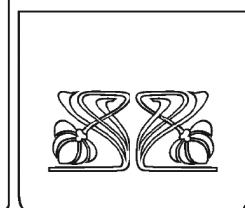
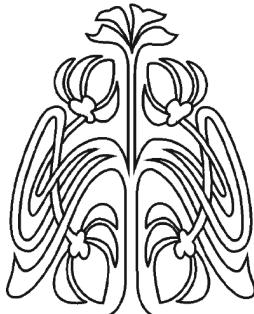
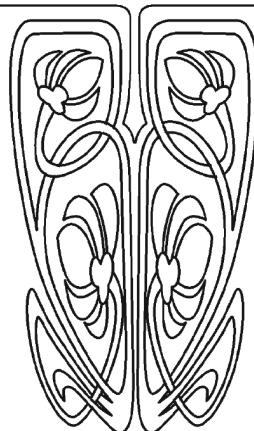


## МЕХАНИКА



Научный  
отдел



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 4. С. 490–497

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 4, pp. 490–497

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-490-497>

EDN: <https://elibrary.ru/XRDSFR>

Научная статья

УДК 539.3

### Асимптотические уравнения гиперболического погранслоя в окрестности фронта волны расширения в вязкоупругой оболочке вращения

Н. С. Анофрикова<sup>✉</sup>, Л. Ю. Коссович

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

**Анофрикова Наталия Сергеевна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической теории упругости и биомеханики, [anofrikovans@sgu.ru](mailto:anofrikovans@sgu.ru), <https://orcid.org/0000-0002-7931-0663>, SPIN: 1524-0162, AuthorID: 182285

**Коссович Леонид Юрьевич**, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математической теории упругости и биомеханики, [leonid.kossovch@yandex.ru](mailto:leonid.kossovch@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0002-4775-7348>, SPIN: 5861-3637, AuthorID: 2935

**Аннотация.** В статье приводится вывод асимптотических уравнений гиперболического погранслоя в окрестности фронта волны расширения в тонкостенной вязкоупругой полубесконечной оболочке вращения при ударном воздействии тангенциального типа на торце. Материал оболочки представлен моделью Максвелла с условием упругого объемного расширения. Уравнения погранслоя выводятся из трехмерных уравнений теории вязкоупругости асимптотическим методом, основанным на переходе к специальной системе координат, учитывающей геометрию переднего фронта и размер прифронтовой области.

**Ключевые слова:** асимптотический метод, гиперболический погранслой, ударная нагрузка, вязкоупругая оболочка вращения

**Для цитирования:** Анофрикова Н. С., Коссович Л. Ю. Асимптотические уравнения гиперболического погранслоя в окрестности фронта волны расширения в вязкоупругой оболочке вращения // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 4. С. 490–497. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-490-497>, EDN: XRDSFR

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

## Asymptotic equations of the hyperbolic boundary layer in the vicinity of the dilatation wave front in the viscoelastic shell of revolution

N. S. Anofrikova<sup>✉</sup>, L. Yu. Kossovich

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Natalia S. Anofrikova, anofrikovans@sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7931-0663>, SPIN: 1524-0162, AuthorID: 182285

Leonid Yu. Kossovich, leonid.kossovch@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4775-7348>, SPIN: 5861-3637, AuthorID: 2935

**Abstract.** In this article, the asymptotically approximate equations for the hyperbolic boundary layer in a thin semi-infinite viscoelastic shell of revolution in the vicinity of the dilatation wave front at shock edge loading of the tangential type are derived. The Maxwell model represents the material of the shell. The equations are derived asymptotically from the 3-D equations of viscoelasticity in the special coordinate system. This system takes into account the geometry and size of the boundary layer region.

**Keywords:** asymptotic method, hyperbolic boundary layer, shock loading, viscoelastic shell of revolution

**For citation:** Anofrikova N. S., Kossovich L. Yu. Asymptotic equations of the hyperbolic boundary layer in the vicinity of the dilatation wave front in the viscoelastic shell of revolution. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 4, pp. 490–497 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-490-497>, EDN: XRDSFR

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

### Введение

Асимптотические методы являются эффективным аппаратом, с помощью которого можно найти аналитические решения сложных задач теории тонкостенных конструкций. Они позволяют выявить особенности поведения решения трехмерной задачи в различных областях изменения независимых переменных и тем самым не только найти более простые (асимптотически оптимальные) уравнения, описывающие решения исходной задачи в каждой из выделенных областей, но и дать «подсказку» численным методам, например методу конечных элементов в необходимости использования той или иной сетки для построения решения в соответствующей области фазовой плоскости.

Основы асимптотической теории тонкостенных упругих конструкций заложены в работах А. Л. Гольденвейзера [1, 2] на примере задач статики и стационарной динамики. В работе [3] предложенная А. Л. Гольденвейзером асимптотическая теория расширена на случай нестационарного напряженно-деформированного состояния (НДС) в тонких упругих оболочках. Рассмотрен класс задач о распространении нестационарных волн, возникающих при ударных воздействиях на торец тонкостенной упругой оболочки вращения, которые согласно классификации внешних воздействий, приведенной в [4], относятся к продольным ударным воздействиям тангенциального и изгибающего типов и вызывают принципиально разные типы НДС. Согласно методике, описанной в монографии [3], НДС, соответствующее каждому типу воздействия, может быть представлено в различных областях фазовой плоскости разными составляющими с определенными показателями изменяемости и динамичности.

В настоящее время завершается формирование асимптотической теории, описывающей нестационарные волновые процессы в тонкостенных упругих оболочках при различных типах ударных воздействий на торце. В статьях [5–7] приведена систематизация этих методов, разработанных для ударных торцевых и поверхностных воздействий. Для каждого вида воздействия разработаны схемы расчленения нестационарного НДС на составляющие,

получены асимптотически оптимальные уравнения для каждой из этих составляющих, выделены области согласования для соседних составляющих (проведена оценка границ областей согласования, доказано совпадение асимптотик разрешающих уравнений в данных областях), разработаны асимптотические методы решения задач для всех составляющих, а также доказана полнота описания нестационарных волн с помощью указанных компонент.

Статья [8] посвящена модификации методов, разработанных в [3], на случай тонкостенной вязкоупругой оболочки вращения.

В то же время асимптотическая теория для вязкоупругих оболочек не до конца сформирована. На настоящий момент еще не все методики, разработанные для упругих оболочек, получилось модифицировать на случай оболочек вязкоупругих.

В настоящей работе предложен асимптотический метод построения уравнений пограничного слоя в окрестности фронта волны расширения в случае ударного продольного воздействия тангенциального типа на торце из трехмерных уравнений вязкоупругости с помощью методики, описанной в [9] и модифицированной на случай вязкоупругой оболочки вращения. Предполагается, что оболочка выполнена из вязкоупругого материала, представленного моделью Максвелла и удовлетворяющего условию упругого объемного расширения. Ранее уравнения данного пограничного слоя для вязкоупругой оболочки были выведены только для случая оболочки нулевой гауссовой кривизны [8, 10].

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим тонкостенную полубесконечную оболочку вращения, выполненную из вязкоупругого материала, свойства которого описываются моделью Максвелла.

Введем триортогональную систему координат  $(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3)$ , представленную на рис. 1, связанную со срединной поверхностью оболочки, где  $\alpha_1$  — координата, отсчитываемая вдоль образующей срединной поверхности,  $\alpha_2$  — координата, отсчитываемая вдоль направляющей срединной поверхности,  $\alpha_3$  — координата, отсчитываемая в направлении внешней нормали к срединной поверхности оболочки.

Предположим, что до момента приложения нагрузки оболочка находилась в состоянии покоя. Пусть в начальный момент времени к торцу, заданному уравнением  $\alpha_1 = 0$ , было приложено ударное продольное осесимметричное воздействие тангенциального типа, тогда граничное условие на данном торце можно записать в виде

$$\sigma_{11} = IH(t), \quad v_1 = 0 \quad \text{при} \quad \alpha_1 = 0, \quad (1)$$

где  $H(t)$  — ступенчатая функция Хевисайда,  $I$  — амплитуда нагрузки,  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = 1, 3$ ) — компоненты тензора напряжений,  $v_i$  ( $i = 1, 3$ ) — компоненты вектора перемещений,  $t$  — время.

Рис. 1. Оболочка вращения с триортогональной системой координат

Fig. 1. Shell of revolution with triorthogonal coordinate system

Лицевые поверхности оболочки считаем свободными от напряжений, тогда граничные условия на них записутся в следующей форме:

$$\sigma_{13} = \sigma_{33} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha_3 = \pm h, \quad (2)$$

где  $h$  — полутолщина оболочки.

Начальные условия покоя имеют вид

$$v_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (3)$$

Выпишем разрешающие уравнения, описывающие распространение нестационарных волн в тонкостенной вязкоупругой оболочке в случае осесимметричного НДС [8].

Трехмерные уравнения движения оболочки в напряжениях не зависят от ее материала и совпадают с аналогичными уравнениями в упругом случае:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \alpha_1} + H_1 \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial \alpha_3} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1 H_2}{\partial \alpha_3} \sigma_{31} + \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} \sigma_{13} - \rho H_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \alpha_1} + H_1 \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial \alpha_3} - \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} \sigma_{11} - \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} \sigma_{22} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1 H_2}{\partial \alpha_3} \sigma_{33} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \sigma_{13} - \rho H_1 \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $\rho$  — плотность материала,  $H_i$  ( $i = 1, 2$ ) — параметры Ламе, которые в случае оболочки вращения задаются выражениями

$$H_1 = 1 + \frac{\alpha_3}{R_1}, \quad H_2 = A(\alpha_1) \left( 1 + \frac{\alpha_3}{R_2} \right), \quad (5)$$

где  $R_i$  ( $i = 1, 2$ ) — главные радиусы кривизны срединной поверхности,  $A(\alpha_1)$  — расстояние от точки на срединной поверхности до оси вращения.

Трехмерные уравнения состояния взяты в дифференциальной форме и имеют вид [8]:

$$\begin{aligned} E \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} v_3 \right) &= \left( \frac{2(1+\nu)}{3t_r} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \sigma_{11} - \left( \frac{1+\nu}{3t_r} + \nu \frac{\partial}{\partial t} \right) (\sigma_{22} + \sigma_{33}), \\ E \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} v_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} v_3 \right) &= \left( \frac{2(1+\nu)}{3t_r} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \sigma_{22} - \left( \frac{1+\nu}{3t_r} + \nu \frac{\partial}{\partial t} \right) (\sigma_{11} + \sigma_{33}), \\ E \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_3} \right) &= \left( \frac{2(1+\nu)}{3t_r} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \sigma_{33} - \left( \frac{1+\nu}{3t_r} + \nu \frac{\partial}{\partial t} \right) (\sigma_{11} + \sigma_{22}), \\ \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_3} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} v_1 \right) &= \left( \frac{1}{t_r} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \sigma_{13}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $E$  — мгновенное значение модуля Юнга,  $\nu$  — мгновенное значение коэффициента Пуассона,  $t_r$  — параметр, имеющий размерность времени, характеризующий вязкоупругие свойства материала и называемый временем релаксации.

Трехмерная задача (1)–(6) не имеет точного аналитического решения. Но согласно исследованиям, описанным в работах [3, 8], нестационарное НДС в упругих и вязкоупругих тонкостенных оболочках при ударном торцевом воздействии указанного типа может быть представлено несколькими составляющими с различными показателями изменяемости и динаминости в различных областях фазовой плоскости.

Схема применимости различных составляющих при продольном воздействии тангенциального типа в вязкоупругой оболочке вращения на примере нормального продольного усилия приведена на рис. 2.

Построение приближенных уравнений теории вязкоупругости для каждой области основано на малости геометрического параметра  $\eta = \frac{h}{R} \ll 1$  — относительной полутолщины оболочки, где  $R$  — характерное значение радиусов кривизны срединной поверхности.

Настоящая работа посвящена выводу асимптотически оптимальных уравнений, описывающих решение исходной задачи в области 1 для случая произвольной оболочки вращения.

## 2. Асимптотический метод построения уравнений погранслоя в окрестности фронта волны расширения

В отличие от оболочки вращения нулевой гауссовой кривизны, где передний фронт волны расширения представляет собой плоскую поверхность, образованную нормалями к ее срединной поверхности, в произвольной оболочке вращения поверхность переднего фронта уже не будет образована нормалями к срединной поверхности.

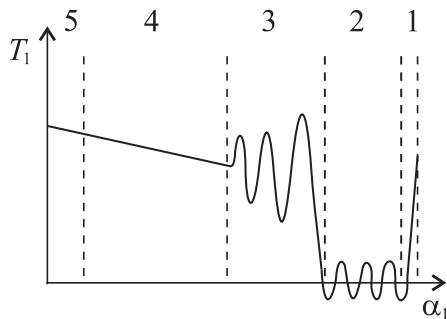


Рис. 2. Схема расчленения нестационарного НДС на составляющие в случае ударного продольного воздействия тангенциального типа: 1 — область гиперболического погранслоя в окрестности фронта волны расширения; 2 — квазистатическая квазисимметрическая задача; 3 — параболический погранслой в окрестности квазифронта; 4 — тангенциальное длинноволновое приближение; 5 — наложение двумерной составляющей и квазистатического погранслоя

Fig. 2. Scheme of dissection of non-stationary SSS into components in the case of shock edge loading of the tangential type: 1 shows the region of the hyperbolic boundary layer in the vicinity of the dilatation wave front; 2 shows the quasi-static quasi-symmetric problem; 3 shows the parabolic boundary layer in the vicinity of the quasi-front; 4 shows the tangential long-wave approximation; 5 shows the superposition of the two-dimensional component and the quasi-static boundary layer

специальной системе координат (7). Это позволит построить асимптотически оптимальные уравнения погранслоя в малой окрестности фронта волны расширения.

Перейдем в разрешающих уравнениях, записанных в новых координатах, к безразмерным прифронтовым координатам

$$x = \frac{1}{\eta^2}(\tau - \xi), \quad \tau = \frac{c_1}{R}t, \quad \xi = \frac{1}{R}\alpha, \quad \zeta_F = \frac{1}{h}z_F. \quad (8)$$

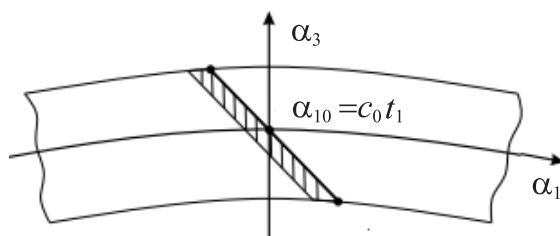


Рис. 3. Геометрическая модель фронта волны в произвольной оболочке вращения

Fig. 3. Geometric model of a wave front in an arbitrary shell of revolution

В работе [9] предложена асимптотическая геометрическая модель фронта волны расширения для случая произвольной упругой оболочки вращения. Доказано, что фронт волны можно считать поверхностью, образованной нормалями к срединной поверхности, повернутыми в точках  $\alpha_{10} = c_1 t_0$ , где  $c_1$  — скорость продольной волны в упругом материале,  $t_0$  — фиксированный момент времени (рис. 3).

Уравнение данной поверхности задается формулами

$$\alpha_1 = \alpha_{10} - \alpha_3 F(\alpha_{10}), \quad F(\alpha_{10}) = \int_1^{\alpha_{10}} \frac{d\alpha_1}{R_1(\alpha_1)}.$$

При этом длина повернутой нормали задается выражением

$$z_0^F = \alpha_3 \sqrt{1 + F^2(\alpha_{10})}.$$

В соответствии с длиной повернутой нормали можно ввести новые координаты  $(\alpha; z_F)$ , определяемые выражениями

$$\alpha = \alpha_1, \quad z_F = \alpha_3 \sqrt{1 + F^2(\alpha_1)}. \quad (7)$$

Причем координатная линия  $z_F$  при  $\alpha = \alpha_{10} = c_1 t_0$  совпадает с асимптотическим представлением переднего фронта волны.

В случае вязкоупругой оболочки вращения геометрия переднего фронта волны расширения будет аналогична случаю упругой задачи. Но в этом случае под  $c_1$  понимается мгновенная скорость продольной волны в вязкоупругом материале [8].

Следуя описанной в [9] методике, запишем разрешающие уравнения для вязкоупругой оболочки в специальной системе координат (7). Это позволит построить асимптотически оптимальные уравнения погранслоя в малой окрестности фронта волны расширения.

Данные координаты характеризуют НДС в окрестности фронта волны расширения порядка  $O(\eta^2)$ . Считается, что дифференцирование по координатам (8) не меняет асимптотического порядка искомых функций.

Кроме того, введем безразмерное время релаксации по формуле

$$\tau_r = \frac{c_1}{R}t_r.$$

Асимптотики для компонент НДС возьмем аналогично работе [10] в форме

$$v_1 = R\eta v_1^*, \quad v_3 = R\eta^2 v_3^*, \\ \sigma_{11} = E\eta^{-1}\sigma_{11}^*, \quad \sigma_{22} = E\eta^{-1}\sigma_{22}^*, \quad \sigma_{33} = E\eta^{-1}\sigma_{33}^*, \quad \sigma_{13} = E\sigma_{13}^*.$$

Считается, что величины со звездочкой имеют одинаковый асимптотический порядок по  $\eta$ .

В результате разрешающая система уравнений (4), (6) примет вид

$$\begin{aligned} \eta^2 \frac{\partial \sigma_{11}^*}{\partial \xi} - \frac{\partial \sigma_{11}^*}{\partial x} + \eta^2 \frac{\zeta_F F}{1+F^2} \frac{1}{R_1^*} \frac{\partial \sigma_{11}^*}{\partial \zeta_F} + \sqrt{1+F^2} \eta^2 \frac{\partial \sigma_{13}^*}{\partial \zeta_F} + \\ + \eta^2 k^* (\sigma_{11}^* - \sigma_{22}^*) - \left(1 + \eta \frac{\zeta_F}{R_1^* \sqrt{1+F^2}}\right) \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial^2 v_1^*}{\partial x^2} = 0, \\ - \frac{\partial \sigma_{13}^*}{\partial x} + \left(1 + \eta \frac{\zeta_F}{R_1^* \sqrt{1+F^2}}\right) \sqrt{1+F^2} \frac{\partial \sigma_{33}^*}{\partial \zeta_F} - \eta \frac{1}{R_1^*} \sigma_{11}^* - \eta \frac{1}{R_2^*} \sigma_{22}^* + \eta \left(\frac{1}{R_1^*} + \frac{1}{R_2^*}\right) \sigma_{33}^* - \\ - \left(1 + \eta \frac{\zeta_F}{R_1^* \sqrt{1+F^2}}\right) \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial^2 v_3^*}{\partial x^2} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( \eta^2 \frac{\partial v_1^*}{\partial \xi} - \left(1 - \eta \frac{\zeta_F}{R_1^* \sqrt{1+F^2}}\right) \frac{\partial v_1^*}{\partial x} + \eta^2 \frac{\zeta_F F}{1+F^2} \frac{1}{R_1^*} \frac{\partial v_1^*}{\partial \zeta_F} \right) \right) = \\ = \left( \eta^2 \frac{2(1+\nu)}{3\tau_r} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \sigma_{11}^* - \left( \eta^2 \frac{1+\nu}{3\tau_r} + \nu \frac{\partial}{\partial x} \right) (\sigma_{22}^* + \sigma_{33}^*), \quad (9) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta^2 k^* \left(1 - \eta \frac{\zeta_F}{R_2^* \sqrt{1+F^2}}\right) v_1^* \right) = \left( \eta^2 \frac{2(1+\nu)}{3\tau_r} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \sigma_{22}^* - \left( \eta^2 \frac{c_1}{R} \frac{1+\nu}{3\tau_r} + \nu \frac{\partial}{\partial x} \right) (\sigma_{11}^* + \sigma_{33}^*), \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \sqrt{1+F^2} \eta^2 \frac{\partial v_3^*}{\partial \zeta_F} \right) = \left( \eta^2 \frac{2(1+\nu)}{3\tau_r} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \sigma_{33}^* - \left( \eta^2 \frac{1+\nu}{3\tau_r} + \nu \frac{\partial}{\partial x} \right) (\sigma_{11}^* + \sigma_{22}^*), \\ \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial}{\partial x} \left( \left(1 - \eta \frac{\zeta_F}{R_1^* \sqrt{1+F^2}}\right) \left(-\frac{\partial v_3^*}{\partial x}\right) + \sqrt{1+F^2} \frac{\partial v_1^*}{\partial \zeta_F} - \eta \frac{1}{R_1^*} v_1^* \right) = \frac{\partial \sigma_{13}^*}{\partial x}. \end{aligned}$$

В данном случае асимптотически главной компонентой вектора перемещений является касательное перемещение  $v_1$ . Поэтому будем выводить основное уравнение асимптотически оптимальной системы относительно этой компоненты из первого уравнения движения, а также получим выражения для остальных компонент через  $v_1$ .

В отличие от упругого случая [9], трехмерные уравнения движения в случае вязкоупругой оболочки не могут быть записаны в перемещениях из-за формы записи уравнений состояния, которые нельзя разрешить в общем виде относительно напряжений. Поэтому для получения требуемых асимптотически оптимальных уравнений необходимо дополнительное разложить величины со звездочкой в ряды по малому параметру по формулам

$$f^* = f_{,0}^* + \eta f_{,1}^* + \eta^2 f_{,2}^*.$$

Данное разложение позволяет найти явные зависимости для напряжений и нормального перемещения через перемещение  $v_{1,0}^*$  с асимптотической погрешностью  $O(\eta)$  в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{11,0}^* = -\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial \nu_{1,0}^*}{\partial x}, \quad \sigma_{22,0}^* = \sigma_{33,0}^* = -\frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial \nu_{1,0}^*}{\partial x}, \\ \sigma_{13,0}^* = \frac{1}{1+\nu} \sqrt{1+F^2} \frac{\partial \nu_{1,0}^*}{\partial \zeta_F}, \quad \frac{\partial \nu_{3,0}^*}{\partial x} = -\sqrt{1+F^2} \frac{\partial \nu_{1,0}^*}{\partial \zeta_F}, \end{aligned}$$

а также получить одно разрешающее уравнение для асимптотически главной компоненты вектора перемещений  $v_1$  в виде

$$(1 + F^2) \frac{\partial^2 v_{1,0}^*}{\partial \zeta_F^2} - \frac{2\zeta_F F}{1 + F^2} \frac{1}{R_1^*} \frac{\partial^2 v_{1,0}^*}{\partial x \partial \zeta_F} - 2 \frac{\partial^2 v_{1,0}^*}{\partial x \partial \xi} - k^* \frac{\partial v_{1,0}^*}{\partial x} - \frac{2(1 - 2\nu)}{3\tau_r(1 - \nu)} \frac{\partial v_{1,0}^*}{\partial x} = 0,$$

где  $k^* = \frac{R}{A} \frac{\partial A}{\partial \alpha_1}$ ,  $R_1^* = \frac{R_1}{R}$ .

Возвращаясь в полученных уравнениях к размерным переменным (7) и искомым размерным функциям, получаем следующую систему асимптотически оптимальных разрешающих уравнений погранслоя в окрестности фронта волны расширения для асимптотически главных компонент НДС:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} + (1 + F^2) \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_F^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \frac{2z_F F}{1 + F^2} \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha \partial z_F} + \left( k + \frac{2(1 - 2\nu)}{3c_1 t_r(1 - \nu)} \right) \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} = 0, \\ \sigma_{11} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha}, \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha}. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнения (10) описывают решение исходной задачи в окрестности погранслоя порядка  $O(\eta)$ , внутри которой он содержится с толщиной порядка  $O(\eta^2)$ .

Таким образом, задача определения решения в малой окрестности фронта волны расширения сводится к решению уравнения в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами — первого уравнения системы (10). Полученное решение должно удовлетворять следующим граничным условиям, соответствующим рассматриваемому типу торцевой нагрузки:

$$\sigma_{33} = 0 \quad \text{при} \quad z_F = \pm h \sqrt{1 + F^2}, \quad (11)$$

$$\sigma_{11} = IH(t) \quad \text{при} \quad \alpha = 0. \quad (12)$$

Здесь (11) — граничное условие на лицевых поверхностях, (12) — граничное условие на торце.

## Заключение

Следует заметить, что при  $F(\alpha_1) = 0$  (случай оболочки вращения нулевой гауссовой кривизны) уравнения (10) совпадают с аналогичными уравнениями, полученными в [8, 10] для соответствующих оболочек, а при  $t_r \rightarrow \infty$  (упругий материал) совпадают с аналогичными уравнениями, полученными в [9] для случая произвольной упругой оболочки вращения. Данные факты подтверждают достоверность полученных результатов.

Таким образом, представленный в данной статье вывод асимптотически оптимальных уравнений гиперболического погранслоя в окрестности фронта волны расширения в оболочке вращения общего очертания, выполненной из вязкоупругого материала, представленного моделью Максвелла, полностью подтверждает универсальный характер асимптотического подхода, разработанного на примере упругих оболочек вращения.

## Список литературы

1. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. Москва : Наука, 1976. 512 с.
2. Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. Москва : Наука, 1979. 384 с.
3. Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Nolde E. V. Dynamics of thin walled elastic bodies. San Diego : Academic Press, 1998. 226 p.
4. Nigul U. Regions of effective application of the methods of three-dimensional and two-dimensional analysis of transient stress waves in shells and plates // International Journal of Solids and Structures. 1969. Vol. 5, iss. 6. P. 607–627. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(69\)90031-6](https://doi.org/10.1016/0020-7683(69)90031-6)

5. Коссович Л. Ю. Асимптотические методы в динамике оболочек при ударных воздействиях // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2008. Т. 8, вып. 2. С. 12–33. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2008-8-2-12-33>, EDN: **JVRXQX**
6. Кириллова И. В., Коссович Л. Ю. Асимптотическая теория волновых процессов в оболочках вращения при ударных поверхностных и торцевых нормальных воздействиях // Известия РАН. Механика твердого тела. 2022. № 2. С. 35–49. DOI: <https://doi.org/10.31857/S057232992202012X>, EDN: **HHWAXC**
7. Кириллова И. В. Асимптотическая теория нестационарных упругих волн в оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях изгибающего типа // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 1. С. 80–90. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-80-90>, EDN: **SUWSYV**
8. Бажанова Н. С., Коссович Л. Ю., Сухоловская М. С. Нестационарные волны в вязкоупругих оболочках: модель Максвелла // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2000. № 2. С. 17–24. EDN: **UJSTAD**
9. Кириллова И. В. Асимптотическая теория гиперболического погранслоя в оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях тангенциального типа // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 2. С. 222–230. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-222-230>, EDN: **SFYWBV**
10. Бажанова Н. С., Коссович Л. Ю. Погранслой в окрестности фронта волны расширения в вязкоупругих оболочках вращения // Проблемы прочности и пластичности. 2000. Вып. 62. С. 22–26.

### References

1. Gol'denveyzer A. L. *Teoriya uprugikh tonkikh obolochek* [Theory of elastic thin shells]. Moscow, Nauka, 1976. 512 p. (in Russian).
2. Gol'denveyzer A. L., Lidsky V. B., Tovstik P. E. *Svobodnye kolebaniya tonkikh uprugikh obolochek* [Free vibrations of thin elastic shells]. Moscow, Nauka, 1979. 384 p. (in Russian).
3. Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Nolde E. V. *Dynamics of thin walled elastic bodies*. San Diego, Academic Press, 1998. 226 p.
4. Nigul U. Regions of effective application of the methods of three-dimensional and two-dimensional analysis of transient stress waves in shells and plates. *International Journal of Solids and Structures*, 1969, vol. 5, iss. 6, pp. 607–627. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(69\)90031-6](https://doi.org/10.1016/0020-7683(69)90031-6)
5. Kossovich L. Yu. Asymptotic methods in dynamics of shells under shock loading. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2008, vol. 8, iss. 2, pp. 12–33 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2008-8-2-12-33>, EDN: **JVRXQX**
6. Kirillova I. V., Kossovich L. Yu. Asymptotic theory of wave processes in shells of revolution under surface impact and normal end actions. *Mechanics of Solids*, 2022, vol. 57, iss. 2, pp. 232–243. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654422020078>, EDN: **WCTBUQ**
7. Kirillova I. V. Asymptotic theory of the transient waves in shells of revolution at shock edge loading of the bending type. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 1, pp. 80–90 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-80-90>, EDN: **SUWSYV**
8. Bazhanova N. S., Kossovich L. Yu., Sukholovskaya M. S. Unsteady waves in viscoelastic shells: The Maxwell's model. *Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Sciences*, 2000, iss. 2, pp. 17–24 (in Russian). EDN: **UJSTAD**
9. Kirillova I. V. Asymptotic theory of the hyperbolic boundary layer in shells of revolution at shock edge loading of the tangential type. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 2, pp. 222–230 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-222-230>, EDN: **SFYWBV**
10. Bazhanova N. S., Kossovich L. Yu. Boundary layer in the vicinity of the expansion wave front in viscoelastic shells of revolution. *Problems of Strength and Plasticity*, 2000, iss. 62, pp. 22–26 (in Russian).

Received / Поступила в редакцию 19.05.2025

Accepted / Принята к публикации 18.06.2025

Published / Опубликована / 28.11.2025