной смеси. Расчеты выполнены на основе математической модели динамики полидисперсной многоскоростной и многотемпературной газовзвеси с лагранжевой моделью коагуляции частиц с относительным скоростным скольжением. Математическая модель реализовывала континуальную методику моделирования динамики многофазных сред, позволяющую учесть межфазное взаимодействие. Динамика несущей среды описывается системой уравнений Навье – Стокса для сжимаемого теплопроводного газа с межфазным теплообменом и обменом импульсом. Учитывались сила аэродинамического сопротивления, сила присоединенных масс и динамическая сила Архимеда. Дисперсная фаза состояла из ряда фракций, различающихся размером дисперсных включений и плотностью материала частиц. Гидро- и термодинамика каждой дисперсной фракции описывалась системой уравнений гидродинамического типа, включающей в себя уравнение неразрывности, уравнения сохранения составляющих импульса и уравнение сохранения тепловой энергии, записанные с учетом межфазного теплового и силового взаимодействия. Система уравнений динамики многоскоростной многотемпературной полидисперсной системы интегрировалась явным конечно-разностным методом Мак-Кормака. Монотонность решения обеспечивалась схемой нелинейной коррекции. В результате проведения расчетов получены временные и пространственные зависимости, характеризующие эволюцию состава многофракционной системы при смешении потоков различной дисперсности.

**Ключевые слова:** коагуляция, многофазная среда, полидисперсная газовзвесь, вязкий сжимаемый теплопроводный газ, численное моделирование

**Благодарности:** Работа выполнялась в рамках государственного задания Федерального исследовательского центра «Казанский научный центр Российской академии наук».

**Для цитирования:** Тукмаков Д. А. Численное исследование коагуляции дисперсных включений при вдуве капельных фракций в поток запыленной среды // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 3. С. 419–433. DOI: [10.18500/1816-9791-2025-25-3-419-433](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-419-433), EDN: [OVRYHI](https://elibrary.ru/OVRYHI)

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



## Numerical study of coagulation of dispersed inclusions during injection of droplet fractions into a flow of dusty medium

D. A. Tukmakov

Federal Research Center “Kazan Scientific Center of Russian Academy of Sciences”, 2/31 Lobachevskogo St., Kazan 420111, Russia

**Dmitry A. Tukmakov**, tukmakovda@imm.knc.ru, ORCID: [0000-0002-0335-8548](#), SPIN: [3556-8576](#), AuthorID: [739648](#)

**Abstract.** The paper presents a numerical solution to the problem of coagulation of solid particles and droplets during the injection of a gas-droplet flow into a gas suspension flow. It was assumed that a dusty medium moves in a flat channel, and a gas-droplet mixture is blown through the side surface of the channel. As a result of the coagulation of solid particles and droplets, the average density of the solid particle fraction decreases and the fractional composition of the droplet mixture changes. The calculations are based on a mathematical model of the dynamics of a polydisperse multi-velocity and multi-temperature gas suspension with a Lagrangian model of particle coagulation with relative velocity sliding. The mathematical model implemented a continuum technique for modeling the dynamics of multiphase media, which makes it possible to take into account the interphase interaction. The dynamics of the carrier medium is described by the Navier–Stokes equations for a compressible heat-conducting gas with interphase heat and momentum exchange. The aerodynamic drag force, the added mass force, and the dynamic Archimedes force were taken into account. The dispersed phase consisted of a number of fractions differing in the size of dispersed inclusions and the density of the particle material. The hydro- and thermodynamics of each dispersed fraction were described by a system of hydrodynamic equations, including the continuity equation, the equations for the conservation of momentum components, and the equation for the conservation of thermal energy, written taking into account the interphase thermal and force interaction. The system of equations for the dynamics of a multi-velocity multi-temperature polydisperse system was integrated by the explicit finite-difference McCormack method. The monotonicity of the solution was ensured by a nonlinear correction scheme. As a result of the calculations, time and space dependencies were obtained that characterize the evolution of the composition of a multi-fraction system when mixing flows of different dispersion.

**Keywords:** coagulation, multiphase medium, polydisperse gas suspension, viscous compressible heat-conducting gas, numerical modeling

**Acknowledgements:** This work was supported by the framework of the state assignment of the Federal Research Center “Kazan Scientific Center of Russian Academy of Sciences”.

**For citation:** Tukmakov D. A. Numerical study of coagulation of dispersed inclusions during injection of droplet fractions into a flow of dusty medium. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 3, pp. 419–433 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2025-25-3-419-433](#), EDN: [OVRYHI](#)

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

### Введение

Методы моделирования динамики неоднородных сред позволяют описать многие природные и технологические процессы [1–31]. Общая теория динамики многофазных и неоднородных сред представлена в монографии [1].

Проблемы высокоскоростного движения газожидкостных сред исследованы в [2]: изложены теоретические основы, расчетные методы и примеры решения прикладных задач.

В [3] представлены результаты исследований по кинетической теории коагуляции, разработаны аналитические методы решения уравнений коагуляции.



Теоретические и экспериментальные результаты, связанные с описанием течений газодисперсных сред в соплах с учетом взаимодействия частиц с газовым потоком, приведены в [4].

В [5] рассматриваются вопросы математического моделирования ударно-волновых процессов в многофазных средах, получены уравнения и определена структура ударной волны в газовых смесях и двухфазных средах.

Методология математического моделирования течений двух- и трехфазных неоднородных сред, состоящих из газа с твердыми и жидкими частицами при наличии их взаимодействия между собой, разрабатывалась в [6].

В [7] представлены математические модели и проведены численные расчеты без учета вязкости среды динамики запыленных, газокапельных и порошковых сред в одномерном приближении.

Математические модели, численные алгоритмы решения и результаты расчетов ударно-волновых и детонационных процессов в газовзвесях с металлическими частицами приведены в [8].

На данный момент актуальными являются также исследования динамики многофазных сред без учета механических превращений дисперсных включений [9, 10]. Так, в [9] получено аналитическое решение уравнений одномерной стационарной модели уединенной волны в газожидкостной смеси без учета диссипативных процессов, рассмотрено течение жидкости с газовыми пузырьками. В [10] изучаются особенности эволюции волн в жидкости, содержащей область с пузырьками газа. Задача рассматривается в двухмерной постановке, уравнения математической модели интегрируются численно. Представлены результаты исследований воздействия волнового импульса на твердую стенку, частично покрытую пузырковой завесой.

Методика математического моделирования процесса коагуляции взвешенных частиц, основанная на статистическом методе Монте-Карло, представлена и апробирована в [11].

В работе [12] приведены результаты исследования влияния гидродинамического взаимодействия частиц сферической формы на скорость их коагуляции.

На основе модели несжимаемой жидкости в [13] проведено численное моделирование динамики столкновения двух капель азота в низкотемпературной среде при различных числах Вебера, Рейнольдса и параметрах удара. Для сопоставления приводится описание столкновения двух водяных капель.

В статье [14] построена модель движения газодисперсной среды, сопровождающаяся процессами гомогенной нуклеации, коагуляции и фазовыми переходами. Считается, что процесс коагуляции кластеров происходит за счет их броуновского движения.

В [15] математически моделируется процесс коагуляции твердых дисперсных частиц с каплями орошаемой жидкости в аппаратах мокрого типа на основе труб Вентури под действием ультразвуковых колебаний высокой интенсивности. Показана возможность повышения эффективности улавливания высокодисперсных частиц в скруббере Вентури за счет введения ультразвуковых колебаний и определены оптимальные режимы (частота, уровень звукового давления), включая направление и зону воздействия.

Математическое моделирование коагуляции капель конечного числа фракций полидисперсной смеси, впрыскиваемых форсункой в область аэрохолодильной установки вдоль направления движения потока воздуха, выполнено в [16]. Доказывается незначительность влияния тепломассобмена между веществом капель и окружающим воздухом на изменение их размеров за время движения от форсунки до рабочей части установки.

Работа [17] посвящена исследованию процессов столкновения и коагуляции дисперсных частиц. Разработана математическая модель ядер столкновения и коагуляции частиц сферической формы в турбулентном потоке. Моделируется коагуляция капель, взвешенных в атмосфере.

В статье [18] разработана математическая модель ядра коагуляции при наличии турбу-



лентного, броуновского, градиентного и гравитационного механизмов столкновений, также учитывался эффект кластеризации частиц под действием турбулентности.

В исследовании [19] оценивается относительная погрешность экспериментов по субмикронной аэрозольной коагуляции и гравитационному осаждению, а также результаты прогнозирования модели применительно к водянистому пару. На основе экспериментальных данных в этой статье к исходной модели добавлены поправочные коэффициенты для интенсивности процессов коалесценции и седиментации.

Изучению скорости коагуляции сферических частиц, взвешенных в газовой среде, посвящена работа [20]. Исследовано влияние электростатических сил на скорость коагуляции проводящих сфер, взаимодействующих друг с другом. При очистке запыленных сред от твердых дисперсных включений применяются технологии, основанные на поглощении твердых частиц жидкими каплями с последующим разделением фаз.

Для описания физических процессов в такого рода технологиях, для конструирования «мокрых» скрубберов — устройств, их реализующих, а также для выбора рабочих режимов разрабатываются численные модели течения газодисперсных сред [21–23]. В работе [21] рассмотрены задачи математического моделирования и расчета тепловой эффективности таких устройств, описаны конструктивные характеристики насадочных скрубберов конденсационного охлаждения газа водой в пленочном противоточном режиме. В [22] приведены результаты исследования движения вращающихся капель жидкости и предложена технология гидровихревого пылеулавливания. В [23] разработана общая математическая модель эволюции состояния трехфазной полидисперсной среды применительно к процессу очистки газов от твердых частиц в скруббере на основе сопла Бентури.

В устройствах жидкостного пылеулавливания, происходящего при температурах, меньших температуры фазового равновесия рабочей жидкости, основным физическим процессом является процесс коагуляции твердой частицы с каплей и капель различного размера. Технология очистки газа от твердых частиц с использованием «мокрых» скрубберов включает в себя процесс коагуляции водяных капель и твердых частиц с последующим разделением газовой и дисперсной фазы, состоящей из капель с твердыми частицами. Разделение фаз происходит в центробежных сепараторах или в инерционных классификаторах, эффективность работы которых зависит от массы частиц, образующихся в процессе коагуляции. Поскольку при распылении жидкости образуется полидисперсная система капель, то требуется оценка дисперсности системы с учетом коагуляции капель и твердых частиц, а также коагуляции капель различных размеров, движущихся в потоке с разным скоростным скольжением.

В данной работе представлена математическая модель и приведены результаты расчетов динамики и дисперсности смеси при взаимодействии полидисперсного газожидкостного потока и потока газовзвеси, содержащей твердые частицы. Целью работы было исследование процесса коагуляции пылевой фракции и капельных фракций при несоосном начальном направлении потоков. Рассмотрена пространственная и временная эволюция распределения средних плотностей фракций на основе численного решения системы уравнений динамики полидисперсной газовзвеси [7], дополненной моделью столкновительной коагуляции дисперсных включений [24].

## Математическая модель

Движение несущей среды описывается системой уравнений Навье–Стокса с учетом межфазного силового взаимодействия и теплообмена [7, 25–31]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p - \tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv - \tau_{xy}) = - \sum_{i=1}^n F_{xi} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u v - \tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2 + p - \tau_{yy}) = - \sum_{i=1}^n F_{yi} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( [e + p - \tau_{xx}]u - \tau_{xy}v - \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( [e + p - \tau_{yy}]v - \tau_{yx}u - \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \\ = - \sum_{i=1}^n Q_i - \sum_{i=1}^n (|F_{xi}|u_i + |F_{yi}|v_i) + \sum_{i=1}^n \alpha_i \left( \frac{\partial(pu)}{\partial x} + \frac{\partial(pv)}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Замыкают уравнения (1)–(4) следующие соотношения:

$$p = (\gamma - 1)(e - \rho(u^2 + v^2)/2), \quad e = \rho(I + (u^2 + v^2)/2), \quad (5)$$

$$\tau_{xx} = \mu \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} D \right), \quad \tau_{yy} = \mu \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} D \right), \quad (6)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad D = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (7)$$

В уравнениях применяются следующие обозначения:  $\rho$  — плотность газа;  $u, v$  — составляющие вектора скорости газа  $V = (u, v)$ ;  $\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{yy}$  — составляющие тензора вязких напряжений несущей среды;  $p$  — давление газа;  $e$  — полная энергия несущей среды;  $\lambda, \gamma, \mu$  — коэффициенты теплопроводности, динамической вязкости и постоянная адиабаты для несущей среды;  $I = RT/(\gamma - 1)$  — тепловая энергия несущей среды, где  $R$  — газовая постоянная,  $T$  — температура несущей среды [7, 32].

Динамика каждой фракции дисперсной фазы описывается уравнением сохранения средней плотности фракции, уравнениями сохранения составляющих импульса и уравнением сохранения тепловой энергии [26]:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_i u_i)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_i v_i)}{\partial y} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial(\rho_i u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_i u_i^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_i u_i v_i) = F_{xi} - \alpha_i \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial(\rho_i v_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_i u_i v_i) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_i v_i^2) = F_{yi} - \alpha_i \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial e_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(e_i u_i) + \frac{\partial}{\partial y}(e_i v_i) = Q_i. \quad (11)$$

Индекс  $i$  относится к физическим величинам  $i$ -й фракции дисперсной фазы. Переменные без индекса описывают изменение физических параметров несущей среды.

Для дисперсной фазы используются обозначения:  $\alpha_i$  — объемное содержание  $i$ -й фракции дисперсной фазы;  $\rho_i = \alpha_i \rho_{i0}$  — средняя плотность  $i$ -й фракции дисперсной фазы;  $\rho_{i0}$  — физическая плотность материала  $i$ -й фракции;  $u_i, v_i$  — составляющие вектора скорости  $i$ -й фракции дисперсной фазы  $V_i = (u_i, v_i)$ ;  $e_i$  и  $T_i$  — тепловая энергия и температура  $i$ -й фракции дисперсной фазы;  $e_i = \rho_i C_{pi} T_i$ , где  $C_{pi}$  — удельная теплоемкость вещества  $i$ -й фракции дисперсной фазы.

Сила межфазного взаимодействия включает в себя [1] силу аэродинамического сопротивления  $F_{xid}, F_{yid}$ :

$$F_{xid} = \frac{3\alpha_i}{4d_i} C_{di} \rho \sqrt{(u - u_i)^2 + (v - v_i)^2} (u - u_i),$$

$$F_{yid} = \frac{3\alpha_i}{4d_i} C_{di} \rho \sqrt{(u_1 - u_i)^2 + (v_1 - v_i)^2} (v - v_i),$$

динамическую силу Архимеда  $F_{xiA}, F_{yiA}$ :

$$F_{xiA} = \alpha_i \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad F_{yiA} = \alpha_i \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$



и силу присоединенных масс  $F_{xim}$ ,  $F_{yim}$ :

$$\begin{aligned} F_{xim} &= 0.5\alpha_i\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u_i}{\partial t} - u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} - v_i \frac{\partial u_i}{\partial y} \right), \\ F_{yim} &= 0.5\alpha_i\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v_i}{\partial t} - u_i \frac{\partial v_i}{\partial x} - v_i \frac{\partial v_i}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Тепловой поток между несущей средой и  $i$ -й фракцией описывается следующим образом [7]:

$$Q_i = 6\alpha_i\lambda Nu_i(T - T_i)/d_i^2, \quad i = 1, \dots, n.$$

Здесь  $d_i$  — диаметр частицы  $i$ -й фракции,  $Nu_i$  — относительное число Нуссельта:

$$Nu_i = 2 \exp(-M_i) + 0.459 Re_i^{0.55} Pr^{0.33},$$

где  $M_i$  — относительное число Маха:

$$M_i = |\mathbf{V} - \mathbf{V}_i|,$$

$Pr$  — число Прандтля:

$$Pr = c_p\mu(\lambda)^{-1}.$$

Здесь  $c_p$  — теплоемкость газа.

Все частицы предполагаются сферической формы. Коэффициент сопротивления частицы  $i$ -й фракции  $C_{di}$  определяется формулой [7]

$$C_{di} = C_{di}^0 \phi(M_i) \varphi(\alpha_i),$$

где  $C_{di}^0 = \frac{24}{Re_i} + \frac{4}{Re_i^{0.5}} + 0.4$ ,  $\phi(M_i) = 1 + \exp\left(-\frac{0.427}{M_i^{0.63}}\right)$ ,  $\varphi(\alpha_i) = (1 - \alpha_i)^{-2.5}$ ,  $Re_i$  — относительное число Рейнольдса:

$$Re_i = d_i \rho |\mathbf{V} - \mathbf{V}_i| / \mu.$$

При определении коэффициента сопротивления  $C_{di}$  функция  $\varphi(\alpha_i)$  учитывает множественность частиц [4]. Аппроксимации для коэффициента сопротивления и числа Нуссельта справедливы для относительных чисел Маха и Рейнольдса [7]:

$$0 < M_i \leq 2, \quad 0 < Re_i \leq 2 \cdot 10^5.$$

Для описания процесса коагуляции частиц использовалась лагранжева модель коагуляции частиц с относительным скоростным скольжением [24, 25]. Масса  $m_i$  частицы  $i$ -й фракции ( $i = 1, \dots, n$ ) возрастает за счет поглощения менее крупных частиц  $j$ -х фракций с массой  $m_j$  [24] ( $j = 1, \dots, i-1$ ):

$$\frac{dm_i}{dt} = \sum_{j=1}^{i-1} k_{ij} n_j m_j.$$

Здесь  $k_{ij}$  — константа коагуляции:

$$k_{ij} = 0.25\pi(d_i + d_j)^2 \left[ u_i \cos(\theta_j) + v_i \sin(\theta_j) - \sqrt{u_j^2 + v_j^2} \right],$$

где  $\theta_j = \arctg(u_j/v_j)$ .

Полученное значение массы частиц  $i$ -й фракции в данном узле конечно-разностной сетки определяет новое значение диаметра частицы  $i$ -й фракции —  $d_i$ .

Уменьшение концентрации мелких частиц  $i$ -х фракций вследствие поглощения их частицами  $j$ -х ( $j = i + 1, i + 2, \dots, n$ ) фракций, чьи дисперсные включения имеют больший размер, описывается уравнениями

$$\frac{dn_i}{dt} = -n_i \sum_{j=i+1}^n k_{ij} n_j m_j, \quad \alpha_i = \frac{\pi d_i^3 n_i}{6}.$$

Новое значение объемного содержания  $i$ -й фракции, изменившееся вследствие коагуляции, есть  $\alpha_i$ . Объемное содержание и физическая плотность вещества фракции определяют среднюю плотность фракции, изменившуюся вследствие коагуляции  $\rho_i = \alpha_i \rho_{i0}$ . В начале каждого временного цикла вычислений определялась концентрация частиц  $i$ -й фракции через ее среднюю плотность и диаметр частиц. Слияние мелких капель с более крупными приводит к изменению скорости капель укрупнившейся фракции [24, 25]:

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{i-1} (u_j - u_i) k_{ij} n_j m_j, \quad \frac{dv_i}{dt} = \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{i-1} (v_j - v_i) k_{ij} n_j m_j.$$

Температура частицы  $i$ -й фракции после коагуляции с частицами фракций, чьи частицы имеют меньший размер, находилась из соотношения

$$T_{i*} = \frac{1}{C_{i*} m_{i*}} \left( \sum_{j=1}^{i-1} k_{ij} n_j m_j C_j T_j + C_i m_i T_i \right),$$

где  $T_{i*}$ ,  $C_{i*}$ ,  $m_{i*}$  — температура, удельная массовая теплоемкость и масса частицы  $i$ -й фракции после коагуляции;  $T_i$ ,  $C_i$ ,  $m_i$  — те же параметры до коагуляции. Зная новую температуру и среднюю плотность, находим тепловую энергию фракции, измененную при коагуляции. Связанные с коагуляцией изменения средней плотности, скорости и температуры фракций дисперсной фазы учитывались на каждом временном шаге основного алгоритма.

Система уравнений (1)–(8) интегрировалась явным конечно-разностным методом Мак-Кормака второго порядка точности [32]. Для обеспечения монотонности решения применялась схема нелинейной коррекции (10), (11) [26, 33]. С целью увеличения устойчивости численного решения применялась схема фильтрации конечно-разностного решения [34].

На твердых поверхностях для составляющих скорости задавались однородные граничные условия Дирихле, для остальных динамических функций задавались однородные граничные условия Неймана. На входе в канал задавалась продольная скорость пылевой фракции и газа, концентрация пылевой фракции. На выходе из канала задавались однородные условия Неймана для всех функций. В области вспышки капельных фракций задаются следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} y &= 0, \quad x \leq L_1, \quad \rho_k(t, i, 1) = \alpha_{k0} \rho_{k0}, \\ u(t, i, 1) &= u(t, i, 2), \quad u_1(t, i, 1) = u_1(t, i, 2), \quad u_k(t, i, 1) = u_k(t, i, 2), \\ v(t, i, 1) &= v_0, \quad v_1(t, i, 1) = v_1(t, i, 2), \quad v_k(t, i, 1) = v_0, \quad k = 2, \dots, 5. \end{aligned}$$

Здесь  $i$ ,  $j$  — нумерация узлов в  $x$  и  $y$  направлениях соответственно. Расчеты проводились на равномерной сетке  $\Delta x_i = i \cdot L / (N_x - 1)$ ,  $\Delta y_j = j \cdot h / (N_y - 1)$ , где  $N_x$ ,  $N_y$  — количество узлов.

## Результаты расчетов

На рис. 1 представлена схема моделируемого неоднородного потока в плоском канале. Предполагается, что в начальный момент времени во всей расчетной области газовзвесь, состоящая из пылевой фракции и газа, движется в продольном направлении со скоростью  $u_0$ ,

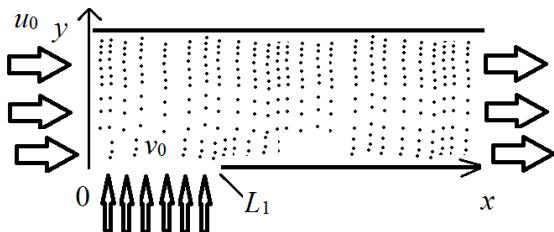


Рис. 1. Общая схема моделируемого процесса  
Fig. 1. General diagram of the simulated process

Приведенные ниже результаты расчетов получены при следующих геометрических параметрах канала и физических характеристиках неоднородных потоков: длина канала составляла  $L = 0.4$  м, высота канала  $h = 0.1$  м, ширина области бокового вдува капельных фракций  $L_1 = 0.1$  м.

Начальная температура газа и фракций дисперсной фазы:  $T_0 = T_{i0} = 293$  К,  $i = 1, \dots, 5$ . Начальная плотность несущей среды —  $\rho_0 = 1.29$  кг/м<sup>3</sup>. В расчетах задавались следующие параметры несущей фазы газовзвеси:  $M = 29 \cdot 10^{-3}$  кг/моль — молярная масса воздуха, теплопроводность несущей среды предполагалась равной  $\lambda = 0.02553$  Вт/(м·К), динамическая вязкость несущей среды —  $\mu = 1.72 \cdot 10^{-5}$  Па·с.,  $\gamma = 1.4$ ,  $R = 8.31$  Дж/(моль·К).

Физические плотности вещества пылевой и капельных фракций —  $\rho_{10} = 2500$  кг/м<sup>3</sup> и  $\rho_{i0} = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $i = 2, \dots, 5$  соответственно. Газовзвесь твердых частиц монодисперсна и состоит из сферических частиц диаметром  $d_1 = 2$  мкм. Диаметры капель жидких фракций  $d_2 = 4$  мкм,  $d_3 = 8$  мкм,  $d_4 = 20$  мкм,  $d_5 = 40$  мкм. Скорости потоков на входе в канал составляют  $u_0 = 20$  м/с,  $v_0 = 4$  м/с.

На твердых поверхностях для всех составляющих скоростей газовой фазы задавались однородные граничные условия Дирихле. Начальное объемное содержание и объемное содержание на входе в канал пылевой фракции  $\alpha_{10} = 4 \cdot 10^{-5}$ , ее начальная средняя плотность и средняя плотность на входе в канал составляет  $\rho_1 = 0.1$  кг/м<sup>3</sup>. У всех четырех капельных фракций на границе бокового вдува задавалось постоянное объемное содержание, составлявшее  $\alpha_{i0} = \alpha_{l0} = 2.5 \cdot 10^{-5}$ . При этом средняя плотность капель составляла  $\rho_i = 0.025$  кг/м<sup>3</sup>,  $i = 2, \dots, 5$ .

Приведенные ниже результаты расчетов получены на равномерной конечно-разностной сетке, включающей в себя  $N_x = 200$  узлов в продольном и  $N_y = 100$  узлов в поперечном направлении.

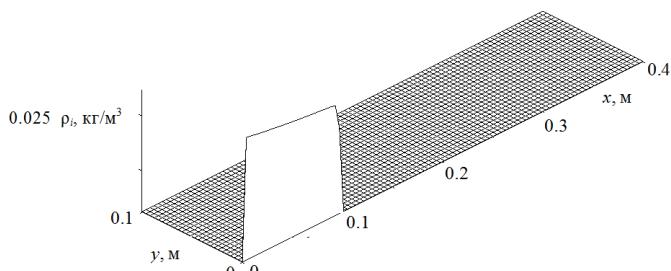


Рис. 2. Пространственное распределение средней плотности капельных фракций  $\rho_i$  ( $i = 2, \dots, 5$ ) в начальный момент времени  $t$

Fig. 2. Spatial distribution of the average density of droplet fractions  $\rho_i$  ( $i = 2, \dots, 5$ ) at the initial time  $t$

направление, и газокапельного потока, направленного поперечно оси. На выходе канала формируется параболическое распределение скорости, характерное для ламинарного режима течения.

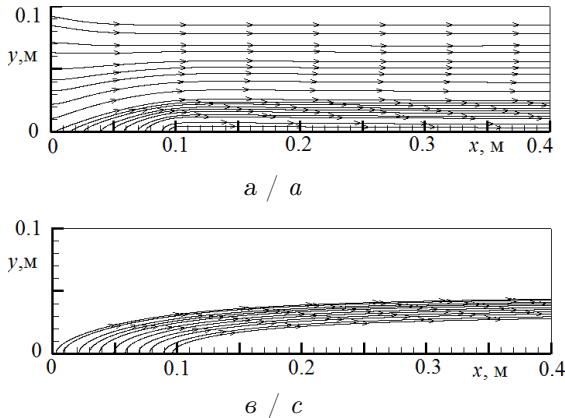
совпадающей со скоростью потока газовзвеси на левой границе канала при  $x = 0$ ,  $0 < y < h$ , где  $h$  — высота канала. На участке нижней границы канала при  $y = 0$ ,  $0 < x < L_1$  осуществляется вдув газокапельной смеси, состоящей из четырех капельных фракций, отличающихся радиусом капель. Газокапельный поток движется со скоростью  $v_0$  под углом  $\beta = \pi/2$  к оси канала.

На рис. 2 приведено начальное пространственное распределение средней плотности капельных фракций: пренебрежимо малое фоновое значение в расчетной области и заданное значение на боковой границе канала.

Пространственное распределение величины скорости газа в момент времени  $t = 0.03$  с показано на рис. 3. Наибольшая величина скорости достигается после слияния потока газовзвеси, имеющего продольное

На рис. 4 представлены линии тока фаз газовзвеси: несущей среды (рис. 4, а), пылевой фракции (рис. 4, б) и фракции наиболее крупных капель с начальным диаметром  $d_5 = 40 \text{ мкм}$  (рис. 4, в). Сопоставление конфигурации потока газовзвеси, состоящей из твердых частиц (см. рис. 4, б), и области течения капельной фракции позволяет определить расположение области перемешивания, где происходит интенсивная коагуляция этих фракций.

С течением времени в потоке вследствие коагуляции с капельными фракциями уменьшается средняя плотность мелкодисперсной газовзвеси.



На рис. 5 приведены распределения средней плотности газовзвеси вдоль оси и в поперечном сечении канала в различные моменты времени.

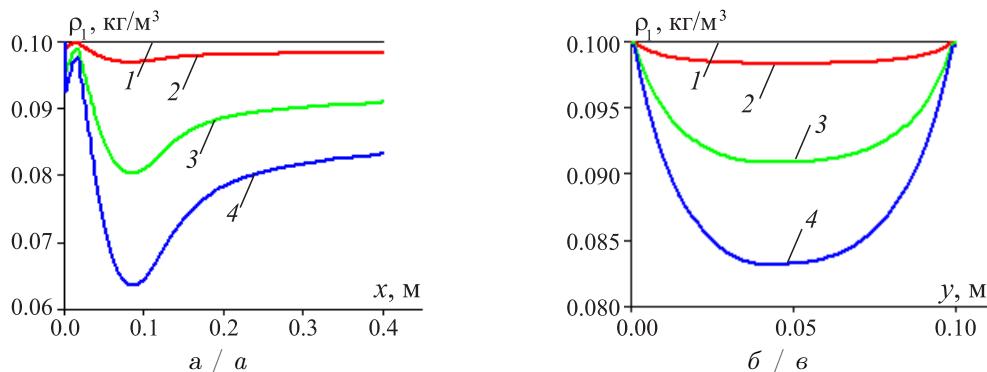


Рис. 5. Пространственное распределение в различные моменты времени  $t$  средней плотности пылевой фракции: а — вдоль продольной оси  $x$ ,  $y = h/2$ ; б — вдоль поперечной оси  $y$ ,  $x = L$ ; 1 —  $t = 0 \text{ мс}$ ; 2 —  $t = 30 \text{ мс}$ ; 3 —  $t = 60 \text{ мс}$ ; 4 —  $t = 90 \text{ мс}$  (цвет онлайн)

Fig. 5. Spatial distribution at different moments of time  $t$  of the average density of the dust fraction: а is along the longitudinal axis  $x$ ,  $y = h/2$ ; б is along the transverse axis  $y$ ,  $x = L$ ; 1 is for  $t = 0 \text{ ms}$ ; 2 is for  $t = 30 \text{ ms}$ ; 3 is for  $t = 60 \text{ ms}$ ; 4 is for  $t = 90 \text{ ms}$  (color online)

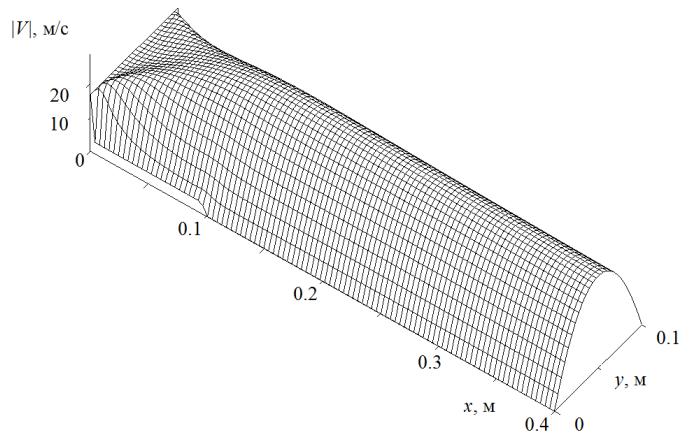


Рис. 3. Пространственное распределение модуля скорости несущей среды, момент времени  $t = 0.03 \text{ с}$   
Fig. 3. Spatial distribution of the velocity modulus of the carrier medium, time point  $t = 0.03 \text{ sec}$

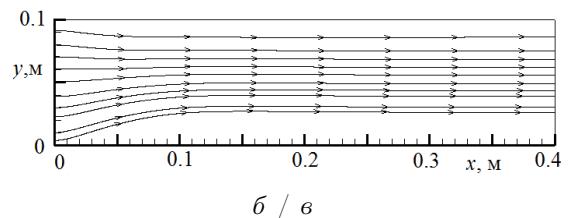


Рис. 4. Линии тока: а — несущая среда; б — пылевая фракция  $d_1 = 2 \text{ мкм}$ ; в — капельная фракция  $d_5 = 40 \text{ мкм}$

Fig. 4. Streamlines: а is the carrier medium; б is the dust fraction  $d_1 = 2 \mu\text{m}$ ; в is the droplet fraction  $d_5 = 40 \mu\text{m}$



Область, в которой этот процесс протекает наиболее быстро, лежит вблизи правой границы зоны бокового вдува (рис. 5, а). Можно отметить, что скорость уменьшения средней плотности газовзвеси вблизи оси канала при  $0.03 < t < 0.09$  с составляет  $0.26 \text{ кг}/\text{м}^3\text{с}$  вблизи выходного сечения и  $0.56 \text{ кг}/\text{м}^3\text{с}$  вблизи правой границы зоны бокового вдува.

На рис. 5, б представлено пространственное распределение средней плотности пылевой фракции в поперечном сечении канала при  $x = L$  в различные моменты времени. На рассматриваемом временном интервале скорость уменьшения средней плотности газовзвеси вследствие коагуляции постоянна, достигается в приосевой области и составляет  $0.26 \text{ кг}/\text{м}^3\text{с}$ . В выходном сечении канала сохраняется асимметрия поперечного распределения средней плотности, связанная с несимметрией условия вдува капельных фракций.

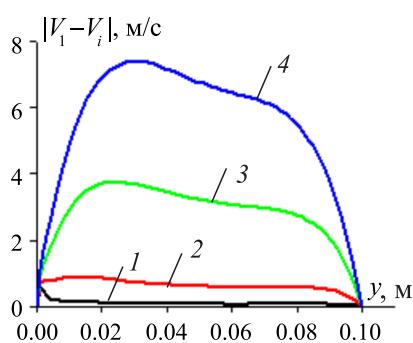


Рис. 6. Поперечное распределение модуля разности скоростей пылевой и капельных фракций  $x = L/4$ : 1 —  $d_2 = 4 \text{ мкм}$ ; 2 —  $d_3 = 8 \text{ мкм}$ ; 3 —  $d_4 = 20 \text{ мкм}$ ; 4 —  $d_5 = 40 \text{ мкм}$  (цвет онлайн)

Fig. 6. Transverse distribution of the modulus of the difference in velocities of dust and droplet fractions  $x = L/4$ : 1 is for  $d_2 = 4 \mu\text{m}$ ; 2 is for  $d_3 = 8 \mu\text{m}$ ; 3 is for  $d_4 = 20 \mu\text{m}$ ; 4 is for  $d_5 = 40 \mu\text{m}$  (color online)

которые являются для нее донорами. К моменту времени  $t = 0.06$  с становится существенной роль фракции  $d_4$  как донорской фракции для  $d_5$  — на рис. 7, б наибольшие средние плотности фракций  $d_4$  и  $d_5$  становятся близки. К моменту времени  $t = 0.09$  с вблизи области вдува  $\rho_5 > \rho_4$ .

На рис. 8 показано изменение средних плотностей фракций в точке  $x = L/4, y = h/2$  во времени. Средняя плотность газовзвеси с течением времени снижается за счет поглощения ее капельными фракциями. При одинаковом начальном объемном содержании количество частиц определяется их размером. Так как дисперсных включений 4-й фракции больше, чем дисперсных включений 5-й фракции, то частицы 4-й фракции чаще сталкиваются с более мелкими частицами и, соответственно, поглощают большее количество материала фракций с меньшим размером частиц. Но так как частицы 5-й фракции поглощают все частицы, включая частицы 4-й фракции, после того как исчерпываются донорские частицы менее крупных фракций, то в последующие моменты времени объемное содержание самой крупной фракции дисперсной фазы становится наибольшим.

При этом на временном интервале  $0.02 < t < 0.14$  с уменьшению средней плотности газовзвеси на  $0.06 \text{ кг}/\text{м}^3$  соответствует суммарное увеличение средней плотности капельных фракций также на  $0.06 \text{ кг}/\text{м}^3$ , что говорит о сохранении баланса массы мелкодисперсной фракции, переходящей от газовзвеси к капельным фракциям, поглощающим твердые частицы газовзвеси в процессе коагуляции.

На рис. 6 представлено распределение величины скоростного скольжения мелкодисперсной фракции частиц относительно капельных фракций. Величина разности скоростей коагулирующих фракций оказывает влияние на интенсивность процесса коагуляции [24, 25] и зависит от размера капель (рис. 6). Наибольшее скоростное скольжение относительно газовзвеси — у самой крупной фракции. Характер асимметрии скольжения соответствует характеру распределения средней плотности пылевой фракции в поперечном к оси канала направлению: в области с большей величиной скольжения (рис. 6) быстрее снижается средняя плотность пылевой фракции (рис. 5, б).

На рис. 7, а–в приведены продольные распределения средних плотностей капельных фракций на оси канала в различные моменты времени. В области бокового вдува относительное скоростное скольжение капельных фракций достигает наибольших значений, что приводит к наибольшей скорости коагуляции и изменению средней плотности фракций. К моменту времени  $t = 0.03$  с (рис. 7, а) наибольшая средняя плотность — у фракции  $d_4$ . Она достигается за счет поглощения этой фракцией газовзвеси и меньших капельных фракций,

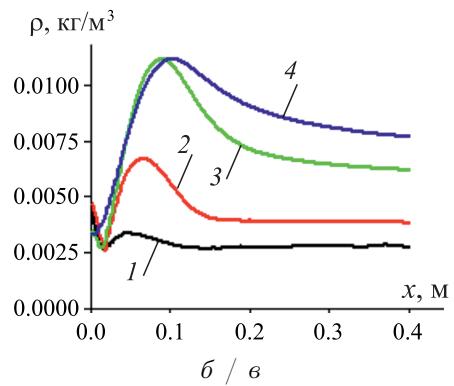
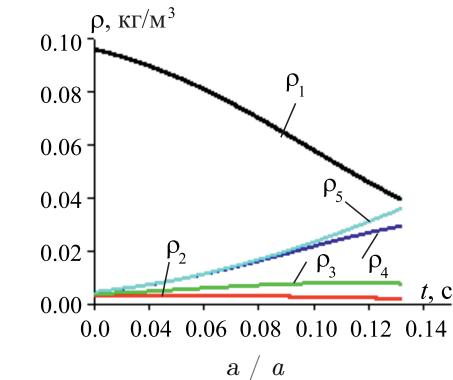
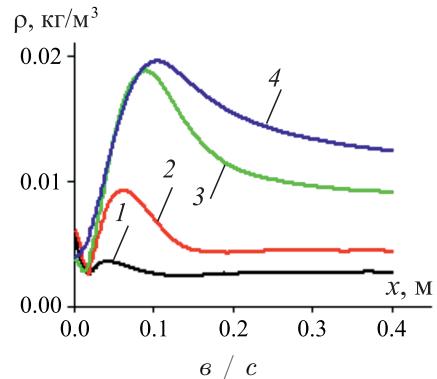
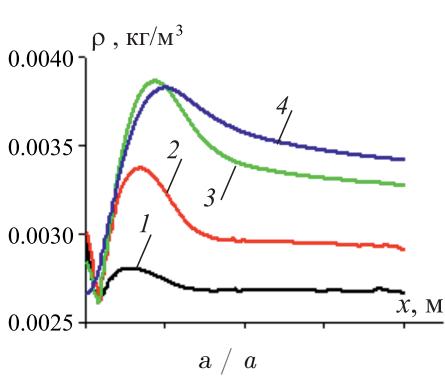


Рис. 7. Пространственное распределение средних плотностей капельных фракций вдоль продольной координаты  $x$ ,  $y = h/2$  в момент времени  $t$ :  $a - t = 0.03$  с;  $b - t = 0.06$  с;  $c - t = 0.09$  с;  $1 - d_2 = 4$  мкм;  $2 - d_3 = 8$  мкм;  $3 - d_4 = 20$  мкм;  $4 - d_5 = 40$  мкм (цвет онлайн)

Fig. 7. Spatial distribution of average densities of droplet fractions along the longitudinal coordinate  $x$ ,  $y = h/2$  at time moment  $t$ :  $a$  is for  $t = 0.03$  sec;  $b$  is for  $t = 0.06$  sec;  $c$  is for  $t = 0.09$  sec; 1 is for  $d_2 = 4 \mu m$ ; 2 is for  $d_3 = 8 \mu m$ ; 3 is for  $d_4 = 20 \mu m$ ; 4 is for  $d_5 = 40 \mu m$  (color online)

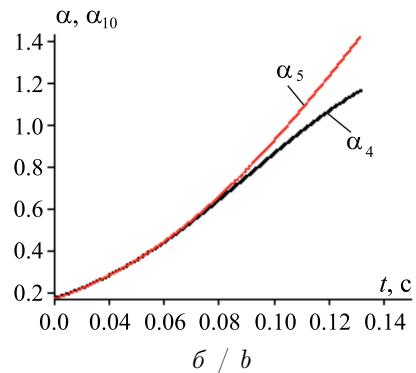


Рис. 8. Временная зависимость в точке  $x = L/4$ ,  $y = h/2$ :  $a$  — средних плотностей фракций дисперсной фазы;  $b$  — объемных содержаний капельных фракций  $d_4 = 20$  мкм,  $d_5 = 40$  мкм (цвет онлайн)

Fig. 8. Time dependence at point  $x = L/4$ ,  $y = h/2$ :  $a$  is for the time dependence of the average densities of dispersed phase fractions;  $b$  is for the time dependence of the volumetric contents of droplet fractions  $d_4 = 20 \mu m$ ,  $d_5 = 40 \mu m$  (color online)

На рис. 8,  $b$  показана эволюция объемных содержаний фракций  $d_4$  и  $d_5$ . К моменту времени  $t \approx 0.08$  с средняя плотность фракции капель  $d_5$  начинает расти быстрее, чем средняя плотность фракции  $d_4$ , что говорит о возрастании роли фракции  $d_4$  как донора для  $d_5$ .

Рассмотренный режим течения можно охарактеризовать рядом критериев. Оценка наибольшего относительного числа Рейнольдса для самой крупной фракции в близком к стационарному режиму течения вблизи оси канала  $Re_5 = d_5 \rho |V - V_5| / \mu \approx 0.55$ , что говорит о малом относительном скольжении фаз; число Стокса  $Stk_5 = \rho |V| d_5 / \mu L \approx 0.025$  для фракции самых крупных частиц свидетельствует о преобладающем влиянии сил вязкости по сравнению с инерционной силой, а число Кнудсена характерно для континуального режима течения  $Kn = M \sqrt{0.5 \cdot \gamma \pi} / Re \approx 0.00002$ . Максимальное значение числа Вебера наибо-



лее крупной капельной фракции составляет  $We_5 \approx 26$ , что больше критического значения числа Вебера  $We_{cr} \approx 10$ , при этом для капельной фракции с диаметром дисперсных включений  $d_4 = 20$  мкм число Вебера составляет  $We_4 \approx 3.25$ ; таким образом, для практического применения целесообразно ограничиваться капельными фракциями с диаметром капель до  $d = 20$  мкм.

## Заключение

В работе численно моделировалось течение монодисперсной газовзвеси, в которую осуществлялся вдув полидисперсной газокапельной смеси с учетом коагуляции фракций с относительным скоростным скольжением. Исследован процесс поглощения мелкодисперсной фракции твердых частиц капельными фракциями. Полученные результаты позволяют оценить скорость поглощения пылевой фракции в канале при заданных расходах газовзвеси и газокапельной смеси.

Расчеты показывают, что средняя плотность капельных фракций дисперсной фазы более интенсивно увеличивается у фракций с большим размером дисперсных включений, так как частицы этих фракций поглощают, помимо пылевых частиц, еще и частицы менее крупных капельных фракций.

Для выбранной дисперсности капельных фракций максимальное значение числа Вебера достигается для наиболее крупной капельной фракции и составляет  $We_5 \approx 26$ , что больше критического значения числа Вебера  $We_{cr} \approx 10$ . Это означает, что наиболее крупная фракция в ансамбле в процессе движения будет дробиться на меньшие фрагменты. При этом для следующей меньшей по размеру капельной фракции с диаметром дисперсных включений  $d_4 = 20$  мкм число Вебера составляет  $We_4 \approx 3.25$ , что говорит о ее устойчивости в потоке.

Таким образом, для практического применения механизма коагуляции в рассмотренном режиме течения целесообразно ограничить распределение частиц по размерам диаметром капель  $d_4 = 20$  мкм. В этом случае механизм коагуляции преобладает над механизмом дробления и в потоке не образуются трудноотделимые от несущей среды мелкие фракции капель.

## Список литературы

1. Нигматуллин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. Москва : Наука, 1978. 336 с.
2. Дейч М. Е., Филиппов Г. А. Газодинамика двухфазных сред. Москва : Энергоиздат, 1981. 472 с.
3. Волошук В. М. Кинетическая теория коагуляции. Ленинград : Гидрометеоиздат, 1984. 283 с.
4. Васенин И. М., Архипов В. А., Бутов В. Г., Глузунов А. А., Трофимов В. Ф. Газовая динамика двухфазных течений в соплах. Томск : Изд-во Томского ун-та, 1986. 261 с.
5. Киселев С. П., Руев Г. А., Трунев А. П., Фомин В. М., Шавалеев М. Ш. Ударно-волновые процессы в двухкомпонентных и двухфазных средах. Новосибирск : Наука, 1992. 257 с.
6. Стернин Л. Е., Шрайбер А. А. Многофазные течения газа с частицами. Москва : Машиностроение, 1994. 318 с.
7. Кутушев А. Г. Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах. Санкт-Петербург : Недра, 2003. 283 с.
8. Федоров А. В., Фомин В. М., Хмель Т. А. Волновые процессы в газовзвесях частиц металлов. Новосибирск : Параллель, 2015. 305 с.
9. Шагапов В. Ш., Галимзянов М. Н., Агишева У. О. Уединенные волны в газожидкостной пузырьковой смеси // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 2. С. 232–240. DOI: [10.18500/1816-9791-2020-20-2-232-240](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-232-240), EDN: [NKIQHN](#)
10. Галимзянов М. Н. Распространение волн давления в пузырьковых зонах конечных размеров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2010. Т. 10, вып. 4. С. 27–35. DOI: [10.18500/1816-9791-2010-10-4-27-35](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2010-10-4-27-35), EDN: [NBNMЕВ](#)
11. Kotalczyk G., Kruis F. A Monte Carlo method for the simulation of coagulation and nucleation based on weighted particles and the concepts of stochastic resolution and merging // Journal of Computational Physics. 2017. Vol. 340. P. 276–296. DOI: [10.1016/j.jcp.2017.03.041](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2017.03.041)

12. Suresh V., Liu Z., Perr Z., Gopalakrishnan R. Modeling particle-particle binary coagulation rate constants for spherical aerosol particles at high volume fractions using langevin dynamics simulations // Journal of Aerosol Science. 2022. Vol. 164. Art. 106001. DOI: [10.2139/ssrn.4058874](https://doi.org/10.2139/ssrn.4058874), EDN: [IORMBV](#)
13. Zhou D., Liu X., Yang S., Hou Y., Zhong X. Collision dynamics of two liquid nitrogen droplets under a low-temperature condition // Cryogenics. 2022. Vol. 124. Art. 103478. DOI: [10.1016/j.cryogenics.2022.103478](https://doi.org/10.1016/j.cryogenics.2022.103478), EDN: [MVZCPH](#)
14. Amanbaev T. R., Tilleuov G. E., Zuparbekova A. Mathematical modeling of dispersed media flows in the presence of nucleation, coagulation and phase transitions // Bulletin of the Karaganda University. Physics Series. 2021. Vol. 102, iss. 2. P. 14–24. DOI: [10.31489/2021Ph2/14-24](https://doi.org/10.31489/2021Ph2/14-24), EDN: [JAJQRV](#)
15. Хмелев В. Н., Шалунов А. В., Доровских Р. С., Нестеров В. А., Голых Р. Н. Моделирование процесса мокрой очистки газов с наложением ультразвуковых полей // Южно-Сибирский научный вестник. 2017. № 4 (20). С. 57–63. EDN: [YLBKTW](#)
16. Тимофеева М. В. Влияние коагуляции капель воды на их распределение по размерам в рабочей части аэрохолодильной установки // Журнал технической физики. 2019. Т. 89, вып. 4. С. 491–496. DOI: [10.21883/JTF.2019.04.47301.11-18](https://doi.org/10.21883/JTF.2019.04.47301.11-18), EDN: [NQCXOP](#)
17. Wang L.-P. Coagulation in turbulent particle-laden flows // Modeling Approaches and Computational Methods for Particle-Laden Turbulent Flows / eds. S. Subramaniam, S. Balachanda. Academic Press, 2023. P. 111–145. DOI: [10.1016/B978-0-32-390133-8.00012-8](https://doi.org/10.1016/B978-0-32-390133-8.00012-8)
18. Зайчик Л. И., Алипченков В. М. Коагуляция аэрозольных частиц в турбулентном потоке // Теплофизика высоких температур. 2008. Т. 46, вып. 5. С. 730–739. EDN: [JRFRDX](#)
19. Chen J., Gao P., Gu H., Yu H. Evaluation of the relative deviation for coagulation and gravitational sedimentation model from experimental results of submicron aerosol in water vapor environments // Progress in Nuclear Energy. 2023. Vol. 163. Art. 104824. DOI: [10.1016/j.pnucene.2023.104824](https://doi.org/10.1016/j.pnucene.2023.104824)
20. Patra P., Roy A. Brownian coagulation of like-charged aerosol particles // Physical Review Fluids. 2022. Vol. 7, iss. 6. Art. 064308. DOI: [10.1103/PhysRevFluids.7.064308](https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.7.064308), EDN: [WXALQG](#)
21. Лаптев А. Г., Лаптева Е. А. Математическая модель и теплогидравлические характеристики насадочных скрубберов конденсационного охлаждения газа // Инженерно-физический журнал. 2022. Т. 95, вып. 1. С. 259–266. EDN: [KQOYLR](#)
22. Макаров В. Н., Угольников А. В., Макаров Н. В., Боярских Г. А. Повышение эффективности пылеулавливания // Горный журнал. 2022. № 8. С. 62–70. DOI: [10.17580/gzh.2022.08.09](https://doi.org/10.17580/gzh.2022.08.09), EDN: [NUAJMF](#)
23. Шрайбер А. А., Фединчик И. В., Протасов М. В. О влиянии турбулентности газового потока на эффективность улавливания частиц в скруббере Вентури // Теплофизика высоких температур. 2015. Т. 53, № 1. С. 85–90. DOI: [10.7868/S0040364414060143](https://doi.org/10.7868/S0040364414060143), EDN: [TFVORN](#)
24. Алесасов В. Е., Дрегалин А. Ф., Тишин А. П., Худяков В. А. Термодинамические и теплофизические свойства продуктов сгорания : справочник : в 5 т. Т. 1. Методы расчета. Москва : Изд-во ВИНИТИ, 1971. 267 с.
25. Тукмаков А. Л. Динамика коагулирующей полидисперсной газовзвеси в нелинейном волновом поле акустического резонатора // Инженерно-физический журнал. 2015. Т. 88, вып. 1. С. 11–19. EDN: [THIVIL](#)
26. Тукмаков А. Л. Программный код для моделирования динамики однородных и дисперсных сред явным методом Мак-Кормака в обобщенных криволинейных координатах (2D). Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ. RU 2018619242, 02.08.2018. Заявка № 2018616542 от 19.06.2018.
27. Тукмаков А. Л., Тукмаков Д. А. Динамика заряженной газовзвеси с начальным пространственно неравномерным распределением средней плотности дисперсной фазы при переходе к равновесному состоянию // Теплофизика высоких температур. 2017. Т. 55, вып. 4. С. 509–512. DOI: [10.7868/S004036441703022X](https://doi.org/10.7868/S004036441703022X), EDN: [ZCNKVV](#)
28. Тукмаков А. Л., Тукмаков Д. А. Численное исследование влияния параметров дисперсных частиц на осаждение твердой фазы электрически заряженной полидисперсной газовзвеси // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика.Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 1. С. 90–102. DOI: [10.18500/1816-9791-2022-22-1-90-102](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-90-102), EDN: [DJLRDK](#)
29. Тукмаков Д. А. Численное исследование влияния свойств газовой составляющей звезды твердых частиц на разлет сжатого объема газовзвеси в двухкомпонентной среде // Инженерно-физический журнал. 2020. Т. 93, вып. 2. С. 304–310.
30. Tukmakov D. A. One-dimensional unsteady numerical model of gas suspension flow caused by gravitational sedimentation of particles with a constant velocity // Journal of Applied Mechanics



- and Technical Physics. 2022. Vol. 63, iss. 7. P. 1218–1226. DOI: [10.1134/S0021894422070148](https://doi.org/10.1134/S0021894422070148), EDN: [KUFPAP](#)
31. *Tukmakov D. A.* Numerical simulation of oscillations of aerosol with a low dispersed phase concentration in a closed tube by the continuum mathematical model // Technical Physics. 2022. Vol. 67. P. 764–770. DOI: [10.1134/S1063784222110032](https://doi.org/10.1134/S1063784222110032), EDN: [ZCTMNH](#)
  32. *Флемчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей : в 2 т. Т. 2. Москва : Мир, 1991. 551 с.
  33. *Музадаров И. Ф., Улюжников С. В.* Применение компактных разностных схем к исследованию нестационарных течений сжимаемого газа // Математическое моделирование. 1993. Т. 5, № 3. С. 74–83.
  34. *Пирумов У. Г., Росляков Г. С.* Газовая динамика сопел. Москва : Наука, 1990. 364 с.

### References

1. Nigmatulin R. I. *Osnovy mehaniki geterogenykh sred* [Fundamentals of the mechanics of heterogeneous media]. Moscow, Nauka, 1978. 336 p. (in Russian).
2. Deich M. E., Filippov G. A. *Gazodinamika dvukhfaznykh sred* [The gas dynamics of two-phase media]. Moscow, Energoizdat, 1981. 472 p. (in Russian).
3. Voloshchuk V. M. *Kineticheskaya teoriya koagulyatsii* [Kinetic theory of coagulation]. Leningrad, Gidrometeoizdat, 1984. 283 p. (in Russian).
4. Vasenin I. M., Arkhipov V. A., Butov V. G., Gluzunov A. A., Trofimov V. F. *Gazovaya dinamika dvukhfaznykh techeniy v soplyakh* [Gas dynamics of two-phase flows in nozzles]. Tomsk, Tomsk University Publ., 1986. 261 p. (in Russian).
5. Kiselev S. P., Ruev G. A., Trunov A. P., Fomin V. M., Shavaleev M. Sh. *Udarno-volnovye protsessy v dvukhkomponentnykh i dvukhfaznykh sredakh* [Shock wave processes in two-component and two-phase media]. Novosibirsk, Nauka, 1992. 257 p. (in Russian).
6. Sternin L. E., Shraiber A. A. *Mnogofaznye techeniya gaza s chastitsami* [Multiphase gas flows with particles]. Moscow, Mashinostroenie, 1994. 318 p. (in Russian).
7. Kutushev A. G. *Matematicheskoe modelirovanie volnovykh protsessov v aerodispersnykh i poroshkobraznykh sredakh* [Mathematical modeling of wave processes in aerodispersed and powdery media]. St. Petersburg, Nedra, 2003. 283 p. (in Russian).
8. Fedorov A. V., Fomin V. M., Khmel T. A. *Volnovye protsessy v gazovzvesyakh chistits metallov* [Wave processes in gas suspensions of metal particles]. Novosibirsk, Parallel, 2015. 305 p. (in Russian).
9. Shagapov V. S., Galimzyanov M. N., Agisheva U. O. Single waves in a gas-liquid bubble mixture. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2020, vol. 20, iss. 2, pp. 232–240 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2020-20-2-232-240](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-232-240), EDN: [NKIQHH](#)
10. Galimzyanov M. N. Propagation of pressure waves in finite-size bubbles zones. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2010, vol. 10, iss. 4, pp. 27–35 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2010-10-4-27-35](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2010-10-4-27-35), EDN: [NBNMEB](#)
11. Kotaleczyk G., Kruis F. E. A Monte Carlo method for the simulation of coagulation and nucleation based on weighted particles and the concepts of stochastic resolution and merging. *Journal of Computational Physics*, 2017, vol. 340, pp. 276–296. DOI: [10.1016/j.jcp.2017.03.041](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2017.03.041)
12. Suresh V., Liu Z., Perry Z., Gopalakrishnan R. Modeling particle-particle binary coagulation rate constants for spherical aerosol particles at high volume fractions using Langevin dynamics simulations. *Journal of Aerosol Science*, 2022, vol. 164, art. 106001. DOI: [10.2139/ssrn.4058874](https://doi.org/10.2139/ssrn.4058874), EDN: [IORMBV](#)
13. Zhou D., Liu X., Yang S., Hou Y., Zhong X. Collision dynamics of two liquid nitrogen droplets under a low-temperature condition. *Cryogenics*, 2022, vol. 124, art. 103478. DOI: [10.1016/j.cryogenics.2022.103478](https://doi.org/10.1016/j.cryogenics.2022.103478), EDN: [MVZCPH](#)
14. Amanbaev T. R., Tilleuov G. E., Zuparbekova A. Mathematical modeling of dispersed media flows in the presence of nucleation, coagulation and phase transitions. *Bulletin of the Karaganda University. Physics Series*, 2021, vol. 102, iss. 2, pp. 14–24. DOI: [10.31489/2021Ph2/14-24](https://doi.org/10.31489/2021Ph2/14-24), EDN: [JAJQRV](#)
15. Khmelev V. N., Shalunov A. V., Dorovskikh R. S., Nesterov V. A., Golykh R. N. Modeling the process of wet gas purification with the imposition of ultrasonic fields. *South Siberian Scientific Bulletin*, 2017, iss. 4 (20), pp. 57–63 (in Russian). EDN: [YLBKTW](#)
16. Timofeeva M. V. The effect of coagulation of water droplets on their size distribution in the operating part of an air-cooler device. *Technical Physics*, 2019, vol. 64, iss. 4, pp. 449–454. DOI: [10.1134/S1063784219040248](https://doi.org/10.1134/S1063784219040248), EDN: [LEFGAT](#)

17. Wang L. P. Coagulation in turbulent particle-laden flows. In: Subramaniam S., SBalachanda S. (eds.) *Modeling Approaches and Computational Methods for Particle-Laden Turbulent Flows*. Academic Press, 2023, pp. 111–145. DOI: [10.1016/B978-0-32-390133-8.00012-8](https://doi.org/10.1016/B978-0-32-390133-8.00012-8)
18. Zaichik L. I., Alipchenkov V. M. The coagulation of aerosol particles in turbulent flow. *High Temperature*, 2008, vol. 46, iss. 5, pp. 666–674.
19. Chen J., Gao P., Gu H., Yu H. Evaluation of the relative deviation for coagulation and gravitational sedimentation model from experimental results of submicron aerosol in water vapor environments. *Progress in Nuclear Energy*, 2023, vol. 163, art. 104824. DOI: [10.1016/j.pnucene.2023.104824](https://doi.org/10.1016/j.pnucene.2023.104824)
20. Patra P., Roy A. Brownian coagulation of like-charged aerosol particles. *Physical Review Fluids*, 2022, vol. 7, iss. 6, art. 064308. DOI: [10.1103/PhysRevFluids.7.064308](https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.7.064308), EDN: **WXALQG**
21. Laptev A. G., Lapteva E. A. Mathematical model and thermohydraulic characteristics of packed scrubbers of condensation cooling of a gas. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2022, vol. 95, iss. 1, pp. 257–265. DOI: [10.1007/s10891-022-02473-3](https://doi.org/10.1007/s10891-022-02473-3), EDN: **MJPBOU**
22. Makarov V. N., Ugolnikov A. V., Makarov N. V., Boyarskikh G. A. Dust control efficiency improvement. *Gornyi Zhurnal* [Mining Journal], 2022, iss. 8, pp. 62–70 (in Russian). DOI: [10.17580/gzh.2022.08.09](https://doi.org/10.17580/gzh.2022.08.09), EDN: **NUAJMF**
23. Shraiber A. A., Fedinchik I. V., Protasov M. V. On effect of gas flow turbulence on the efficiency of particle collection in a Venturi scrubber. *High Temperature*, 2015, vol. 53, iss. 1, pp. 80–85. DOI: [10.1134/S0018151X14060145](https://doi.org/10.1134/S0018151X14060145)
24. Alemasov V. E., Dregalin A. F., Tishin A. P., Khudyakov V. A. *Termodinamicheskie i teplofizicheskie svoystva produktov sgoraniya. T. 1. Metody rascheta* [Thermodynamic and thermophysical properties of combustion products. Vol. 1. Calculation methods]. Moscow, VINITI, 1971. 267 p. (in Russian).
25. Tukmakov A. L. Dynamics of a coagulating polydisperse gas suspension in the nonlinear wave field of an acoustic resonator. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2015, vol. 88, iss. 1, pp. 9–17. DOI: [10.1007/s10891-015-1162-1](https://doi.org/10.1007/s10891-015-1162-1), EDN: **NOGEWV**
26. Tukmakov A. L. Program code for modeling the dynamics of homogeneous and dispersed media using the explicit McCormack method in generalized curvilinear coordinates (2D). *Certificate of registration of the computer program RU* 2018619242, 08/02/2018. Application no. 2018616542 dated 06/19/2018.
27. Tukmakov A. L., Tukmakov D. A. Dynamics of a charged gas suspension with an initial spatially nonuniform distribution of the average dispersed phase density during the transition to the equilibrium state. *High Temperature*, 2017, vol. 55, iss. 4, pp. 491–495. DOI: [10.1134/S0018151X17030221](https://doi.org/10.1134/S0018151X17030221), EDN: **XNVGSP**
28. Tukmakov A. L., Tukmakov D. A. Numerical study of the influence of the parameters of dispersed particles on the deposition of the solid phase of an electrically charged polydisperse gas suspension. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 1, pp. 90–102 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2022-22-1-90-102](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-90-102), EDN: **DJLRDK**
29. Tukmakov D. A. Numerical investigation of the influence of properties of the gas component of a suspension of solid particles on the spreading of a compressed gas-suspension volume in a binary medium. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2020, vol. 93, iss. 2, pp. 291–297. DOI: [10.1007/s10891-020-02120-9](https://doi.org/10.1007/s10891-020-02120-9)
30. Tukmakov D. A. One-dimensional unsteady numerical model of gas suspension flow caused by gravitational sedimentation of particles with a constant velocity. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2022, vol. 63, iss. 7, pp. 1218–1226. DOI: [10.1134/S0021894422070148](https://doi.org/10.1134/S0021894422070148), EDN: **KUFPAP**
31. Tukmakov D. A. Numerical simulation of oscillations of aerosol with a low dispersed phase concentration in a closed tube by the continuum mathematical model. *Technical Physics*, 2022, vol. 67, pp. 764–770. DOI: [10.1134/S1063784222110032](https://doi.org/10.1134/S1063784222110032), EDN: **ZCTMNH**
32. Fletcher C. *Computation techniques for fluid dynamics*. Berlin, Springer-Verlag, 1988. 898 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1991. Vol. 2. 551 p.).
33. Muzaferov I. F., Utyuzhnikov S. V. Application of compact difference schemes to investigation of unstationary gas flows. *Matematicheskoe Modelirovanie* [Mathematical Modeling], 1993, vol. 5, iss. 3, pp. 74–83 (in Russian).
34. Pirumov U. G., Roslyakov G. S. *Gazovaya dinamika sopel* [Gas dynamics of nozzles]. Moscow, Nauka, 1990. 364 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 29.07.2024

Принята к публикации / Accepted 15.11.2025

Опубликована / Published 29.08.2025