

МАТЕМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 4. С. 458–466

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2025, vol. 25, iss. 4, pp. 458–466

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-458-466>

EDN: <https://elibrary.ru/FUGBYB>

Научная статья

УДК 519.17,519.71

Предельное распределение ранга дружбы в сложных сетях

А. А. Григорьев

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Григорьев Алексей Александрович, аспирант кафедры теории функций и стохастического анализа, alexprgrigoriev@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-3820-9523>, SPIN: 8732-2104, AuthorID: 1094743

Аннотация. В настоящей работе изучается парадокс дружбы в сложных сетях и вводится новая величина — ранг дружбы узла, для количественной оценки парадокса. В работе исследуется предельное распределение ранга дружбы в сетях, построенных с использованием конфигурационной модели, где последовательность степеней узлов генерируется независимыми реализациями случайной величины. Доказана теорема о сходимости ранга дружбы для сетей с конечным моментом распределения степеней. Эмпирические результаты подтверждают, что, в отличие от индекса дружбы, ранг дружбы является более стабильной характеристикой при сравнении сетей разного размера. Предложенный метод может быть полезен для сравнения сетей разного масштаба, например социальных сетей.

Ключевые слова: сложные сети, ранг дружбы, конфигурационная модель, парадокс дружбы, степенное распределение, предельные теоремы, корреляции степеней

Для цитирования: Григорьев А. А. Предельное распределение ранга дружбы в сложных сетях // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 4. С. 458–466. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-458-466>, EDN: [FUGBYB](https://elibrary.ru/FUGBYB)

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

LIMITING DISTRIBUTION OF FRIENDSHIP RANK IN COMPLEX NETWORKS

A. A. Grigoriev

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Alexey A. Grigoriev, alexprgrigoriev@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-3820-9523>, SPIN: 8732-2104, AuthorID: 1094743

Abstract. This work investigates the friendship paradox in complex networks and introduces a new metric — the friendship rank of a node, designed to quantify the paradox. The study examines the limiting distribution of friendship rank in networks generated via the configuration model, where node degrees are produced by independent realizations of a random variable. A convergence theorem for friendship rank is proven for networks with finite moments of degree distribution. Empirical results confirm that, unlike the friendship index, the friendship rank is a more stable characteristic when comparing networks of different sizes, especially for degree distributions with heavy tails. The proposed method can be useful for comparing networks of varying scales, such as social networks.

Keywords: complex networks, friendship rank, configuration model, friendship paradox, power-law distribution, limit theorems, degree correlations

For citation: Grigoriev A. A. Limiting distribution of friendship rank in complex networks. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 4, pp. 458–466 (in Russian).

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-458-466>, EDN: FUGBYB

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Одно из свойств, наблюдаемых в реальных сетях, заключается в том, что среднее количество соседей узлов в сетях превышает степень самих узлов. Такое свойство называется парадоксом дружбы, и оно справедливо как для степеней узлов, так и других характеристик в сетях. Более того, парадокс дружбы наблюдается и на уровне сети в целом, и на уровне отдельных узлов [1]. Для измерения парадокса дружбы используется величина, называемая индексом дружбы, вычисляемая как отношение средней степени узла к степени самого узла [2, 3]. Обнаружение и измерение в сетях парадокса дружбы позволяет применять усовершенствованные способы работы со сложными сетями. Так, знание о парадоксе дружбы было использовано при проведении более эффективных опросов в социальных сетях [4] и при выявлении заразных заболеваний [5].

Ранее для анализа степенных корреляций использовали величины, основанные на коэффициенте корреляции Пирсона, или «коэффициент асортативности». Однако позднее было доказано, что с увеличением сети значение коэффициента корреляции может быть случайным, а именно когда второй момент случайной величины стремится к бесконечности, значение коэффициента более не стремится к константе и зависит от размеров сети [6].

Конфигурационная модель (Configuration model, CM) [7] — это модель генерации графов, которая создаёт графы заданного размера n с заданной последовательностью степеней. Граф с n вершинами обозначается как $G_n = (V_n, E_n)$, где вершины помечены целыми числами: $V_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Множество E_n представляет собой набор рёбер (неориентированных). Степень вершины i обозначается через d_i , а последовательность степеней графа G_n задаётся как $D_n = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$. Если задана целочисленная положительная случайная величина ξ с функцией плотности вероятности f , то последовательность степеней $D_n = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ может быть получена как n независимых и одинаково распределенных реализаций случайной величины ξ . Известно, что конфигурационная модель генерирует

случайные мультиграфы таким образом, что эмпирическое распределение степеней f_n сходится к f при n , стремящемся к бесконечности.

Конфигурационная модель играет важную роль в анализе корреляций между степенями в сложных сетях и позволяет строить графы G_n с определённым распределением степеней D_n и без степенных корреляций (с нейтральным смешиванием). Сети с нейтральным смешиванием позволяют сравнивать реальные сети с «нейтральной» версией, где связи формируются случайным образом. Если реальная сеть демонстрирует отклонения от такой модели (например, наличие ассортативности или дисассортативности), это указывает на наличие специфических структурных свойств, которые могут быть важны для анализа. В ориентированных и неориентированных сетях с нейтральным смешиванием величины, основанные на рангах, обладают сходимостью [8].

Данная работа посвящена вопросу количественного измерения парадокса дружбы в контексте сравнения сетей различных размеров. Используя идеи работ [6, 9], вводится понятие ранга дружбы как характеристики узлов в сети и производится сравнение с индексом дружбы для измерения парадокса дружбы. Работа структурирована следующим образом: в разд. 1 вводятся понятия и обозначения, доказывается теорема о сходимости ранга дружбы; в разд. 2 приведены симуляции и эмпирические эксперименты, подкрепляющие результаты.

1. Предельное распределение ранга дружбы в сложных сетях

Пусть множество E_{ni} содержит узлы, инцидентные вершине i . В графе G_n индекс дружбы узла i может быть вычислен следующим образом:

$$\beta_i = \frac{\sum_{j \in E_{ni}} d_j}{d_i^2}.$$

Эмпирическое совместное распределение степеней имеет вид

$$h_n(k, l) = \frac{1}{2|E_n|} \sum_{i < j} \begin{cases} 1, & d_i = k \text{ и } d_j = l, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Распределение степеней узлов обозначается как $f(k)$, а распределение степеней, взвешенное по степеням узлов, как $f^*(k) = \frac{k f(k)}{|E_n|}$.

Подмножество $V_n(k) \subseteq V_n$ содержит все узлы степени k . Средний индекс дружбы среди узлов со степенью k может быть записан как

$$\Psi_n(k) := \begin{cases} \frac{1}{k} \frac{\sum_{l=1}^n l h_n(k, l)}{f^*(k)}, & V_n \neq \emptyset, \\ 0, & V(k) = \emptyset. \end{cases} \quad (1)$$

Эмпирическая функция распределения среднего индекса дружбы определяется соотношением

$$\Psi_n(k) = \frac{1}{|V_n(k)|} \sum_{i \in V_n(k)} \beta_i.$$

Во многих реальных сетях распределение степеней является степенным с дисперсией, стремящейся к бесконечности. Как было продемонстрировано ранее на примере конфигурационной модели с $D_n = IID$, если показатель степенного закона распределения степеней $1 < \gamma \leq 2$, то индекс дружбы меняется с ростом сети [9]. Подобное поведение является критическим недостатком для сравнения сетей разных размеров, что сильно ограничивает применимость индекса дружбы в анализе сетей.

По этой причине для измерения парадокса дружбы предлагается использовать иную величину, лишенную описанного ранее недостатка индекса дружбы. Новая величина будет

вычисляться через ранг узла, а не его степень. Подход с использованием ранговых величин давно применяется в литературе [8, 10].

Ранг узла со степенью k в сети размера n обозначим $F_n^*(k)$ и определим следующим образом:

$$F_n^*(k) = \frac{1}{|E_n|} \sum_{i=1}^n d_i \mathbb{1}\{d_i \leq k\}.$$

Отметим, что $F_n^*(k)$ есть кумулятивная взвешенная по ребрам функция распределения степеней.

Ранг узла со степенью k определяется как доля рёбер в графе, которые соединяют узлы со степенью меньше или равной k . Таким образом, значение ранга узла зависит от его степени и будет всегда в диапазоне $(0; 1]$. Для демонстрации рассмотрим несколько примеров.

Обозначим $d_{\min} = \min(d_1, \dots, d_n)$ минимальную степень узлов в сети и $d_{\max} = \max(d_1, \dots, d_n)$ — максимальную степень узлов. В табл. 1 приведены примеры вычисления ранга узлов для вершин с несколькими значениями степеней.

Таблица 1 / Table 1

Пример вычисления ранга узла с минимальным значением степени, со значением степени на 1 больше минимума и с максимальной степенью в графе

An example of calculating the rank of a node with a minimum degree value, a degree value that is 1 greater than the minimum, and a maximum degree in the graph

Степень узла	Ранг узла
d_{\min}	Доля рёбер, инцидентных узлам со степенью d_{\min}
$d_{\min} + 1$	Доля рёбер, инцидентных узлам со степенями d_{\min} и $d_{\min} + 1$
...	...
d_{\max}	1

Для графа G_n с n вершинами определим *средний ранг* соседей узлов со степенью k следующим образом:

$$M_n(k) = \frac{\sum_{\ell>0} F_n^*(\ell)}{f_n^*(k)} h_n(k, \ell).$$

Теоретический аналог $M(k)$ задаётся выражением

$$M(k) = \frac{\sum_{\ell=1}^n F_n^*(\ell) h(k, \ell)}{f_n^*(k)}.$$

По аналогии ранг дружбы узла i со степенью d_i будет равен

$$\beta_i^{rank} = \frac{\sum_{j \in E_{ij}} F_n^*(d_j)}{d_i F_n^*(d_i)}.$$

Средний ранг дружбы соседей $H_n(k)$ определим следующим образом:

$$H_n(k) := \begin{cases} \frac{1}{F_n^*(k)} \frac{\sum_{l=1}^n F_n^*(l) h_n(k, l)}{f_n^*(k)}, & V_n \neq \emptyset, \\ 0, & V(k) = \emptyset. \end{cases}$$

Как можно заметить, новая величина аналогична индексу дружбы (1) с той разницей, что вместо степени узла в выражении участвует ранг узла.

Пусть задана случайная величина ξ , по которой получена последовательность степеней $D_n = IID(\xi)$, а эмпирическое совместное распределение степеней $h_n(k, l)$ сходится к предельному распределению $h(k, l)$ со скоростью $n^{-\kappa}$, т. е.

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} |h_n(k, l) - h(k, l)| \leq n^{-\kappa}, \quad \kappa > 0$$

с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 1 (О сходимости ранга дружбы). *Пусть последовательность графов $\{G_n\}_{n \geq 1}$ получена по конфигурационной модели с последовательностью степеней D_n , каждая из которых является результатом n независимых и одинаково распределённых реализаций случайной величины ξ . Пусть предельное распределение степеней $f(k)$ имеет конечный $(1+\eta)$ -й момент ($\mathbb{E}[D^{1+\eta}] < \infty$). Тогда для каждого фиксированного k , такого что $f^*(k) > 0$, и для любого*

$$0 < \delta < \min \left\{ \frac{\eta}{8+4\eta}, \kappa \right\}$$

выполняется

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(|H_n(k) - H(k)| > n^{-\delta} \right) = 0.$$

Доказательство. Выразим разность $H_n(k) - H(k)$ через $M_n(k)$ и $M(k)$, приведём к общему знаменателю, добавим и вычтем $M(k)F^*(k)$ в числителе:

$$\begin{aligned} H_n(k) - H(k) &= \frac{M_n(k)}{F_n^*(k)} - \frac{M(k)}{F^*(k)} = \frac{M_n(k)F^*(k) - M(k)F_n^*(k)}{F_n^*(k)F^*(k)} = \\ &= \frac{M_n(k)F^*(k) - M(k)F^*(k) + M(k)F^*(k) - M(k)F_n^*(k)}{F_n^*(k)F^*(k)} = \\ &= \frac{(M_n(k) - M(k))F^*(k) + M(k)(F^*(k) - F_n^*(k))}{F_n^*(k)F^*(k)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Разделив слагаемые в последнем равенстве (2), получим

$$H_n(k) - H(k) = \frac{M_n(k) - M(k)}{F_n^*(k)} + M(k) \left(\frac{1}{F_n^*(k)} - \frac{1}{F^*(k)} \right).$$

Применив неравенство треугольника, имеем

$$|H_n(k) - H(k)| \leq \left| \frac{M_n(k) - M(k)}{F_n^*(k)} \right| + \left| M(k) \left(\frac{1}{F_n^*(k)} - \frac{1}{F^*(k)} \right) \right|.$$

Оценим слагаемое $\frac{M_n(k) - M(k)}{F_n^*(k)}$. Из [6, теорема 6.1] следует, что $|M_n(k) - M(k)| = O_p(n^{-\delta})$. В силу [6, предположение 5.1] имеем

$$F_n^*(k) \geq F^*(k) - n^{-\varepsilon} \quad \text{с вероятностью } 1 - O(n^{-\alpha}).$$

Тогда справедливо неравенство

$$\frac{M_n(k) - M(k)}{F_n^*(k)} \leq \frac{C_1 n^{-\delta}}{F^*(k) - n^{-\varepsilon}} = O_p(n^{-\delta}).$$

Для оценки слагаемого $M(k) \left(\frac{1}{F_n^*(k)} - \frac{1}{F^*(k)} \right)$ используем разложение

$$\frac{1}{F_n^*(k)} - \frac{1}{F^*(k)} = \frac{F^*(k) - F_n^*(k)}{F_n^*(k)F^*(k)}.$$

Согласно [6, предположению 5.1] получаем

$$|F_n^*(k) - F^*(k)| \leq d_{\text{tv}}(f_n^*, f^*) \leq n^{-\varepsilon}.$$

Следовательно, справедливо соотношение

$$M(k) \left(\frac{1}{F_n^*(k)} - \frac{1}{F^*(k)} \right) \leq \frac{|M(k)| \cdot n^{-\varepsilon}}{(F^*(k) - n^{-\varepsilon}) F^*(k)} = O(n^{-\varepsilon}).$$

Выбирая $\delta < \min \left\{ \frac{\eta}{8+4\eta}, \kappa, \varepsilon \right\}$ с учётом того, что $\varepsilon = \frac{\eta}{4(\eta+2)}$, окончательно получаем

$$|H_n(k) - H(k)| \leq O_p(n^{-\delta}) + O(n^{-\varepsilon}) \xrightarrow{p} 0.$$

□

Замечание 1. Выбор конфигурационной модели в формулировке теоремы обусловлен тем, что сети, создаваемые ею, удовлетворяют определённым условиям регулярности (см. [6, предположения 4.2 и 5.1]). А именно эмпирические распределения степеней и совместные распределения степеней соседей должны сходиться к своим предельным значениям. В общем случае теорема будет выполняться для любых сетей с распределением степеней, удовлетворяющих [6, предположения 4.2 и 5.1]. Поскольку в настоящей работе фокус исследования направлен на конфигурационную модель, то для упрощения восприятия материала данная теорема ограничивается рассмотрением именно этой модели.

2. Моделирование и эмпирические результаты

В данном разделе мы исследуем поведение среднего индекса дружбы в искусственных сетях, построенных по конфигурационной модели. На рис. 1 представлены графики, иллюстрирующие зависимость индекса дружбы от степени узла для различных значений параметра γ и размеров сети n .

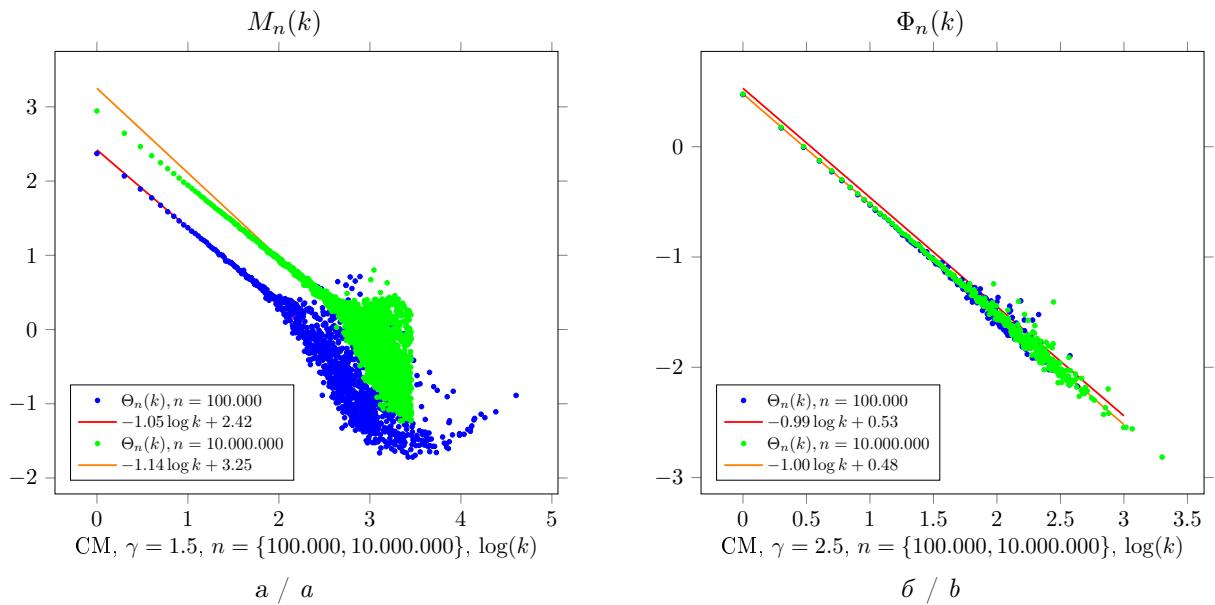


Рис. 1. Средний индекс дружбы, рассчитанный для каждой степени узла в искусственных сетях, построенных по конфигурационной модели: a — график $M_n(k)$ при $\gamma = 1.5$; b — график $\Phi_n(k)$ при $\gamma = 2.5$. Значения представлены на логарифмической шкале (цвет онлайн)

Fig. 1. The average friendship index calculated for each node degree in artificial networks constructed using the configuration model: a is graph $M_n(k)$ for $\gamma = 1.5$; b is graph $\Phi_n(k)$ for $\gamma = 2.5$. The values are presented on a logarithmic scale (color online)

Результаты представлены на логарифмической шкале с аппроксимирующими линиями, полученными с помощью линейной регрессии. Выбор логарифмической шкалы обоснован тем, что распределение среднего индекса дружбы следует степенному закону. На графиках представлены усредненные результаты, которые были получены после моделирования 200 сетей для каждого набора параметров.

На графике при $\gamma = 1.5$ (рис. 1, а) видно, что средний индекс дружбы изменяется в зависимости от размера сети n . Для сетей с $n = 100.000$ и $n = 10.000.000$ наблюдаются различные наклоны линейных аппроксимаций, что указывает на влияние размера сети на структуру связей. Аппроксимирующие линии, заданные уравнениями $-1.05 \log k + 2.42$ и $-1.14 \log k + 3.25$, демонстрируют, что с увеличением размера сети индекс дружбы для узлов с одинаковой степенью может снижаться.

На графике при $\gamma = 2.5$ (рис. 1, б) подобного явления не наблюдается. Аппроксимирующие линии для сетей с $n = 100.000$ и $n = 10.000.000$ практически совпадают, что свидетельствует о независимости индекса дружбы от размера сети при данном значении γ . Полученные регрессионные зависимости $-0.99 \log k + 0.53$ и $-1.00 \log k + 0.48$ показывают, что наклон линии практически не изменяется с увеличением n .

Таким образом, можно сделать вывод, что параметр γ играет ключевую роль в определении зависимости индекса дружбы от размера сети. При $\gamma = 1.5$ наблюдается значительное влияние размера сети на структуру связей, в то время как при $\gamma = 2.5$ этот эффект отсутствует.

Далее рассмотрим поведение среднего ранга дружбы $H_n(k)$ в искусственных сетях, созданных с помощью конфигурационной модели. На рис. 2 представлены графики, иллюстрирующие зависимость усредненного среднего ранга соседей от степени узла для различных значений параметра γ и размеров сети n .

В данном разделе мы анализируем поведение среднего ранга и сравниваем его с ранее рассмотренным средним индексом дружбы.

Графики демонстрируют, что значение среднего ранга соседей изменяется в зависимости от параметра γ . Для $\gamma = 1.5$ и $\gamma = 2.5$ наблюдаются различные распределения рангов, что указывает на влияние параметра γ на структуру связей в сети. Однако, в отличие от среднего индекса дружбы, средний ранг соседей остаётся практически неизменным при изменении размера сети n . Это подтверждается тем, что кривые для $n = 100.000$ и $n = 10.000.000$ практически совпадают для каждого значения γ .

Сравнивая эти результаты с графиками среднего индекса дружбы (рис. 1), можно сделать вывод, что параметр γ оказывает различное влияние на эти две характеристики. В то же время средний индекс дружбы зависит как от γ , так и от размера сети n , средний ранг соседей зависит только от γ и не изменяется с увеличением n .

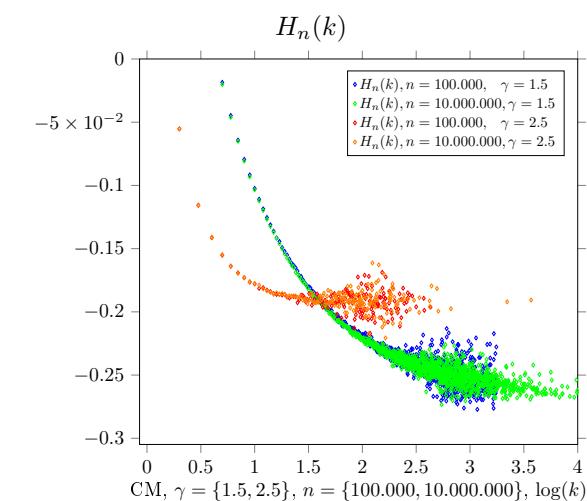


Рис. 2. Средний ранг дружбы $H_n(k)$, рассчитанный для каждой степени узла в искусственных сетях, построенных по конфигурационной модели. Значения представлены на логарифмической шкале

Fig. 2. Average friendship rank $H_n(k)$ calculated for each node degree in artificial networks built using the configuration model. Values are presented on a logarithmic scale

Таким образом, средний ранг соседей является более устойчивой характеристикой по отношению к изменению размера сети, что делает его полезным инструментом для анализа сетевых структур, особенно в случаях, когда размер сети может варьироваться. Устойчи-

вость является ценным свойством при сравнении реальных сетей, в которых размер сети в большинстве случаев будет различным.

Напомним, что индекс дружбы по определению сравнивает среднюю степень соседей и степень самого узла. Поэтому с помощью индекса можно убедиться, что формулировка «парадокс дружбы» верна для сетей. В различных сетях «парадокс» может иметь разную силу. Например, в социальных сетях доля узлов с индексом дружбы больше единицы приближается к 0.9 от всех узлов в сети.

Аналогичным образом будет вычислена сила «парадокса» с использованием новой величины ранга дружбы. Для того чтобы сравнить, соблюдается ли парадокс дружбы в сетях с использованием величины ранга дружбы, будет вычислена доля узлов, у которых величина ранга дружбы больше единицы. Были проведены симуляции и эксперименты для нескольких реальных социальных сетей, для одной технологической сети, а также для синтетических сетей, полученных с помощью моделей Барабаши – Альберт и конфигурационной модели. Сравнительные результаты представлены в табл. 2.

Таблица 2 / Table 2

Доля узлов, подверженных парадоксу дружбы, с использованием величин индекса и ранга дружбы

Share of nodes affected by the friendship paradox, calculated using friendship index and rank values

Network	Индекс дружбы, %	Ранг дружбы, %
Подписчики Twitter	99.4	99.4
Пользователи Flickr	95.7	92.7
Соавторы Github	98.9	93.7
Пользователи Youtube	96.1	92.3
Дорожная сеть США	55.7	57.3
СМ, $\gamma = 1.5$, $n = 100.000$	83.9	74.3
СМ, $\gamma = 1.5$, $n = 1.000.000$	83.4	74.0
ВА, $m = 3$, $n = 10.000$	90.2	74.9
ВА, $m = 3$, $n = 100.000$	90.5	74.9

Можно заметить, что значения, полученные по обеим величинам, близки. Следует также отметить, что значения, полученные с помощью ранга дружбы, меньше соответствующих значений индекса дружбы. Это объясняется тем, что при использовании индекса дружбы узлы с большими степенями имеют огромное влияние: при вычислении среднего их соседи гарантированно попадают под влияние парадокса. В то же время для ранга дружбы центральные узлы в сети будут иметь ранг, близкий к 1, и при подсчете среднего влияние отдельных слагаемых снижается.

Заключение

В данной работе предложен новый подход к измерению парадокса дружбы в сложных сетях с использованием рангов узлов вместо их степеней. В исследовании было показано, что предложенная величина ранга дружбы демонстрирует сходимость при увеличении размера сети, в отличие от традиционного индекса дружбы, который может зависеть от размера сети. Это делает ранг дружбы более надежным инструментом для сравнения сетей разного масштаба. Была доказана теорема о сходимости ранга дружбы в конфигурационной модели при условии конечности $(1 + \eta)$ -го момента распределения степеней.

Таким образом, предложенный метод позволяет устраниТЬ ключевой недостаток индекса дружбы — зависимость от размера сети — и предоставляет более надёжный инструмент для анализа корреляций степеней в сложных сетях. Дальнейшие исследования могут быть

направлены на изучение поведения ранга дружбы в ориентированных и взвешенных сетях, а также на разработку статистических критериев для его применения в сетях, построенных на реальных данных.

Список литературы / References

1. Pal S., Yu F., Novick Y., Swami A., Bar-Noy A. A study on the friendship paradox – quantitative analysis and relationship with assortative mixing. *Applied Network Science*, 2019, vol. 4, art. 71. DOI: <https://doi.org/10.1007/s41109-019-0190-8>
2. Alipourfard N., Nettasinghe B., Abeliuk A., Krishnamurthy V., Lerman K. Friendship paradox biases perceptions in directed networks. *Nature Communications*, 2020, vol. 11, art. 707. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41467-020-14394-x>
3. Higham D. J. Centrality-friendship paradoxes: When our friends are more important than us. *Journal of Complex Networks*, 2019, vol. 7, iss. 4, pp. 515–528. DOI: <https://doi.org/10.1093/comnet/cny029>
4. Nettasinghe B., Krishnamurthy V. “What do your friends think”?: Efficient Polling methods for networks using friendship paradox. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 2019, vol. 33, iss. 3, pp. 1291–1305. DOI: <https://doi.org/10.1109/TKDE.2019.2940914>
5. Garcia-Herranz M., Moro E., Cebrian M., Cebrian M., Christakis N. A., Fowler J. H. Using friends as sensors to detect global-scale contagious outbreaks. *PLoS ONE*, 2014, vol. 9, iss. 4. DOI: <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0092413>
6. van der Hoorn P., Yao D., Litvak N. Average nearest neighbor degrees in scale-free networks. *Internet Mathematics*, 2018, vol. 1, iss. 1. DOI: <https://doi.org/10.24166/im.02.2018>
7. Chen N., Olvera-Cravioto M. Directed random graphs with given degree distributions. *Stochastic Systems*, 2013, vol. 3, iss. 1, pp. 147–186. DOI: <https://doi.org/10.1287/12-SSY076>
8. Litvak N., van der Hofstad R. Degree-degree dependencies in random graphs with heavy-tailed degrees. *Internet Mathematics*, 2014, vol. 10, iss. 3, pp. 287–334. DOI: <https://doi.org/10.1080/15427951.2013.850455>
9. Sidorov S., Mironov S., Grigoriev A. Limit distributions of friendship index in scale-free networks. *Analysis of Images, Social Networks and Texts. AIST 2023. Lecture Notes in Computer Science*, vol. 14486. Cham, Springer, 2024, pp. 325–337. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-54534-4_23
10. van der Hoorn P., Litvak N. Convergence of rank based degree-degree correlations in random directed networks. *Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory*, 2014, vol. 4, iss. 4, pp. 45–83.

Поступила в редакцию / Received 13.05.2025

Принята к публикации / Accepted 25.06.2025

Опубликована / Published 28.11.2025