Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 4. С. 479–489
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2025, vol. 25, iss. 4, pp. 479–489
https://mmi.sgu.ru DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-479-489
EDN: https://elibrary.ru/HLNVFT

Научная статья
УДК 517.444,517.58

Множества инъективности оператора сферического среднего относительно свертки Бесселя

Г. В. Краснощёких, Вит. В. Волчков✉

Донецкий государственный университет, Россия, 283001, г. Донецк, ул. Университетская, д. 24

Краснощёких Глеб Витальевич, аспирант кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений, wolverimred@mail.ru, https://orcid.org/0009-0005-2783-4333

Волчков Виталий Владимирович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений, volna936@gmail.com, https://orcid.org/0000-0003-4274-0034, SPIN: 4478-1677, AuthorID: 505219

Аннотация. Пусть $C_\natural$ — множество всех чётных непрерывных функций на вещественной оси, E — непустое множество на $(0,+\infty)$, $\mathcal{R}f(x,t)$ — сферическое среднее функции $f\in C_\natural$ с центром в точке $x\in E$ и радиусом $t>0$ относительно свертки Бесселя. Для оператора $\mathcal{R}$ возникают следующие задачи: 1) выяснить, является ли заданное множество E множеством инъективности преобразования $\mathcal{R}$; 2) если E не является множеством инъективности, то охарактеризовать все функции $f\in C_\natural$, такие что $\mathcal{R}f(x,t)=0$ на $E\times(0,+\infty)$; 3) если E является множеством инъективности, то восстановить f по значениям $\mathcal{R}f(x,t)$ на $E\times(0,+\infty)$. В данной работе получено решение задач 1, 2 для произвольного множества $E\subset(0,+\infty)$, а также решение задачи 3 для случая, когда E — конечное множество инъективности. Показано, что функции из ядра преобразования $\mathcal{R}$ можно описать в виде рядов по собственным функциям оператора Бесселя, сходящихся в пространстве распределений. Отсюда следует, в частности, что множество E не является множеством инъективности преобразования $\mathcal{R}$ тогда и только тогда, когда оно содержится во множестве нулей некоторой собственной функции оператора Бесселя. Кроме того, если $E=\{r_1,\dots,r_m\}$ — конечное множество инъективности, найден класс формул обращения преобразования $\mathcal{R}$, зависящих от набора полиномов $p_1,\dots,p_m$. При этом предполагается, что $p_1,\dots,p_m$ имеют достаточно высокую степень и удовлетворяют некоторым условиям, связанным с нулями преобразований Фурье – Бесселя мер Дирака с носителями в точках $r_1,\dots,r_m$.

Ключевые слова: обобщенный сдвиг, свертка Бесселя, преобразование Фурье – Бесселя, сферические средние, множества инъективности, формулы обращения

Благодарности: Исследование проводилось в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № 124012400352-6).

Для цитирования: *Краснощёких Г. В., Волчков Вит. В.* Множества инъективности оператора сферического среднего относительно свертки Бесселя // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 4. С. 479–489. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-479-489, EDN: HLNVFT

Article

Injectivity sets of the spherical mean operator with respect to the Bessel convolution

G. V. Krasnoschekikh, Vit. V. Volchkov✉

Donetsk State University, 24 Universitetskaya St., 283001 Donetsk, Russia

Gleb V. Krasnoschekikh, wolverimred@mail.ru, https://orcid.org/0009-0005-2783-4333

Vitaliy V. Volchkov, volna936@gmail.com, https://orcid.org/0000-0003-4274-0034, SPIN: 4478-1677, AuthorID: 505219

Abstract. Let $C_\natural$ be the set of all even continuous functions on the real axis, E be a non-empty set on $(0,+\infty)$, $\mathcal{R}f(x,t)$ be the spherical mean of the function $f\in C_\natural$ with center at the point $x\in E$ and radius $t>0$ with respect to Bessel convolution. The following problems arise for the operator $\mathcal{R}$: 1) find out whether a given set E is an injectivity set of the transform $\mathcal{R}$; 2) if E is not an injectivity set, then characterize all functions $f\in C_\natural$ such that $\mathcal{R}f(x,t)=0$ on $E\times(0,+\infty)$; 3) if E is an injectivity set, then restore f from the values of $\mathcal{R}f(x,t)$ on $E\times(0,+\infty)$. In this paper we obtain a solution of problems 1 and 2 for an arbitrary set $E\subset(0,+\infty)$, as well as a solution of problem 3 for the case when E is a finite set of injectivity. It is shown that functions from the kernel of the transform $\mathcal{R}$ can be described in terms of series of the eigenfunctions of the Bessel operator converging in the space of distributions. It follows, in particular, that the set E is not the injectivity set of the transform $\mathcal{R}$ if and only if it is contained in the set of zeros of some eigenfunction of the Bessel operator. Moreover, if $E=\{r_1,\dots,r_m\}$ is a finite injectivity set, we find a class of inversion formula for the transform $\mathcal{R}$ that depend on a set of polynomials $p_1,\dots,p_m$. It is assumed that $p_1,\dots,p_m$ have a sufficiently high degree and satisfy some conditions related to the zeroes of Fourier – Bessel transform of Dirac measures with supports at points $r_1,\dots,r_m$.

Keywords: generalised shift, Bessel convolution, Fourier – Bessel transform, spherical means, injectivity sets, inversion formulas

Acknowledgements: The research was carried out in the framework of the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project No. 124012400352-6).

For citation: Krasnoschekikh G. V., Volchkov Vit. V. Injectivity sets of the spherical mean operator with respect to the Bessel convolution. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 4, pp. 479–489 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-479-489, EDN: HLNVFT

Введение

Пусть α — фиксированное число из промежутка $(-1/2,+\infty)$, $C_\natural$ — пространство чётных непрерывных функций на $\mathbb{R}$, δ_t $(t\geqslant 0)$ — чётная мера, сопоставляющая функции $\psi\in C_\natural$ число $\psi(t)$. Для $f\in C_\natural$ положим

$$\mathcal{R}f(x,t)=(f\star\delta_t)(x),\quad x>0,\quad t>0, \tag{1}$$

где символ $\star$ означает свертку относительно обобщённого сдвига Бесселя T_x^α (см. разд. 1). Оператор $\mathcal{R}$ является аналогом хорошо известного евклидова преобразования Радона на сферах, называемого также оператором сферического среднего (см. 1, гл. 4; 2, гл. 1, § 2]). Изучение сферических средних разного типа представляет самостоятельный интерес, а также играет важную роль в связи с их применением в некоторых областях математики и прикладных задачах (см. [3, ч. 5, гл. 6; 4, гл. 4, § 4.9]).

Определим ядро преобразования $\mathcal{R}$ относительно непустого множества $E \subset (0,+\infty)$ равенством

$$\operatorname{Ker}_E \mathcal{R} = \big\{ f \in C_\natural : \mathcal{R}f(x,t) = 0 \ \text{ на } \ E \times (0,+\infty)\big\}.$$

Множество $E \subset (0,+\infty)$ называется множеством инъективности преобразования $\mathcal{R}$, если $\operatorname{Ker}_E \mathcal{R} = \{0\}$. Совокупность всех таких множеств E обозначим $\mathcal{I}_\mathcal{R}$.

По аналогии с евклидовым случаем (см., например, [5–7]) для заданного множества $E \subset (0,+\infty)$ возникают следующие задачи:

1) выяснить, является ли E множеством инъективности преобразования $\mathcal{R}$;

2) если $E \notin \mathcal{I}_\mathcal{R}$, то описать $\operatorname{Ker}_E \mathcal{R}$;

3) если $E \in \mathcal{I}_\mathcal{R}$, то восстановить f по значениям $\mathcal{R}f(x,t)$ на $E \times (0,+\infty)$.

До настоящего времени основные известные результаты по задачам 1–3 неявно содержались в работе [8] и заключались в следующем:

1) одноэлементное множество E не является множеством инъективности для $\mathcal{R}$, причём $\operatorname{Ker}_E \mathcal{R}$ порождается собственными функциями оператора Бесселя, принадлежащими этому ядру (см. [8, теорема 3.2]);

2) множество E, состоящее из двух чисел r_1 и r_2, принадлежит $\mathcal{I}_\mathcal{R}$ тогда и только тогда, когда r_1/r_2 не является отношением положительных нулей функции Бесселя J_α (см. [8, теорема 4.6]).

Отметим, что первый из этих результатов является аппроксимационной теоремой типа Мальгранжа – Хермандера [9, гл. 16], а второй — аналогом теоремы Л. Зальцмана о двух радиусах [10].

В данной работе получено решение задач 1, 2 для произвольного множества $E \subset (0,+\infty)$, а также решение задачи 3 для случая, когда E — конечное множество инъективности преобразования $\mathcal{R}$. Показано, что функции из $\operatorname{Ker}_E \mathcal{R}$ можно описать в виде рядов по собственным функциям оператора Бесселя, сходящихся в пространстве распределений. Отсюда следует, в частности, что множество $E \subset (0,+\infty)$ не принадлежит $\mathcal{I}_\mathcal{R}$ тогда и только тогда, когда оно содержится во множестве нулей некоторой собственной функции оператора Бесселя. Кроме того, для конечного множества $E = \{r_1,\dots,r_m\} \in \mathcal{I}_\mathcal{R}$ найден класс формул обращения преобразования $\mathcal{R}$, которые зависят от набора полиномов $p_1,\dots,p_m$. При этом предполагается, что $p_1,\dots,p_m$ имеют достаточно высокую степень и удовлетворяют некоторым условиям, связанным с нулями преобразований Фурье – Бесселя распределений $\delta_{r_1},\dots,\delta_{r_m}$.

Точные формулировки и доказательства основных результатов приводятся в разд. 2, 4. В разд. 3 содержатся вспомогательные утверждения, необходимые для конструкции обращения преобразования $\mathcal{R}$. Краткие предварительные сведения, относящиеся к гармоническому анализу Бесселя, даны в разд. 1.

1. Предварительные сведения

Пусть $\mathcal{D}_\natural$ — множество всех чётных бесконечно дифференцируемых финитных функций на $\mathbb{R}$. Множество $\mathcal{D}_\natural$ является топологическим векторным пространством с обычной топологией. Обозначим через $\mathcal{D}'_\natural$ пространство всех чётных распределений на $\mathbb{R}$, т.е. линейных непрерывных функционалов на пространстве $\mathcal{D}_\natural$. Значение функционала $f \in \mathcal{D}'_\natural$ на функции $\psi \in \mathcal{D}_\natural$ будем записывать как $\langle f, \psi\rangle$. Пространство $\mathcal{D}'_\natural$ содержит класс $L^{\mathrm{loc}}_{\natural,\alpha}$ всех чётных комплекснозначных функций на $\mathbb{R}$, локально суммируемых по мере

$$d\mu(x) = |x|^{2\alpha+1} dx.$$

Вложение $L^{\mathrm{loc}}_{\natural,\alpha}$ в $\mathcal{D}'_\natural$ осуществляется посредством соотношения

$$\langle f, \psi\rangle = \int_0^\infty f(x)\psi(x)d\mu(x), \quad f \in L^{\mathrm{loc}}_{\natural,\alpha}, \quad \psi \in \mathcal{D}_\natural. \tag{2}$$

Как обычно, для носителя распределения $f \in \mathcal{D}'_\natural$ используется символ $\operatorname{supp} f$, а множество всех распределений из $\mathcal{D}'_\natural$ с компактным носителем обозначается $\mathcal{E}'_\natural$.

Для $f \in C_\natural$ обобщенный сдвиг Бесселя определяется равенством

$$T_x^\alpha f(y) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})} \int_0^\pi f(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta})(\sin\theta)^{2\alpha} d\theta, \tag{3}$$

где Γ — гамма-функция. Если $f \in \mathcal{D}'_\natural$ и $g \in \mathcal{E}'_\natural$, то свёртка Бесселя $f \star g \in \mathcal{D}'_\natural$ действует по правилу

$$\langle f \star g, \psi\rangle = \big\langle f(x), \langle g(y), T_x^\alpha \psi(y)\rangle\big\rangle, \quad \psi \in \mathcal{D}_\natural.$$

Основные свойства операторов обобщённого сдвига и свёртки Бесселя содержатся в [4, гл. 2; 8, § 2, 3; 11, § 7; 12, гл. 1; 13, гл. 1].

Пусть $\mathbf{I}_\alpha(z) = J_\alpha(z) z^{-\alpha}$,

$$\varphi_\lambda(x) = 2^\alpha \Gamma(\alpha+1) \mathbf{I}_\alpha(\lambda x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{4}$$

Функция φ_λ является собственной функцией оператора (3) и дифференциального оператора Бесселя

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{(2\alpha+1)}{x}\frac{d}{dx} = \frac{1}{x^{2\alpha+1}}\frac{d}{dx}\left(x^{2\alpha+1}\frac{d}{dx}\right), \tag{5}$$

причём

$$T_x^\alpha \varphi_\lambda(y) = \varphi_\lambda(x)\varphi_\lambda(y), \quad L\varphi_\lambda = -\lambda^2\varphi_\lambda \tag{6}$$

(см. [8, § 2, 3]). Из интегрального представления Пуассона бесселевых функций следует оценка

$$|\varphi_\lambda(x)| \leqslant e^{|x||\operatorname{Im}\lambda|}. \tag{7}$$

Сферическим преобразованием (преобразованием Фурье – Бесселя) распределения $f \in \mathcal{E}'_\natural$ называется чётная целая функция

$$\widetilde{f}(\lambda) = \langle f, \varphi_\lambda\rangle, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{8}$$

При этом

$$\varphi_\lambda \star f = \widetilde{f}(\lambda)\varphi_\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{C} \tag{9}$$

(см. [14, лемма 12]).

Для распределений $f, g \in \mathcal{E}'_\natural$ и любого полинома p имеют место равенства

$$\widetilde{f \star g} = \widetilde{f}\,\widetilde{g}, \quad \widetilde{p(L)f}(\lambda) = p(-\lambda^2)\widetilde{f}(\lambda) \tag{10}$$

(см. [8, § 2]). Если $\psi \in \mathcal{D}_\natural$, то для любого $N > 0$ существует константа $C_N > 0$, такая что

$$|\widetilde{\psi}(x)| \leqslant \frac{C_N}{(1+|x|)^N}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

Кроме того, справедлива формула обращения

$$\psi(y) = \varkappa_\alpha \int_0^\infty \widetilde{\psi}(x)\varphi_x(y) d\mu(x), \quad \text{где} \quad \varkappa_\alpha = \big(2^\alpha\Gamma(\alpha+1)\big)^{-2} \tag{12}$$

(см. [8, § 2]).

Нам потребуется также следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть w — чётная целая функция и $w(\lambda) = 0$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда*

$$\left|\frac{\lambda w(z)}{z^2-\lambda^2}\right| \leqslant \max_{|\zeta - z| \leqslant 2} |w(\zeta)|, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{13}$$

где при $z = \pm\lambda$ левая часть в (13) доопределена по непрерывности.

Доказательство леммы 1 основано на принципе максимума модуля и содержится в [15].

2. Описание ядра

Всюду в дальнейшем считаем, что r — фиксированное положительное число. В силу (8) и (4) имеем

$$\widetilde{\delta}_r(\lambda) = \varphi_\lambda(r), \quad \widetilde{\delta}_r(0) = 1. \tag{14}$$

Обозначим через $\mathcal{N}_r$ последовательность всех положительных нулей функции $\widetilde{\delta}_r$, занумерованных в порядке возрастания. Из свойств бесселевых функций следует, что

$$\mathbf{I}_{\alpha+1}(\lambda r) \neq 0 \quad \text{и} \quad \frac{1}{|\mathbf{I}_{\alpha+1}(\lambda r)|} = O(\lambda^{\alpha+3/2}) \quad \text{при} \quad \lambda \in \mathcal{N}_r \tag{15}$$

(см. [14, лемма 3; 16, гл. 7.9]).

Кроме того,

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{N}_r} \frac{1}{\lambda^{1+\varepsilon}} < +\infty \quad \text{для любого} \quad \varepsilon > 0. \tag{16}$$

Для $f \in L^1\big([0,r]; d\mu\big)$ положим

$$d_\lambda(f,r) = \frac{2^{1-2\alpha} r^{-2\alpha-4}}{\big(\Gamma(\alpha+1)\lambda \mathbf{I}_{\alpha+1}(\lambda r)\big)^2} \int_0^r f(x)\varphi_\lambda(x) d\mu(x), \quad \lambda \in \mathcal{N}_r.$$

Лемма 2. *Пусть $f \in L^{\mathrm{loc}}_{\natural,\alpha}$. Тогда для того, чтобы $f \star \delta_r = 0$ на $\mathbb{R}$, необходимо и достаточно, чтобы имело место разложение*

$$f = \sum_{\lambda \in \mathcal{N}_r} d_\lambda(f,r)\varphi_\lambda,$$

в котором ряд сходится в пространстве $\mathcal{D}'_\natural$ и $d_\lambda(f,r) = O(\lambda^{2\alpha+1})$, $\lambda \to +\infty$.

Доказательство. Для решений уравнения $f \star \chi_r = 0$, где χ_r — индикатор отрезка $[-r,r]$, подобное разложение установлено в работе [14]. Утверждение леммы 2 доказывается аналогично. □

Для непустого множества $E \subset (0,+\infty)$ определим множество $\Lambda(E)$ равенством

$$\Lambda(E) = \big\{\xi > 0 : \mathbf{I}_\alpha(\xi\eta) = 0 \;\; \text{для всех} \;\; \eta \in E\big\}. \tag{17}$$

Отметим, что

$$\Lambda(E) = \bigcap_{\eta \in E} \mathcal{N}_\eta.$$

Теорема 1. *1. Для того, чтобы функция $f \in C_\natural$ принадлежала $\operatorname{Ker}_E \mathcal{R}$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$f = \sum_{\lambda \in \Lambda(E)} a_\lambda \varphi_\lambda, \tag{18}$$

где $a_\lambda \in \mathbb{C}$ и ряд сходится в $\mathcal{D}'_\natural$.

2. Множество $E \subset (0,+\infty)$ принадлежит $\mathcal{I}_\mathcal{R}$ тогда и только тогда, когда E не содержится в $\mathcal{N}_\eta$ ни при каком $\eta > 0$.

Доказательство. 1. Предположим, что $f \in \operatorname{Ker}_E \mathcal{R}$. Фиксируем $r_1 \in E$. Учитывая, что

$$\mathcal{R}f(x,t) = T^\alpha_t f(x) = T^\alpha_x f(t) = \mathcal{R}f(t,x), \tag{19}$$

и применяя лемму 2, получаем

$$f = \sum_{\lambda \in \mathcal{N}_{r_1}} a_\lambda \varphi_\lambda, \tag{20}$$

где $a_\lambda = O(\lambda^{2\alpha+1})$ при $\lambda \to +\infty$ и ряд сходится в $\mathcal{D}'_\natural$. Если $E = \{r_1\}$, то необходимость в теореме 1 установлена.

Пусть $E \neq \{r_1\}$ и $r_2 \in E$, $r_2 \neq r_1$. Поскольку $f \star \delta_{r_2} = 0$, из (20) и (6) имеем

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{N}_{r_1}} a_\lambda \mathbf{I}_\alpha(\lambda r_2)\varphi_\lambda = 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'_\natural. \tag{21}$$

Для любого $\varepsilon > 0$ возьмём функцию $\omega_\varepsilon \in \mathcal{D}_\natural$, такую что $\operatorname{supp}\omega_\varepsilon \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$, $\omega_\varepsilon \geqslant 0$ и

$$\int_0^\varepsilon \omega_\varepsilon(x)d\mu(x) = 1.$$

Семейство ω_ε сходится в $\mathcal{D}'_\natural$ к дельта-функции, сосредоточенной в нуле. Сворачивая обе части в (21) с ω_ε и используя (9), приходим к равенству

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{N}_{r_1}} a_\lambda \mathbf{I}_\alpha(\lambda r_2)\widetilde{\omega}_\varepsilon(\lambda)\varphi_\lambda = 0. \tag{22}$$

В силу быстрого убывания $\widetilde{\omega}_\varepsilon(\lambda)$ при $\lambda \to +\infty$ и соотношений ортогональности для бесселевых функций (см. (11) и [16, гл. 7, § 7.10.4]) из (22) находим

$$a_\lambda \mathbf{I}_\alpha(\lambda r_2)\widetilde{\omega}_\varepsilon(\lambda) = 0, \quad \lambda \in \mathcal{N}_{r_1}.$$

Это соотношение и равенство

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \widetilde{\omega}_\varepsilon(\lambda) = \widetilde{\delta}_0(\lambda) = 1$$

показывают, что

$$a_\lambda = 0, \quad \lambda \in \mathcal{N}_{r_1} \setminus \mathcal{N}_{r_2}.$$

Теперь произвольность r_2 влечёт разложение (18). Достаточность в утверждении 1 следует из (9), (14) и (17).

2. Если $E \subset \mathcal{N}_\eta$ при некотором $\eta > 0$, то $\varphi_\eta \in \operatorname{Ker}_E \mathcal{R}$ (см. (9), (14) и (1)). Поэтому $E \notin \mathcal{I}_\mathcal{R}$.

Пусть теперь $E \notin \mathcal{I}_\mathcal{R}$ и f — ненулевая функция в $\operatorname{Ker}_E \mathcal{R}$. Тогда по доказанному выше справедливо разложение (18). Если предположить, что E не содержится в $\mathcal{N}_\eta$ ни при каком $\eta > 0$, то получим $\Lambda(E) = \varnothing$. Отсюда и из (18) следует, что $f = 0$. Противоречие. $\square$

Замечание 1. Известно (см. [5]), что множество $E \subset \mathbb{R}^2$ является множеством инъективности преобразования Радона на окружностях для класса финитных непрерывных функций в $\mathbb{R}^2$ тогда и только тогда, когда E не содержится в объединении вида $\omega(\Sigma_N) \cup F$, где $\Sigma_N = \bigcup_{l=0}^{N-1} \{te^{i\pi l/N} : t \in \mathbb{R}\}$ — система Коксетера из N прямых, F — конечное число точек в $\mathbb{R}^2$ и ω — евклидово движение плоскости $\mathbb{R}^2$. В связи с этим результатом Л. Зальцман [6] высказал следующую гипотезу: множество E является множеством неинъективности преобразования Радона на сферах для класса $C(\mathbb{R}^n)$ лишь в том случае, когда оно содержится во множестве нулей некоторой собственной функции лапласиана. Из второго утверждения теоремы 1 следует справедливость аналога гипотезы Л. Зальцмана для преобразования $\mathcal{R}$ (см. (6) и (9)).

3. Разложение дельта-функции

Введём следующие обозначения:

$$A_{r,\lambda} = \frac{2^{1-\alpha} r^{-2\alpha-4} \lambda^{-2}}{\Gamma(\alpha+1)\mathbf{I}^2_{\alpha+1}(\lambda r)}, \quad B_{r,\lambda} = \frac{2^{1-\alpha} r^{-2}}{\Gamma(\alpha+1)\mathbf{I}_{\alpha+1}(\lambda r)}, \quad \lambda \in \mathcal{N}_r,$$

$$\mathcal{J}_{r,\lambda}(x) = A_{r,\lambda}\mathbf{I}_\alpha(\lambda x)\chi_r(x), \quad \lambda \in \mathcal{N}_r,$$

где, как и выше, χ_r — индикатор отрезка $[-r,r]$. Отметим, что определение $A_{r,\lambda}$ и $B_{r,\lambda}$ корректно ввиду первого соотношения в (15).

Пусть $\mathcal{P}_r$ — множество полиномов $p(z)$, таких что $\deg p > \alpha+1$ и все нули функции $p(-z^2)\varphi_z(r)$ являются простыми, $\mathcal{N}_{r,p}$ — множество всех нулей функции $p(-z^2)\varphi_z(r)$, лежащих в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ или на луче $\{it : t > 0\}$.

Для $p \in \mathcal{P}_r$, $\lambda \in \mathcal{N}_{r,p}$ положим

$$\gamma_{r,p,\lambda} = \begin{cases} \frac{B_{r,\lambda}}{p(-\lambda^2)}, & \text{если } \lambda \in \mathcal{N}_r, \\ \frac{1}{p'(-\lambda^2)\varphi_\lambda(r)}, & \text{если } p(-\lambda^2)=0, \end{cases} \tag{23}$$

$$\mathcal{J}_{r,p,\lambda} = \begin{cases} \frac{1}{p(-\lambda^2)} p(L)\mathcal{J}_{r,\lambda}, & \text{если } \lambda \in \mathcal{N}_r, \\ \frac{1}{p'(-\lambda^2)\varphi_\lambda(r)} q_\lambda(L)\delta_r, & \text{если } p(-\lambda^2)=0, \end{cases}$$

где $q_\lambda(z) = \frac{p(z)}{z+\lambda^2}$. Смысл распределений $\mathcal{J}_{r,p,\lambda}$ виден из лемм 3 и 4, приводимых ниже.

Лемма 3. *Пусть $p \in \mathcal{P}_r$, $\lambda \in \mathcal{N}_{r,p}$. Тогда*

$$(L+\lambda^2)\mathcal{J}_{r,p,\lambda} = \gamma_{r,p,\lambda} p(L)\delta_r. \tag{24}$$

Доказательство. Достаточно установить, что

$$(L+\lambda^2)\mathcal{J}_{r,\lambda} = B_{r,\lambda}\delta_r \quad \text{при} \quad \lambda \in \mathcal{N}_r. \tag{25}$$

Для произвольной функции $\psi \in \mathcal{D}_\natural$ имеем

$$\big\langle (L+\lambda^2)\mathcal{J}_{r,\lambda}, \psi \big\rangle = \big\langle \mathcal{J}_{r,\lambda}, (L+\lambda^2)\psi \big\rangle = \\ = \frac{2^{1-\alpha} r^{-2\alpha-4}\lambda^{-2}}{\Gamma(\alpha+1)\mathbf{I}^2_{\alpha+1}(\lambda r)} \int_0^r \mathbf{I}_\alpha(\lambda x)\big(L+\lambda^2\big)\psi(x)d\mu(x). \tag{26}$$

Преобразуем этот интеграл с помощью повторного интегрирования по частям, равенств (5), (6) и соотношений

$$\mathbf{I}_\alpha(\lambda r) = 0, \quad \big(\mathbf{I}_\alpha(\lambda x)\big)' = -\lambda^2 x \mathbf{I}_{\alpha+1}(\lambda x) \tag{27}$$

(см. [16, гл. 7, п. 7.2.8, формула (51)]). Находим

$$\int_0^r \mathbf{I}_\alpha(\lambda x) L\psi(x)d\mu(x) = \int_0^r \mathbf{I}_\alpha(\lambda x) d\big(x^{2\alpha+1}\psi'(x)\big) = -\int_0^r x^{2\alpha+1}\big(\mathbf{I}_\alpha(\lambda x)\big)' d\psi(x) = \\ = \lambda^2 r^{2\alpha+2}\mathbf{I}_{\alpha+1}(\lambda r)\psi(r) + \int_0^r \psi(x)\Big(x^{2\alpha+1}\big(\mathbf{I}_\alpha(\lambda x)\big)'\Big)' dx = \\ = \lambda^2 r^{2\alpha+2}\mathbf{I}_{\alpha+1}(\lambda r)\psi(r) + \int_0^r \psi(x) L\big(\mathbf{I}_\alpha(\lambda x)\big)d\mu(x) = \\ = \lambda^2 r^{2\alpha+2}\mathbf{I}_{\alpha+1}(\lambda r)\psi(r) - \lambda^2 \int_0^r \psi(x)\mathbf{I}_\alpha(\lambda x)d\mu(x).$$

Отсюда и из (26) получаем $\big\langle (L+\lambda^2)\mathcal{J}_{r,\lambda}, \psi \big\rangle = B_{r,\lambda}\langle \delta_r, \psi\rangle$, что влечёт (25). □

Следствие 1. *Имеет место равенство*

$$\big(\lambda^2 - z^2\big)\widetilde{\mathcal{J}}_{r,p,\lambda}(z) = \gamma_{r,p,\lambda} p(-z^2)\varphi_z(r), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{28}$$

В частности, если $z \in \mathcal{N}_{r,p}$, то

$$\widetilde{\mathcal{J}}_{r,p,\lambda}(z) = \begin{cases} 0, & \textit{если } \lambda \neq z, \\ 1, & \textit{если } \lambda = z. \end{cases} \tag{29}$$

Доказательство. Используя (10) и (24), получаем (28). Теперь, учитывая (23) и (27), приходим к (29). □

Лемма 4. *Пусть $p \in \mathcal{P}_r$. Тогда*

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{N}_{r,p}} \mathcal{J}_{r,p,\lambda} = \delta_0, \tag{30}$$

где ряд сходится безусловно в пространстве $\mathcal{D}'_\natural$.

Доказательство. В силу симметричности оператора L и соотношения (2) для любой функции $\psi \in \mathcal{D}_\natural$ и $\lambda \in \mathcal{N}_r$ имеем

$$\langle \mathcal{J}_{r,p,\lambda}, \psi\rangle = \frac{1}{p(-\lambda^2)}\big\langle p(L)\mathcal{J}_{r,\lambda}, \psi\big\rangle = \frac{1}{p(-\lambda^2)}\big\langle \mathcal{J}_{r,\lambda}, p(L)\psi\big\rangle =$$
$$= \frac{2^{-\alpha}A_{r,\lambda}}{\Gamma(\alpha+1)p(-\lambda^2)}\int_0^r \varphi_\lambda(x)\big(p(L)\psi\big)(x)d\mu(x).$$

Отсюда видно (см. (7), (15) и (16)), что ряд

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{N}_r} \big|\langle \mathcal{J}_{r,p,\lambda}, \psi\rangle\big| \quad \text{сравним со сходящимся рядом} \quad \sum_{\lambda\in\mathcal{N}_r} \frac{1}{\lambda^{2\deg p-2\alpha-1}}.$$

Поэтому ряд в левой части (30) сходится безусловно в пространстве $\mathcal{D}'_\natural$ к некоторому распределению $f \in \mathcal{D}'_\natural$ с носителем на $[-r, r]$. При этом (см. (28), (29))

$$\widetilde{f}(z) = \sum_{\lambda\in\mathcal{N}_{r,p}} \gamma_{r,p,\lambda}\frac{p(-z^2)\varphi_z(r)}{\lambda^2 - z^2}, \quad z \in \mathbb{C}$$

и $\widetilde{f}(z) = 1$, если $z \in \mathcal{N}_{r,p}$. Покажем, что $\widetilde{f} = 1$ на $\mathbb{C}$. Функция

$$g(z) = \frac{\widetilde{f}(z) - 1}{p(-z^2)\varphi_z(r)}$$

является целой функцией не выше первого порядка. При $\operatorname{Im} z = \pm\operatorname{Re} z$, $z \to \infty$ она оценивается следующим образом (см. (15), (16)):

$$|g(z)| \leqslant \sum_{\lambda\in\mathcal{N}_{r,p}} \frac{|\gamma_{r,p,\lambda}|}{2|\lambda|}\left(\frac{1}{|z-\lambda|} + \frac{1}{|z+\lambda|}\right) + \frac{1}{\big|p(-z^2)\big|\big|\varphi_z(r)\big|} \leqslant O\left(\frac{1}{|z|}\right) + \frac{1}{\big|p(-z^2)\big|\big|\varphi_z(r)\big|}.$$

Эта оценка и асимптотика бесселевой функции на бесконечности (см. [16, гл. 7, п. 7.13.1, формула (3)]) влечёт равенство

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ \operatorname{Im} z = \pm\operatorname{Re} z}} g(z) = 0.$$

Тогда по принципу Фрагмена – Линделёфа функция g ограничена на $\mathbb{C}$. Теперь, используя теорему Лиувилля, заключаем, что $g = 0$ на $\mathbb{C}$. Таким образом, $\widetilde{f} = 1$ на $\mathbb{C}$, т.е. $f = \delta_0$. □

4. Формула обращения

Пусть $m \geqslant 2$, $0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_m$, $E = \{r_1, \ldots, r_m\} \in \mathcal{I}_{\mathcal{R}}$. Поскольку $\bigcap\limits_{j=1}^{m} \mathcal{N}_{r_j} = \varnothing$, то имеется достаточно большой произвол в выборе полиномов $p_1, \ldots, p_m$ со следующими свойствами:

1) $\deg p_j > \alpha + 1$, $j = 1, \ldots, m$;

2) нули всех функций $p_j(-z^2)\varphi_z(r_j)$ являются простыми;

3) $\bigcap\limits_{j=1}^{m} \mathcal{N}_{r_j,p_j} = \varnothing$.

Множество всех таких наборов $(p_1, \ldots, p_m)$ обозначим $\mathcal{P}_E$.

Возьмем $P = (p_1, \ldots, p_m) \in \mathcal{P}_E$ и определим $\mathcal{N}_{E,P}$ как декартово произведение множеств $\mathcal{N}_{r_j,p_j}$:

$$\mathcal{N}_{E,P} = \mathcal{N}_{r_1,p_1} \times \ldots \times \mathcal{N}_{r_m,p_m}.$$

Для $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathcal{N}_{E,P}$ положим

$$\mathfrak{J}_{E,P,\Lambda} = \mathcal{J}_{r_1,p_1,\lambda_1} \star \ldots \star \mathcal{J}_{r_m,p_m,\lambda_m}. \tag{31}$$

Символ $\mathfrak{J}_{E,P,\Lambda,j}$ будет обозначать свёрточное произведение $\mathfrak{J}_{E,P,\Lambda}$ без множителя $\mathcal{J}_{r_j,p_j,\lambda_j}$.

Лемма 5. *Пусть $E = \{r_1, \ldots, r_m\} \in \mathcal{I}_{\mathcal{R}}$, $P = (p_1, \ldots, p_m) \in \mathcal{P}_E$, $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathcal{N}_{E,P}$. Тогда для любого решения $(c_1, \ldots, c_m)$ системы*

$$c_1 + \ldots + c_m = 0, \quad c_1\lambda_1^2 + \ldots + c_m\lambda_m^2 = 1 \tag{32}$$

справедливо равенство

$$\mathfrak{J}_{E,P,\Lambda} = \sum_{j=1}^{m} c_j \gamma_{r_j,p_j,\lambda_j} p_j(L)\delta_{r_j} \star \mathfrak{J}_{E,P,\Lambda,j}. \tag{33}$$

Доказательство. Из определения $\mathcal{P}_E$ и $\mathcal{N}_{E,P}$ видно, что в наборе Λ найдутся по крайней мере два различных числа λ_k, λ_l. Полагая

$$c_k = \frac{1}{\lambda_k^2 - \lambda_l^2}, \quad c_l = \frac{1}{\lambda_l^2 - \lambda_k^2}, \quad c_j = 0 \quad \text{при} \quad j \notin \{k, l\},$$

получаем разрешимость системы (32). Далее, если $c_1, \ldots, c_m$ удовлетворяют (32), то в силу (24) имеем

$$\sum_{j=1}^{m} c_j \gamma_{r_j,p_j,\lambda_j} p_j(L)\delta_{r_j} \star \mathfrak{J}_{E,P,\Lambda,j} = \sum_{j=1}^{m} c_j (L + \lambda_j^2)\mathcal{J}_{r_j,p_j,\lambda_j} \star \mathfrak{J}_{E,P,\Lambda,j} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} c_j (L + \lambda_j^2)\mathfrak{J}_{E,P,\Lambda} = \mathfrak{J}_{E,P,\Lambda},$$

что и требовалось доказать. □

Теорема 2. *Пусть $E = \{r_1, \ldots, r_m\} \in \mathcal{I}_{\mathcal{R}}$, $P = (p_1, \ldots, p_m) \in \mathcal{P}_E$, $(c_1, \ldots, c_m)$ — произвольное решение системы (32) при $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathcal{N}_{E,P}$. Тогда, если $f \in C_\natural$ и*

$$f_{E,P,\Lambda} = \sum_{j=1}^{m} c_j \gamma_{r_j,p_j,\lambda_j} \big(\mathcal{R}f\big)(r_j, \cdot) \star p_j(L)\mathfrak{J}_{E,P,\Lambda,j},$$

то $f_{E,P,\Lambda}$ не зависит от выбора решения $(c_1, \ldots, c_m)$ и

$$f = \sum_{\Lambda \in \mathcal{N}_{E,P}} f_{E,P,\Lambda},$$

где ряд сходится безусловно в пространстве $\mathcal{D}'_\natural$.

Доказательство. Покажем, что

$$\sum_{\Lambda\in\mathcal{N}_{E,P}} \mathfrak{I}_{E,P,\Lambda} = \delta_0, \tag{34}$$

где ряд сходится безусловно в пространстве $\mathcal{D}'_\natural$. Пусть $\psi \in \mathcal{D}_\natural$. Используя (12), (8), (31), (10) и (28), находим (см. [17, доказательство теоремы 8.23])

$$\langle \mathfrak{I}_{E,P,\Lambda}, \psi\rangle = \varkappa_\alpha \int_0^\infty \widetilde{\psi}(x)\langle \mathfrak{I}_{E,P,\Lambda}, \varphi_x\rangle d\mu(x) = \varkappa_\alpha \int_0^\infty \widetilde{\psi}(x)\widetilde{\mathfrak{I}}_{E,P,\Lambda}(x) d\mu(x) =$$
$$= \varkappa_\alpha \int_0^\infty \widetilde{\psi}(x)\prod_{j=1}^m \widetilde{\mathcal{J}}_{r_j,p_j,\lambda_j}(x) d\mu(x) = \varkappa_\alpha \int_0^\infty \widetilde{\psi}(x)\prod_{j=1}^m \gamma_{r_j,p_j,\lambda_j}\frac{p_j(-x^2)\varphi_x(r_j)}{\lambda_j^2 - x^2} d\mu(x).$$

Оценивая модуль правой части этого равенства с помощью леммы 1 и неравенства (7), имеем

$$\left|\langle \mathfrak{I}_{E,P,\Lambda}, \psi\rangle\right| \leqslant \varkappa_\alpha \int_0^\infty \left|\widetilde{\psi}(x)\right| \prod_{j=1}^m e^{2r_j} \max_{|\zeta - x|\leqslant r} \left|p_j(-\zeta^2)\right| d\mu(x) \prod_{j=1}^m \frac{|\gamma_{r_j,p_j,\lambda_j}|}{|\lambda_j|}.$$

Поэтому из (11), (23) и рассуждения в лемме 4 следует, что

$$\sum_{\Lambda\in\mathcal{N}_{E,P}} \left|\langle \mathfrak{I}_{E,P,\Lambda}, \psi\rangle\right| < \infty$$

и справедливо разложение (34). Оно влечёт равенство

$$f = \sum_{\Lambda\in\mathcal{N}_{E,P}} f \star \mathfrak{I}_{E,P,\Lambda},$$

где ряд сходится безусловно в пространстве $\mathcal{D}'_\natural$. Учитывая, что $f\star\mathfrak{I}_{E,P,\Lambda} = f_{E,P,\Lambda}$ (см. (33), (1) и (19)), получаем утверждением теоремы. □

Список литературы

1. *Йон Ф.* Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. Москва : Иностранная литература, 1958. 158 с.
2. *Хелгасон С.* Группы и геометрический анализ. Москва : Мир, 1987. 735 с.
3. *Volchkov V. V.* Integral geometry and convolution equations. Dordrecht : Kluwer, 2003. 454 p.
4. *Ситник С. М., Шишкина Э. Л.* Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. Москва : Физматлит, 2019. 221 с.
5. *Agranovsky M. L., Quinto E. T.* Injectivity sets for the Radon transform over circles and complete systems of radial functions // Journal of Functional Analysis. 1996. Vol. 139, iss. 2. P. 383–414. DOI: https://doi.org/10.1006/jfan.1996.0090
6. *Agranovsky M. L., Volchkov V. V., Zalcman L. A.* Conical injectivity sets for the spherical Radon transform // Bulletin of the London Mathematical Society. 1999. Vol. 31, iss. 2. P. 231–236. DOI: https://doi.org/10.1112/S0024609398005396
7. *Волчков В. В., Волчков Вит. В.* Конические множества инъективности преобразования Радона на сферах // Алгебра и анализ. 2015. Т. 27, вып. 5. С. 1–31. EDN: UXUOGL
8. *Selmi B., Nessibi M. M.* A local two radii theorem on the Chébli-Trimèche hypergroup // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2007. Vol. 329, iss. 1. P. 163–190. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.06.061
9. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными : в 4 т. Т. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. Москва : Мир, 1986. 456 с.
10. *Zalcman L.* Analyticity and the Pompeiu problem // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1972. Vol. 47. P. 237–254. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00250628
11. *Левитан Б. М.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи математических наук. 1951. Т. 6, вып. 2. С. 102–143.

12. *Киприянов И. А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. Москва : Наука, Физматлит, 1997. 196 с.
13. *Trimèche K.* Generalized wavelets and hypergroups. New York : CRC Press, 1997. 364 p.
14. *Волчков Вит. В., Краснощёких Г. В.* Уточнение теоремы о двух радиусах на гипергруппе Бесселя – Кингмана // Математические заметки. 2024. Т. 116, вып. 2. С. 212–228. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm14184
15. *Volchkova N. P., Volchkov Vit. V.* Recovering the Laplacian from centered means on balls and spheres of fixed radius // Проблемы анализа. 2023. Т. 12 (30), вып. 1. С. 96–117. DOI: https://doi.org/10.15393/j3.art.2023.13290
16. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции : в 3 т. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. Москва : Наука, 1974. 295 с.
17. *Бремерман Г.* Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. Москва : Мир, 1968. 276 с.

References

1. John F. *Plane waves and spherical means applied to partial differential equations.* New York, London, Interscience Publ., 1955. 172 p. (Russ. ed.: Moscow, IL, 1958. 158 p.).
2. Helgason S. *Groups and geometric analysis.* Orlando, Academic Press, 1984. 654 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1987. 735 p.).
3. Volchkov V. V. *Integral geometry and convolution equations.* Dordrecht, Kluwer, 2003. 454 p.
4. Sitnik S. M., Shishkina E. L. *Metod operatorov preobrazovaniya dlya differentsialnykh uravneniy s operatorami Besselya* [Method of transformation operators for differential equations with Bessel operators]. Moscow, Fizmatlit, 2019. 221 p. (in Russian).
5. Agranovsky M. L., Quinto E. T. Injectivity sets for the Radon transform over circles and complete systems of radial functions. *Journal of Functional Analysis*, 1996, vol. 139, iss. 2, pp. 383–414. DOI: https://doi.org/10.1006/jfan.1996.0090
6. Agranovsky M. L., Volchkov V. V., Zalcman L. A. Conical injectivity sets for the spherical Radon transform. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 1999, vol. 31, iss. 2, pp. 231–236. DOI: https://doi.org/10.1112/S0024609398005396
7. Volchkov V. V., Volchkov Vit. V. Conic injectivity sets for the radon transformation on spheres. *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2016, vol. 27, iss. 5, pp. 709–730. DOI: https://doi.org/10.1090/spmj/1413
8. Selmi B., Nessibi M. M. A local two radii theorem on the Chébli-Trimèche hypergroup. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2007, vol. 329, iss. 1, pp. 163–190. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.06.061
9. Hörmander L. *The analysis of linear partial differential operators II: Differential operators with constant coefficients.* Berlin, Springer, 1983. 395 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1986. 456 p.).
10. Zalcman L. Analyticity and the Pompeiu problem. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1972, vol. 47, pp. 237–254. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00250628
11. Levitan B. M. Expansion by Bessel functions into Fourier series and integrals. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 1951, vol. 6, iss. 2, pp. 102–143 (in Russian).
12. Kipriyanov I. A. *Singulyarnye ellipticheskie krayevye zadachi* [Singular elliptic boundary value problems]. Moscow, Nauka, Fizmatlit, 1997. 196 p. (in Russian).
13. Trimèche K. *Generalized wavelets and hypergroups.* New York, CRC Press, 1997. 364 p.
14. Volchkov Vit. V., Krasnoschekikh G. V. A refinement of the two-radius theorem on the Bessel – Kingman hypergroup. *Mathematical Notes*, 2024, vol. 116, pp. 223–237. DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434624070174
15. Volchkova N. P., Volchkov Vit. V. Recovering the Laplacian from centered means on balls and spheres of fixed radius. *Issues of Analysis*, 2023, vol. 12 (30), iss. 1, pp. 96–117. DOI: https://doi.org/10.15393/j3.art.2023.13290
16. Bateman H., Erdélyi A. *Higher transcendental functions.* Vol. 2. New York, McGraw-Hill, 1953. 396 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1974. 295 p.).
17. Bremermann H. *Distributions, complex variables and Fourier transforms.* Boston, Addison-Wesley, 1965. 186 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1968. 276 p.).

Поступила в редакцию / Received 19.01.2025
Принята к публикации / Accepted 17.03.2025
Опубликована / Published 28.11.2025