



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 4. С. 498–512

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 4, pp. 498–512

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-498-512>

EDN: <https://elibrary.ru/JUEHET>

Научная статья

УДК 514.85,531.36

## Движение материальной точки вблизи двух касающихся параболоидов

С. Н. Бурьян

Государственный научно-исследовательский институт прикладных проблем, Россия, 191167, г. Санкт-Петербург, набережная Обводного канала, д. 29

**Бурьян Сергей Николаевич**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, [burianserg@yandex.ru](mailto:burianserg@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0002-7795-6735>, SPIN: 1839-6004, AuthorID: 974092

**Аннотация.** Рассматривается движение материальной точки вблизи особенности типа двух касающихся поверхностей. Поверхности расположены симметрично относительно общей касательной плоскости и имеют общую ось вращения. Сначала рассматривается модель движения для голономной механики. Показано, что через особую точку могут проходить только траектории в фиксированной плоскости, содержащей ось вращения поверхностей. В точке касания возникает динамическая неопределенность, так как у траектории существует несколько ветвей движения. Для исследования движения материальной точки вблизи особенности типа двух касающихся параболоидов рассматривается модель реализации сил реакции голономных связей через упругий потенциал с большим параметром жесткости, или жесткий потенциал. Потенциал должен обращаться в ноль на многообразии с особенностями и быть строго положительным вне его. Для модели с жестким потенциалом также получается, что через особую точку могут проходить только траектории в фиксированной плоскости, содержащей ось вращения параболоидов. Сделано численное моделирование динамики. Получено, что траектории системы с жестким потенциалом могут качественно отличаться от траекторий соответствующей голономной системы. Голономная система мгновенно проходит геометрическую особенность, двигаясь с ненулевой скоростью. Система с жестким потенциалом может двигаться в сингулярной области конечное время, в результате чего возникают быстрые смены направления вектора скорости. В реальных механических системах данный тип движения может приводить к поломкам или к неустойчивости траекторий.

**Ключевые слова:** особая точка, многообразия с особенностями, особенность типа касания, голономные связи, реализация связей в механике

**Для цитирования:** Бурьян С. Н. Движение материальной точки вблизи двух касающихся параболоидов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 4. С. 498–512. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-498-512>, EDN: JUEHET

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## Model of motion of a material point near two tangent paraboloids

S. N. Burian

State Research Institute of Applied Problems, 29 naberezhnaya Obvodnogo kanala, St. Petersburg 191167, Russia

**Sergey N. Burian**, [burianserg@yandex.ru](mailto:burianserg@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0002-7795-6735>, SPIN: 1839-6004, AuthorID: 974092



**Abstract.** The motion of a material point near a singularity of the type of two tangent surfaces is considered. The surfaces are located symmetrically with respect to a common tangent plane and have a common axis of rotation. First, a model of motion for holonomic mechanics is considered. It is shown that only trajectories in a fixed plane containing the axis of rotation of the surfaces can pass through a singular point. At the point of contact, dynamic uncertainty arises, since the trajectory has several possible branches of motion. To study the motion of a material point near a singularity of the type of double tangent paraboloid, a model of the implementation of holonomic constraints through an elastic potential with a large stiffness parameter, or a “stiff potential”, is considered. The potential must vanish on the manifold with singularities and must be strictly positive outside it. For a model with a stiff potential, it also turns out that only trajectories in a fixed plane containing the axis of rotation of the paraboloids can pass through a singular point. Numerical modeling of the dynamics was done. It was found that the trajectories of a system with a stiff potential can qualitatively differ from the trajectories of the corresponding holonomic system. A holonomic system instantly passes a geometric singularity, moving with a non-zero velocity. A system with a stiff potential can move in a singular region for a finite time, resulting in rapid changes in the direction of the velocity vector. In real mechanical systems, this type of motion can lead to breakdowns or instability of trajectories.

**Keywords:** singular point, manifolds with singularities, tangency type singularity, holonomic constraints, realization of constraints in mechanics

**For citation:** Burian S. N. Model of motion of a material point near two tangent paraboloids. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 4, pp. 498–512 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-498-512>, EDN: JUEHET

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Для исследования движения голономных механических систем в большинстве случаев применяются уравнения Лагранжа или Гамильтона. Неявно предполагается, что голономные связи всюду являются независимыми. В этом случае конфигурационное пространство, задаваемое голономными связями, является гладким многообразием. Положение изображающей точки описывается конечным (и постоянным) числом обобщенных координат, которые позволяют составить уравнения Лагранжа второго рода.

Зависимые голономные связи возникают в теории систем с избыточными связями, в которых число связей больше числа независимых координат. Дополнительные связи могут давать дополнительную функциональность или служить для повышения устойчивости конструкции. Пример механизма с «избыточным» звеном приводится в [1]. Линейная система уравнений для определения множителей Лагранжа для систем с избыточными связями является переопределенной. В большинстве случаев решение формулируется с помощью псевдообратной матрицы [2]. Обычно предполагается, что в системах с избыточными связями есть обобщенные координаты, которые однозначно описывают состояние системы. Ранг связей постоянный.

Геометрические особенности возникают, когда ранг связей может меняться от точки к точке. Особенности голономных или неголономных связей рассматриваются в небольшом числе работ. Движение балки с двумя коньками исследуется в статье [3]. В статье [4] рассматриваются бифуркации положений равновесия одномерной механической системы на плоскости с особенностью типа пересечения в зависимости от параметров связи. Геометрические особенности конфигурационного пространства встречаются как один из типов особенностей в теории параллельных механизмов [5]. В работе [6] исследуется движение материальной точки на поверхности конуса в рамках голономной механики и квантовой механики. Движение «парадоксального» механизма П. Л. Чебышёва изучается в статье автора [7].

В голономной механике обычно не рассматриваются силы, которые задают голономные



связи. С учетом способа реализации голономных связей возможно получить более точную физическую модель. В литературе существует несколько вариантов реализации голономных связей, таких как дополнительные массы или упругий потенциал [8, с. 53-60]. Начальные данные для системы с упругим потенциалом должны совпадать с начальными данными для голономной системы. Тогда траектории системы с упругим потенциалом должны стремиться к траекториям системы с голономными связями при увеличении параметра жесткости потенциала. В работе [9] данная реализация голономных связей доказана для консервативных систем. Случай более общих систем рассматривается в [10]. Движение с начальным вектором скорости, который не касается многообразия связей, исследуется в [11].

Метод с заменой сил реакций голономных связей упругим потенциалом с большим коэффициентом жесткости (жестким потенциалом) естественно обобщается для механических систем с особенностями конфигурационного пространства. Поэтому метод с жестким потенциалом применим для широкого класса механических систем. Но (возможная) сходимость траекторий является открытой задачей.

Основная цель данной работы — сформулировать и описать качественные эффекты, связанные с динамикой механической системы вблизи особенности типа касания. Для анализа рассматривается движение материальной точки по двум касающимся параболоидам.

Новизна работы заключается в применении методов реализации голономных связей для систем с геометрическими особенностями конфигурационного пространства. В рамках стандартной голономной механики движение через особые точки не описывается. Также теоретически построены траектории движения материальной точки при подходе к геометрической особенности для двойной поверхности вращения.

Для качественного описания динамики вблизи особенности вводятся новые понятия: «область возможного движения» и «сингулярная область». Делается численное моделирование траекторий. Получено, что траектории системы с жестким потенциалом могут качественно отличаться от траекторий движения системы с голономными связями. Например, траектория голономной системы проходит геометрическую особенность за нулевое время. Но траектория системы с жестким потенциалом может длительное время находиться в сингулярной области, последовательно «отражаясь» от границ области возможного движения. Быстрая смена вектора скорости и «ударные» движения могут приводить к неустойчивому режиму работы механизма.

Для построения уравнений движения для голономных систем и для систем с жестким потенциалом применяется общая теория уравнений Лагранжа [12, гл. 5]. Матричная форма уравнений приводится в [13, гл. 8]. В предыдущих статьях автора на примере сингулярного маятника рассматривалось движение голономных систем с особенностью типа пересечения или касания двух кривых на плоскости [14]. Обобщение динамики сингулярного маятника с помощью упругого потенциала исследуется в статье [15].

## 1. Двойная поверхность вращения

В данном разделе изучается движение материальной точки по подмножеству евклидова пространства, которое состоит из двух гладких поверхностей. Предполагается, что поверхности имеют касание первого порядка в одной изолированной точке (особой точке конфигурационного пространства). Основным интересом представляет движение через геометрическую особую точку. Динамика исследуется в рамках голономной механики.

**Симметричные поверхности.** Рассмотрим трехмерное евклидово пространство  $\mathbb{R}^3$ . Зафиксируем некоторую систему прямоугольных координат  $Oxyz$ . Пусть две поверхности  $M_+$  и  $M_-$  расположены в  $\mathbb{R}^3$  симметрично относительно плоскости  $Oxy$ :

$$M_+ = \{(x, y, z) : z = f(x, y)\}, \quad M_- = \{(x, y, z) : z = -f(x, y)\}. \quad (1)$$

Функция  $f(x, y) \geq 0$  является гладкой. Предположим, что поверхности  $M_+$  и  $M_-$  пересекаются в изолированной точке  $\mathbf{s} = (0, 0, 0)^T$ . Обозначение « $T$ » соответствует транспо-



нированию вектора или матрицы. Далее векторы рассматриваются как векторы-столбцы. Объединение двух поверхностей  $X = M_+ \cup M_-$  является многообразием с особенностями, а точка  $\mathbf{s}$  является особой точкой. В окрестности точки  $\mathbf{s}$  множество  $X$  не диффеоморфно евклидову пространству  $\mathbb{R}^2$ . Также в окрестности точки  $\mathbf{s}$  нет однозначных обобщенных координат.

Если множество  $X$  является конфигурационным пространством механической системы, то вблизи точки  $\mathbf{s}$  есть геометрическая возможность смены типа движения (переход с одной поверхности на другую). Движение в окрестности точки  $\mathbf{s}$  не описывается голономной механикой.

Для дальнейшего анализа предположим, что поверхности  $M_+$  и  $M_-$  являются поверхностями вращения вокруг оси  $Oz$ . Введем цилиндрическую систему координат, основная ось которой совпадает с осью  $Oz$ . Для произвольной точки  $P \in \mathbb{R}^3$  обозначим расстояние от точки  $P$  до оси  $Oz$  как  $r$ , координату  $z$  как  $h$  (высоту) и угол поворота точки  $P$  относительно оси  $Ox$  как  $\varphi$ . Для поверхностей  $M_+$  и  $M_-$  высота  $h$  является функцией расстояния —  $h = h(r)$ . Тогда из уравнения (1) получается следующая параметризация двух поверхностей:

$$M_+ = \{(r, \varphi, h) : h = h(r)\}, \quad M_- = \{(r, \varphi, h) : h = -h(r)\}, \quad X = M_+ \cup M_- \quad (2)$$

Координаты и скорости для точек поверхностей  $M_+$  и  $M_-$  в декартовых координатах выражаются через координаты и скорости в цилиндрических координатах (2):

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\varphi), & y &= r \sin(\varphi), & z &= h(r), \\ \dot{x} &= \dot{r} \cos(\varphi) - r \sin(\varphi) \dot{\varphi}, & \dot{y} &= \dot{r} \sin(\varphi) + r \cos(\varphi) \dot{\varphi}, & \dot{z} &= h'(r) \dot{r}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для функции  $h = r^2$  множество  $X$  состоит из двух касающихся параболоидов.

**Замечание 1.** В данной статье применяется метрическая система единиц СИ. Но для записи математических выражений формально необходим переход к безразмерным переменным. Поэтому переменные размерности «длины» делятся на 1 метр, переменные размерности «времени» делятся на 1 секунду, переменные размерности «массы» делятся на 1 кг. В формуле  $h = r^2$  величина  $r^2$  в размерном виде имеет размерность длины [м], а не площади [м<sup>2</sup>], как должно следовать из размерности длины для величины  $r$ . В общем случае формулы типа  $h = h(r)$  с точки зрения метрических соотношений означают, что длина  $h$  [м] равна величине

$$h(r[\text{м}]) := h\left(\frac{r[\text{м}]}{1\text{м}}\right) [\text{м}]$$

для вещественной функции  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Общая схема двух касающихся параболоидов показана на рис. 1. Точка  $P'$  соответствует проекции точки  $P$  на поверхности одного из параболоидов на плоскость  $Oxy$ . Также схематично показана траектория материальной точки, которая в особой точке  $\mathbf{s} = (0, 0, 0)^T$  может переходить с «верхней» поверхности на «нижнюю» поверхность.

Далее в статье изучается движение материальной точки по двойной поверхности с помощью методов голономной механики и методов реализации голономных связей через упругий потенциал.

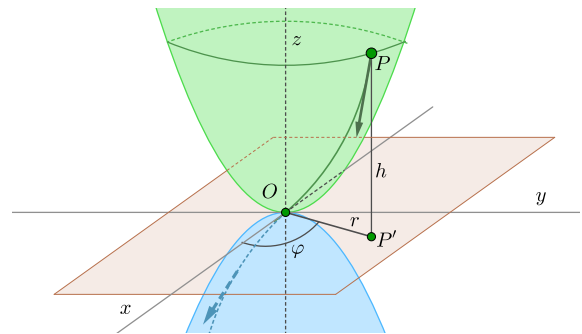


Рис. 1. Два касающихся параболоида с общей касательной плоскостью  $Oxy$   
Fig. 1. Two tangent paraboloids with common tangent plane  $Oxy$



## 2. Движение голономной системы

**Цилиндрические координаты.** Рассмотрим движение материальной точки массой  $m$  по множеству  $X$ , задаваемому уравнениями (2). Вне особой точки  $\mathbf{s} = (0, 0, 0)^T$  положение материальной точки однозначно параметризуется величинами  $(r, \varphi)$ . Проанализируем уравнения движения материальной точки по множеству  $X$  в цилиндрических координатах. Кинетическая энергия материальной точки

$$T = \frac{1}{2}m(1 + (h'(r))^2)(\dot{r})^2 + \frac{1}{2}mr^2(\dot{\varphi})^2. \quad (4)$$

Матрица кинетической энергии  $T$  в (4) имеет диагональный вид. Коэффициент  $1/2 mr^2$  перед множителем  $(\dot{\varphi})^2$  равен нулю при  $r = 0$ , поэтому матрица кинетической энергии (4) является положительно полуопределенной. Вне особой точки (при  $r \neq 0$ ) матрица кинетической энергии является положительно определенной. Уравнения Лагранжа второго рода для движения материальной точки по инерции имеют вид

$$m(1 + (h'(r))^2)\ddot{r} + mh'(r)h''(r)(\dot{r})^2 - mr(\dot{\varphi})^2 = 0, \quad mr^2\ddot{\varphi} + 2mr\dot{r}\dot{\varphi} = 0. \quad (5)$$

Из уравнений (5) следует, что ускорение  $\ddot{\varphi}$  формально не определено при  $r \rightarrow 0$ . При  $r = 0$  уравнения (5) фактически не зависят от  $\varphi$  и  $\dot{\varphi}$ , и условие задается только на ускорение  $\ddot{r}$ .

Для анализа траекторий движения материальной точки по инерции делается переход к уравнениям движения в форме Гамильтона:

– обобщенные импульсы

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m(1 + (h')^2)\dot{r}, \quad p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi};$$

– механическая энергия

$$H = \frac{p_r^2}{2m(1 + (h')^2)} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2};$$

– уравнения движения

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{p_r}{m(1 + (h')^2)}, & \dot{\varphi} &= \frac{p_\varphi}{mr^2}, \\ \dot{p}_r &= \frac{p_r^2}{m} \frac{h'h''}{(1 + (h')^2)^2} + \frac{p_\varphi^2}{mr^3}, & \dot{p}_\varphi &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Из последнего уравнения системы (6) следует, что импульс  $p_\varphi = J = \text{const}$ . Аналогичный случай для траекторий материальной точки на поверхности двойного конуса рассматривался в работе [6]. Возможно два различных варианта поведения траекторий. Пусть  $J \neq 0$ , тогда

$$H = \frac{1}{2}m(1 + (h')^2)(\dot{r})^2 + \frac{J^2}{2mr^2}.$$

Из сохранения механической энергии следует, что величина  $r$  ограничена и не может доходить до 0. Следовательно, любые траектории материальной точки на двойной поверхности вращения при  $J \neq 0$  не доходят до геометрической особенности  $\mathbf{s} = (0, 0, 0)^T$ .

Пусть теперь  $J = 0$ . Тогда из уравнений (6) следует, что:

$$\varphi = \text{const}, \quad H = H_0 = \frac{p_r^2}{2m(1 + (h')^2)}.$$



Значит, при  $p_\varphi = 0$  движение при  $r > 0$  идет вдоль плоскости  $\varphi = \text{const}$ . Четырехмерное движение переходит в двумерное движение. Также заметим, что при  $J = 0$  импульс

$$p_r = \pm \sqrt{2mH_0(1 + (h')^2)}$$

сохраняет знак при движении, так как выражение под корнем не меньше  $\sqrt{2mH_0}$ . Соответственно, скорость  $\dot{r}$  в (6) сохраняет знак при  $r \rightarrow 0$ . Траектория не имеет особенностей при  $r \rightarrow 0$ . Но движение с началом в особой точке  $\mathbf{s}$  не определено, так как уравнения (6) не продолжаются на  $r < 0$ , поскольку по определению  $r \geq 0$ . Поэтому для описания движения материальной точки через особенность нужно рассмотреть другую систему координат.

**Декартовы координаты.** Для дальнейшего анализа будем считать, что поверхности  $M_+$  и  $M_-$  являются параболоидами вращения. Множество  $X$  в системе координат  $Oxyz$  является объединением  $M_+$  и  $M_-$ . Параболоиды вращения  $M_+$  и  $M_-$  расположены симметрично относительно плоскости  $Oxy$  и задаются следующими голономными связями  $f_1$  и  $f_2$ :

$$f_1 = z - (x^2 + y^2) = 0, \quad f_2 = z + (x^2 + y^2) = 0. \quad (7)$$

Голономная связь  $f$  для двойного параболоида  $X$  является произведением двух голономных связей  $f_1$  и  $f_2$ , задаваемых уравнениями (7):

$$f = f_1 \cdot f_2 = z^2 - (x^2 + y^2)^2.$$

Градиенты связей  $f_1$  и  $f_2$ :

$$\nabla f_1 = (-2x, -2y, 1)^T, \quad \nabla f_2 = (2x, 2y, 1)^T.$$

В особой точке  $\mathbf{s} = (0, 0, 0)^T$  градиенты  $\nabla f_1$  и  $\nabla f_2$  не обращаются в ноль. Но градиент произведения связей

$$\nabla f = \nabla(f_1 f_2) = f_1 \nabla f_2 + f_2 \nabla f_1$$

обращается в ноль в особой точке  $\mathbf{s}$ , так как  $f_1(\mathbf{s}) = 0$  и  $f_2(\mathbf{s}) = 0$ .

Согласно предыдущему пункту только траектория движения в плоскости  $\varphi \equiv \text{const}$  может достигать геометрической особенности  $\mathbf{s}$ . В этом случае движение фактически происходит в сечении двойного параболоида плоскостью, проходящей через ось  $Oz$ . Такие сечения являются объединением двух касающихся парабол. Предположим, что в начальный момент времени материальная точка находится на первой параболе. Если траектория движения является гладкой кривой, то после прохождения особой точки (точки ветвления) с ненулевой скоростью траектория должна оставаться на первой параболе.

Уравнения Лагранжа первого рода для движения материальной точки массой  $m$  по первому параболоиду  $M_+$  в декартовых координатах  $\mathbf{q} = (x, y, z)^T$ :

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{q}} &= \lambda_1 \nabla f_1, \\ \nabla f_1^T \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T f_1'' \dot{\mathbf{q}} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Второе уравнение в (8) получается при дифференцировании связи (7) дважды по времени. Прямым вычислением проверяется, что для связи  $f_1$  в формуле (7)

$$\nabla f_1^T \nabla f_1 = 1 + 4x^2 + 4y^2, \quad \dot{\mathbf{q}}^T f_1'' \dot{\mathbf{q}} = -2(\dot{x})^2 - 2(\dot{y})^2, \quad \lambda_1 = m \cdot \frac{2(\dot{x})^2 + 2(\dot{y})^2}{1 + 4x^2 + 4y^2}. \quad (9)$$

В последнем уравнении  $f_1''$  обозначает матрицу вторых производных (матрицу Гессе) для связи  $f_1(\mathbf{q}) = 0$ . Уравнения (8) и (9) применяются для численного моделирования движения голономной системы с одной связью  $f_1(\mathbf{q}) = 0$ .



**Неопределенность движения.** Рассмотрим движение с голономной связью  $f$  вместо связи  $f_1$  в уравнениях (8). Предположим конечное значение величины  $\lambda$  в особой точке. Тогда в особой точке  $\mathbf{s}$ , учитывая  $\nabla f(\mathbf{s}) = 0$ ,

$$m\ddot{\mathbf{q}} = 0, \quad \dot{\mathbf{q}}^T f_1'' \dot{\mathbf{q}} = 0.$$

Из соотношения  $m\ddot{\mathbf{q}} = 0$  получаем мгновенное прямолинейное движение вдоль вектора скорости. Плоскость  $Oxy$  является касательной плоскостью к параболоидам  $M_+$  и  $M_-$  в точке  $\mathbf{s}$ . Тогда из условия  $\dot{\mathbf{q}}^T f_1'' \dot{\mathbf{q}} = 0$  получается, что  $(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 = 0$ , т. е. вектор скорости материальной точки должен быть равен нулю. Следовательно, для конечного значения множителя Лагранжа  $\lambda$  для связи  $f$  в особой точке  $\mathbf{s}$  траектория движения — это точка покоя  $\mathbf{q}(t) \equiv \mathbf{s}$ .

Уравнения движения голономной механики не описывают возможные изменения параметров системы (скорости, ветви движения) при прохождении траектории через геометрическую особенность  $\mathbf{s} = (0, 0, 0)^T$  в конфигурационном пространстве. Поэтому рассматривается другой метод, связанный с реализацией связей.

### 3. Реализация связей через упругий потенциал

В разделе исследуется модель движения материальной точки через геометрическую особую точку  $\mathbf{s} = (0, 0, 0)^T$  двойного параболоида вращения. Для описания динамики вблизи особенности применяется метод с упругим потенциалом, который моделирует голономную связь.

**Упругий потенциал.** Динамика механической системы с обобщенными координатами  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)^T \in \mathbb{R}^n$ , кинетической энергией  $T$ , обобщенными силами  $\mathbf{G}$  и голономными связями  $f_k(\mathbf{q}) = 0$ ,  $k = 1, \dots, m$  описывается уравнениями Лагранжа второго рода с неопределенными множителями  $\lambda_k$  [11, гл. 5]:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{G} + \lambda_k \sum_{k=1}^m \nabla f_k. \quad (10)$$

В голономной механике не рассматривается, какими силами реализуются голономные связи в уравнениях (10). Среди методов реализации голономных связей в основном рассматривается модель с упругим потенциалом [8]. В этой модели голономная связь «возникает» в результате действия упругого потенциала  $kW$  с большим коэффициентом жесткости  $k$ . Функция  $W$  должна быть равна нулю на многообразии  $M$  (которое задается связями  $f_k(\mathbf{q}) = 0$ , где  $k = 1, \dots, m$ ) и быть строго положительной вне  $M$ . Уравнения движения системы с потенциалом  $W$  и параметром жесткости  $k$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{G} - k \frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}}. \quad (11)$$

Для независимых голономных связей  $f_k(\mathbf{q}) = 0$ ,  $k = 1, \dots, m$ , в уравнении (11) можно положить

$$W = \sum_{k=1}^m c_k (f_k)^2,$$

где константы  $c_k$  положительны.

В работах [8] и [9] рассматривается реализация голономных связей через упругий потенциал  $kW$  при  $k \rightarrow \infty$ . При некоторых условиях гладкости на коэффициенты уравнений (11) показано, что для конечного интервала времени  $[t_1, t_2]$  траектория движения системы с упругим потенциалом (11) сходится к траектории движения системы со связями (10) при  $k \rightarrow \infty$ . Сходимость получается для координат и скоростей траекторий, сходимость для



ускорений будет только в среднем. Начальные данные для траектории системы с потенциалом (11) должны быть согласованы с многообразием связей, т. е.  $\mathbf{q}_0 \in M$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_0 \in T_{\mathbf{q}_0}M$ .

Метод с упругим потенциалом применялся для доказательства реализации голономных связей для механических систем с гладким конфигурационным пространством. Но данный метод естественно обобщается на механические системы с особенностями конфигурационного пространства.

Упругий потенциал с большим параметром жесткости далее называется жестким потенциалом.

**Цилиндрические координаты.** Запишем уравнения движения материальной точки по двойному параболоиду  $X$  в форме уравнений Гамильтона в цилиндрических координатах. Покажем, что в модели с жестким потенциалом только траектории движения в плоскости  $\varphi = \text{const}$  могут проходить через особую точку  $\mathbf{s} = (0, 0, 0)^T$ . Определим потенциал  $W$ , который равен нулю на множестве  $X$  и строго больше нуля вне множества  $X$ , как квадрат связи  $f = f_1 f_2$  в (7):

$$W = (f_1 f_2)^2 = (z^2 - (x^2 + y^2)^2)^2 = (h^2 - r^4)^2. \quad (12)$$

Кинетическая энергия материальной точки в цилиндрических координатах определяется формулой

$$T = \frac{1}{2} m \left( (\dot{r})^2 + r^2 (\dot{\varphi})^2 + (\dot{h})^2 \right);$$

обобщенные импульсы —

$$p_r = m\dot{r}, \quad p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}, \quad p_h = m\dot{h};$$

гамильтониан —

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + \frac{p_h^2}{2m} + k \cdot (h^2 - r^4)^2.$$

Не будем выписывать полную систему уравнений движения, но заметим, что они содержат следующие два уравнения:

$$\dot{p}_\varphi = 0, \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}. \quad (13)$$

Обозначим  $p_\varphi = J = \text{const}$ . Если  $J \neq 0$ , то траектория движения (13) не может приблизиться к значению  $r = 0$  для конечной энергии  $H$ .

Если  $J = 0$ , то  $\dot{\varphi} = 0$ , т. е. угол  $\varphi$  является константой для траектории. Следовательно, только траектории с  $\varphi = \text{const}$  могут достичь особой точки  $\mathbf{s} = (0, 0, 0)^T$ . Начальный вектор скорости такой траектории должен быть направлен в плоскости  $\varphi = \text{const}$ . Траектория лежит в плоскости, проходящей через ось вращения двойного параболоида. Уравнения движения в цилиндрических координатах содержат особенности при  $r \rightarrow 0$ , поэтому для численной модели применяются другие координаты.

**Декартовы координаты.** Для построения численной модели движения материальной точки вблизи двойного параболоида  $X$  запишем уравнения движения с упругим (жестким) потенциалом (12) в декартовых координатах с параметром жесткости  $k$ :

$$\begin{aligned} m \frac{dx}{dt} &= -k \cdot \frac{dW}{dx} = 8k \cdot (z^2 - (x^2 + y^2)^2) \cdot (x^2 + y^2) \cdot x, \\ m \frac{dy}{dt} &= -k \cdot \frac{dW}{dy} = 8k \cdot (z^2 - (x^2 + y^2)^2) \cdot (x^2 + y^2) \cdot y, \\ m \frac{dz}{dt} &= -k \cdot \frac{dW}{dz} = -4k \cdot (z^2 - (x^2 + y^2)^2) \cdot z. \end{aligned} \quad (14)$$

Уравнения движения (14) не имеют особенностей типа вырожденной матрицы кинетической энергии, как для цилиндрических координат. Поэтому для численного анализа применяются декартовы координаты.

Рассматривается движение вдоль плоскости  $\varphi = 0$ . В этом случае траектория движения теоретически может проходить через особую точку  $\mathbf{s} = (0, 0, 0)^T$ . Для численной модели задаются начальное положение  $\mathbf{q}_0 = (r_0, h_0)^T$  и начальная скорость  $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{r}_0, \dot{h}_0)^T$ . Начальные условия  $(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)^T \in T\mathbb{R}^3$  берутся на поверхности верхнего параболоида  $M_+$  по выражениям (3).

Интерес представляет общее поведение траектории системы с жестким потенциалом вблизи геометрической особенности. При движении в плоскости  $\varphi \equiv \text{const} = 0$  траектория движения системы с дополнительным потенциалом (12) движется около сечения двойного параболоида вращения плоскостью  $\varphi \equiv 0$ , т. е. объединения двух парабол. Пространственная задача переходит в плоскую.

**Ограничения динамики.** Сформулируем некоторые определения в динамике голономных систем с геометрическими особенностями, когда голономная связь реализуется с помощью жесткого потенциала. Эти определения формализуют наблюдения, полученные при численном моделировании траекторий движения для данного класса механических систем.

**Определение 1.** Область возможного движения (или положения) механической системы — это область конфигурационного пространства механической системы с жестким потенциалом, которая является проекцией множества  $H(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \leq H_0$  для заданной максимальной механической энергии  $H_0$ .

Когда параметр жесткости возрастает, то траектория механической системы с упругим потенциалом (12) все меньше отклоняется от исходного конфигурационного пространства с особенностями [15]. Поэтому область возможного движения «сужается» до малой окрестности множества  $X$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Для движения материальной точки вблизи двойного параболоида по инерции потенциальная энергия и кинетическая энергия являются положительными функциями:

$$H = H_0 = \frac{1}{2}mv^2 + k \cdot (h^2 - r^4)^2.$$

При движении по связи  $(h^2 - r^4)^2 \equiv 0$ . Максимальное отклонение  $\varepsilon = (h^2 - r^4)^2$  от связи соответствует максимальной потенциальной энергии при  $v = 0$ :

$$k \cdot (h^2 - r^4)^2 \leq H_0. \quad (15)$$

Границей области возможного движения являются значения  $(h, r)$ , при которых в неравенстве (15) достигается равенство. Получаются следующие четыре кривые:  $h_{upp}(r)$ ,  $h_{low}(r)$ ,  $r_{right}(h)$ ,  $r_{left}(h)$ , которые ограничивают движение системы:

$$\begin{aligned} h_{upp}(r) &= \sqrt{r^4 + \sqrt{\frac{H_0}{k}}}, & h_{low}(r) &= -\sqrt{r^4 + \sqrt{\frac{H_0}{k}}}, \\ r_{right}(h) &= \sqrt[4]{h^2 + \sqrt{\frac{H_0}{k}}}, & r_{left}(h) &= -\sqrt[4]{h^2 + \sqrt{\frac{H_0}{k}}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Кривые (16) можно сравнить со «стенками», о которые при движении «ударяется» материальная точка. Моделирование показывает, что когда материальная точка приближается к границе области (16), то ее вектор скорости быстро меняется, как при упругом ударе о неудерживающую связь. Геометрически при этом вектор скорости в пространстве  $T\mathbb{R}^3$  становится почти вертикальным.

**Численное моделирование.** Для моделирования движения голономной системы по верхнему параболоиду  $M_+$  применялись уравнения (8) и (9). При моделировании соответствующей системы с жестким потенциалом применялись уравнения (14). Граница области



возможного движения строилась по формулам (16). В начальный момент времени материальная точка находится на параболоиде  $M_+$ . Начальный вектор скорости лежит в плоскости, проходящей через ось вращения параболоидов  $M_+$  и  $M_+$  и касается параболоида  $M_+$ . Заданы значения  $r_0$  и  $\dot{r}_0 < 0$ , при этом  $\varphi \equiv 0$ . Начальные данные для траектории с упругим потенциалом определялись по выражениям (3).

Для большой жесткости  $k$  система с жестким потенциалом (14) разбивается на быстро-медленную систему. Обобщенные координаты меняются медленно, обобщенные скорости меняются быстро. Поэтому необходимо учитывать возможную жесткость системы (14) и переменный шаг интегрирования. Для численного решения применяется метод LSODA (Livermore Solver for Ordinary Differential Equation) с автоматическим определением жесткости системы.

Численное интегрирование уравнений движения делалось на языке Python. Движение материальной точки вблизи двойного параболоида получено с применением метода LSODA из библиотеки `scipy`. При моделировании задавались следующие параметры: абсолютная погрешность  $10^{-10}$ , относительная погрешность  $10^{-10}$ . Графики траекторий строились в библиотеке `matplotlib`. Для построения графиков диапазон значений по осям  $Ox$  и  $Oz$  подбирался для приведения графиков движения для разных значений параметра жесткости  $k$  к «стандартной форме»:

$$x_{\max} = 2\sqrt[8]{\frac{H_0}{k}}, \quad x_{\min} = -2\sqrt[8]{\frac{H_0}{k}}, \quad z_{\max} = x_{\max}^2, \quad z_{\min} = -x_{\max}^2.$$

Координаты  $x_{\max}$  и  $x_{\min}$  получены как удвоенные координаты пересечения границы области возможного движения (16) с осью  $Ox$ . Графики траекторий в плоскости  $\varphi = 0^\circ$  показаны на рис. 2, 3.

**Аналогия с движением голономной системы.** При движении материальной точки по инерции с начальными условиями  $r_0 = 1$  м и  $\dot{r}_0 = -1$  м/с координата  $x$  меняется от 1 м до  $-\infty$ . После прохождения особенности двойного параболоида гладкая траектория движения материальной точки должна продолжить движение по верхней параболы. Система проходит особенность за нулевое время. Поэтому естественно предположить, что аналогичные свойства будут и у системы с упругим потенциалом с достаточно большим параметром жесткости  $k$ .

**Типичное движение системы с упругим потенциалом.** Было сделано моделирование траекторий для системы (14). На рис. 2 показаны типичные формы траекторий для различных параметров жесткости  $k$  при одинаковых начальных данных:  $m = 1$  кг,  $r_0 = 1$  м,  $\varphi_0 = 0^\circ$ ,  $\dot{r}_0 = -1.0$  м/с.

На рис. 3 показаны графики координаты  $z(t)$  для системы с жестким потенциалом (14) (синий), координаты  $z(t)$  для системы с голономной связью (8) (зеленый) и некоторые ограничения на выход из «сингулярного прямоугольника» (красный).

При численном моделировании получены следующие наблюдения, в которых сформулированы отличия динамики голономной системы (8) от системы с жестким потенциалом (14).

**Наблюдение 1.** Траектория движения голономной системы переходит из области  $x \geq 0$  в область  $x \leq 0$ , координата  $x(t) \rightarrow -\infty$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Траектория движения системы с жестким потенциалом совершает некоторые колебания вблизи сингулярной области, периодически переходя между полуплоскостями  $x \geq 0$  и  $x \leq 0$ .

**Наблюдение 2.** Гладкое движение голономной системы происходит вдоль верхней параболы. Движение системы с жестким потенциалом может происходить как в малой окрестности верхней параболы, так и в малой окрестности нижней параболы.

**Наблюдение 3.** Траектория голономной системы проходит через особую точку мгновенно. Траектория движения системы с жестким потенциалом может некоторое (конечное) время двигаться вблизи особой точки. В этом случае происходит несколько последовательных «отражений» траектории вблизи границы области возможного движения. В примере на рис. 4 траектория более 15 с находится в малой окрестности особой точки.

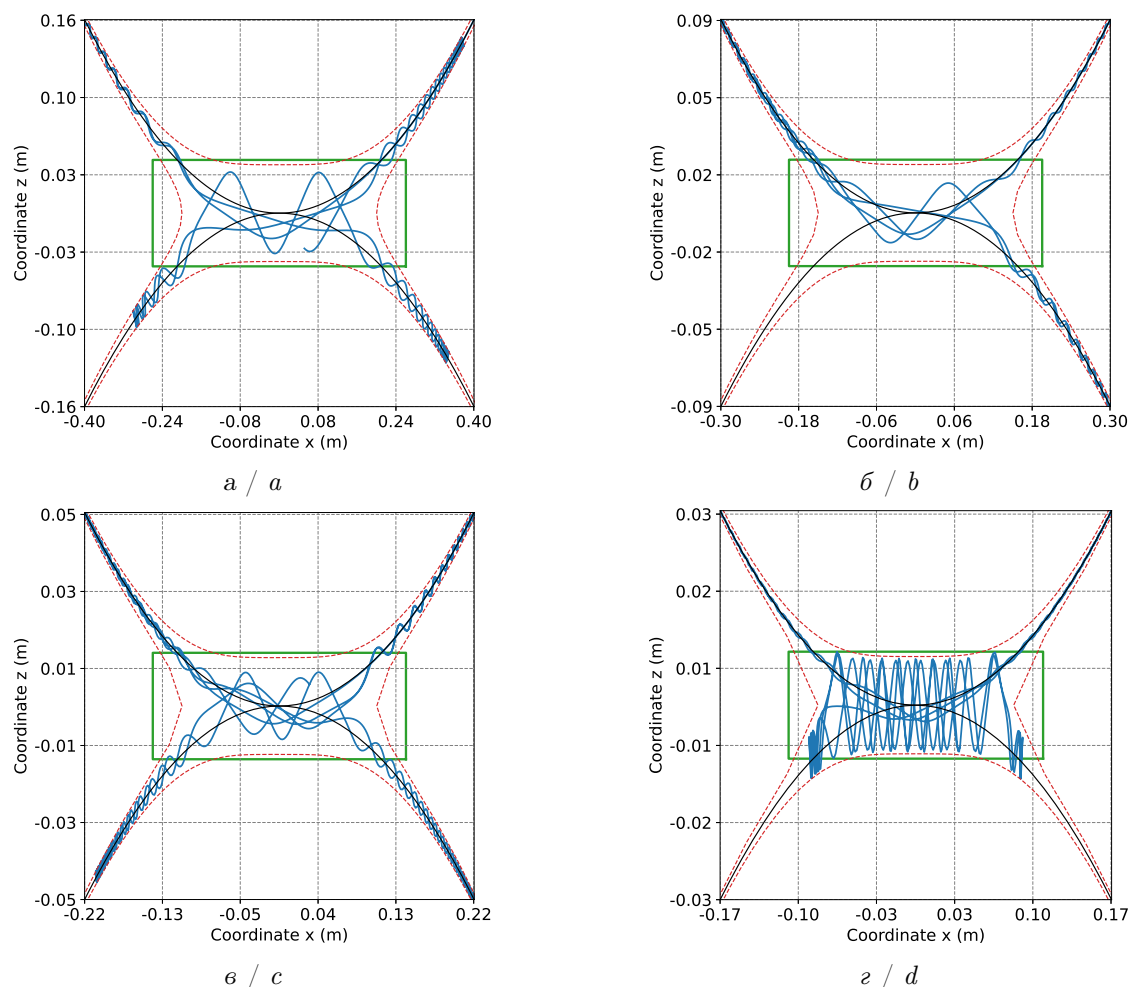


Рис. 2. Траектории движения материальной точки вблизи поверхности двойного параболоида в плоскости  $\varphi \equiv 0^\circ$  для параметров жесткости:  $a - k = 10^6$ ;  $b - k = 10^7$ ;  $c - k = 10^8$ ;  $d - k = 10^9$ . Начальные условия:  $r_0 = 1$  м,  $\dot{r}_0 = -1$  м/с,  $\Delta t = 3$  с. Синий — траектория движения системы в плоскости  $Oxz$ ; черный — две касающиеся параболы как сечение двойного параболоида  $X$ ; красный — граница области возможного движения (16); зеленый — «сингулярный прямоугольник» (цвет онлайн)

Fig. 2. Trajectories of motion of a material point near the surface of a double paraboloid in the plane  $\varphi \equiv 0^\circ$  for the stiffness parameters:  $a$  is  $k = 10^6$ ;  $b$  is  $k = 10^7$ ;  $c$  is  $k = 10^8$ ;  $d$  is  $k = 10^9$ . Initial conditions:  $r_0 = 1$  m,  $\dot{r}_0 = -1$  m/sec,  $\Delta t = 3$  sec. Blue — the trajectory of the system's motion in the  $Oxz$  plane; black — two tangential parabolas as a section of the double paraboloid  $X$ ; red — the boundary of the possible motion region (16); green — “singular rectangle” (color online)

**Замечание 2.** Описанные в данном пункте построения для движения материальной точки можно обобщить для начального анализа конкретных механических систем, конфигурационное пространство которых имеет особенность типа двух симметричных касающихся поверхностей в пространстве или двух касающихся кривых на плоскости.

**Область перехода.** При анализе численных траекторий движения системы (14) можно сделать следующее замечание. Для двух касающихся парабол (как сечения двойного параболоида вертикальной плоскостью) около особой точки есть область, в которой материальная точка может перейти с одного типа движения (вблизи первой параболы) на другой тип (вблизи второй параболы). Данную область можно заключить в «сингулярный прямоугольник», который показан на рис. 2 зеленым цветом.

Если координата  $z$  траектории системы (14) выходит за сингулярный прямоугольник, то данную точку траектории можно однозначно сопоставить с верхней или нижней параболой. По координатам  $(x, z)$  можно соотнести положение материальной точки с опре-



деленной ветвью движения. Если изображающая точка системы находится в сингулярном прямоугольнике, то положение системы «сложно соотнести» с одной параболой (см. рис. 4).

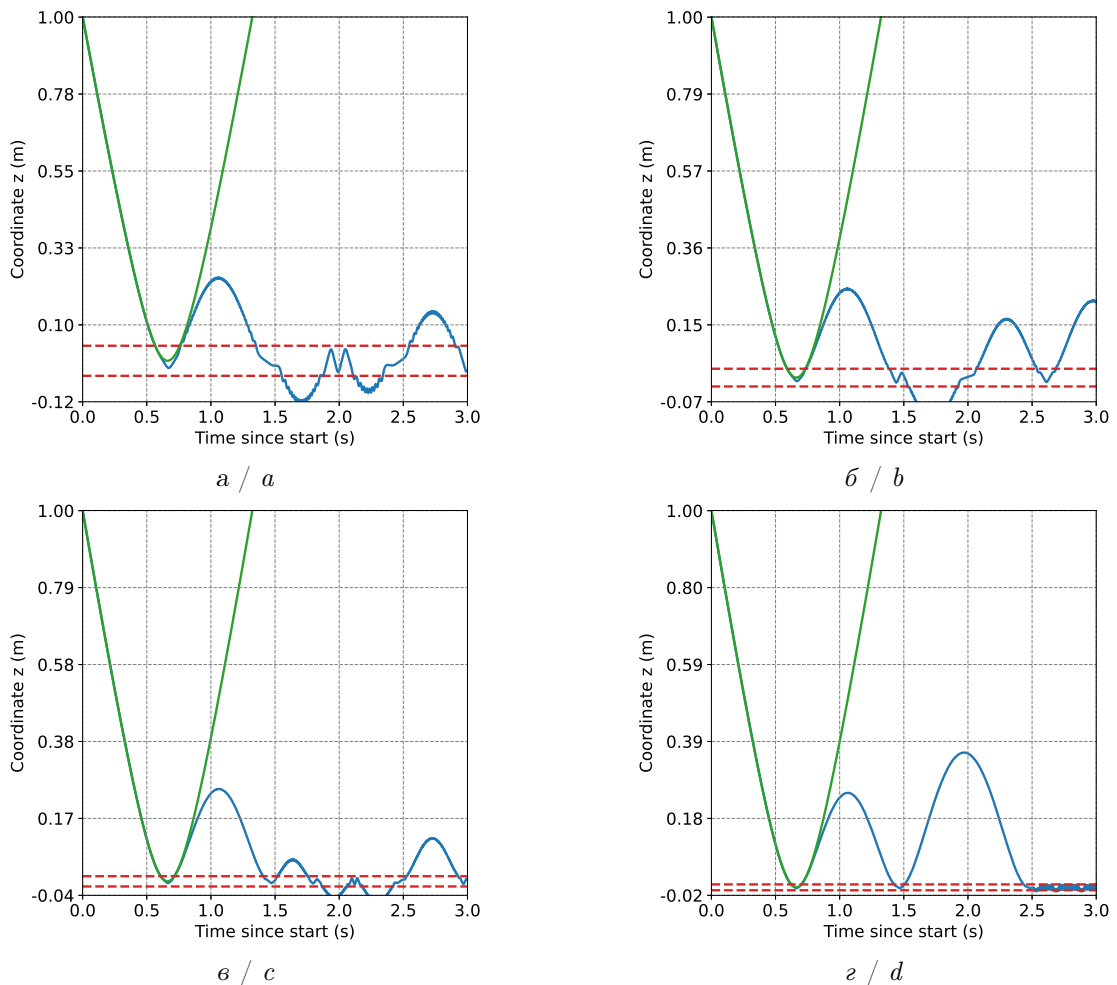


Рис. 3. Траектории движения материальной точки в плоскости  $\varphi \equiv 0^\circ$  для параметров жесткости:  $a - k = 10^6$ ;  $b - k = 10^7$ ;  $c - k = 10^8$ ;  $d - k = 10^9$ . Начальные условия:  $r_0 = 1$  м,  $\dot{r}_0 = -1$  м/с,  $\Delta t = 3$  с. Синий — график координаты  $z(t)$  для системы с жестким потенциалом (14); зеленый — график координаты  $z(t)$  для системы с голономной связью (8); красный — некоторые ограничения на выход из «сингулярного прямоугольника» (цвет онлайн)

Fig. 3. Trajectories of motion of a material point in the plane  $\varphi \equiv 0^\circ$  for the stiffness parameters:  $a$  is  $k = 10^6$ ;  $b$  is  $k = 10^7$ ;  $c$  is  $k = 10^8$ ;  $d$  is  $k = 10^9$ . Initial conditions:  $r_0 = 1$  m,  $\dot{r}_0 = -1$  m/sec,  $\Delta t = 3$  sec. Blue — graph of the  $z(t)$  coordinate for a system with a rigid potential (14); green — graph of the  $z(t)$  coordinate for a system with holonomic coupling (8); red — some restrictions on exiting “singular rectangle” (color online)

Для анализа траекторий общих механических систем с геометрическими особенностями можно ввести несколько определений, которые расширяют понятие «особой точки» до «особой области» для движения механических систем, в которых голономные связи реализуются с помощью жесткого потенциала.

В общем случае рассматривается конфигурационное пространство  $X$ , состоящее из объединения нескольких гладких многообразий,  $M_1, M_2, \dots, M_p$ , в объемлющем пространстве  $\mathbb{R}^N$ . Многообразия  $M_1, M_2, \dots, M_p$  могут иметь точки пересечения, в которых геометрически возможна смена типа движения голономной системы. Движение вне точек пересечения определяется уравнениями типа (10) для одного многообразия  $M_k$ , где  $k \in \overline{1, p}$ . Движение голономной системы не определено в особых точках  $s \in X$ . Поэтому движение исследуется с помощью введения упругого (жесткого) потенциала  $W$  (11).

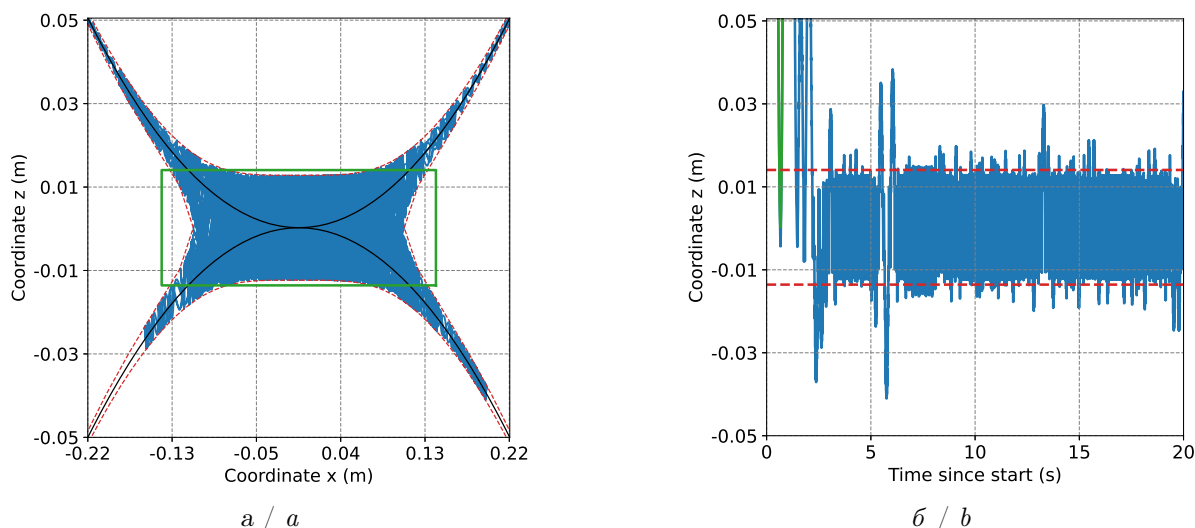


Рис. 4. Траектория движения материальной точки на поверхности двойного параболоида в плоскости  $\varphi \equiv 0^\circ$  для параметра  $k = 10^8$ . Начальные условия:  $r_0 = 1$  м,  $\dot{r}_0 = -1$  м/с,  $\Delta t = 20$  с. На рис. 4, а: зеленый — вариант сингулярного прямоугольника (области перехода); синий — график координаты  $z(t)$  для системы с жестким потенциалом (14) в плоскости  $Oxz$ ; красный — граница области возможного движения (16); черный — две касающиеся параболы как сечение двойного параболоида (12). На рис. 4, б: зеленый — график координаты  $z(t)$  для системы с голономной связью (8); синий — график координаты  $z(t)$  для системы с жестким потенциалом (14); красный — верхняя и нижняя граница сингулярного прямоугольника по координате  $z(t)$ , как на рис. 4, а (цвет онлайн)

Fig. 4. Trajectory of motion of a material point on the surface of a double paraboloid in the plane  $\varphi \equiv 0^\circ$  for the parameter  $k = 10^8$ . Initial conditions:  $r_0 = 1$  m,  $\dot{r}_0 = -1$  m/sec,  $\Delta t = 20$  sec. In Fig. 4, a: green — a variant of the singular rectangle (transition region); blue — a graph of the coordinate  $z(t)$  for a system with a hard potential (14) in the  $Oxz$  plane; red — the boundary of the possible motion region (16); black — two tangential parabolas as a section of a double paraboloid (12). In Fig. 4, b: green — graph of the coordinate  $z(t)$  for the system with holonomic coupling (8); blue — graph of the coordinate  $z(t)$  for the system with a hard potential (14); red — upper and lower boundary of the singular rectangle in the coordinate  $z(t)$  as in Fig. 4, a (color online)

**Определение 2.** Область определенности — это подмножество области возможных положений системы с жестким потенциалом, точки которого можно однозначно соотнести с одним из гладких многообразий  $M_1, M_2, \dots, M_p$ , составляющих конфигурационное пространство  $X$ .

**Определение 3.** Сингулярная область — это подмножество области возможных положений системы с жестким потенциалом, в котором допустим быстрый переход между разными типами движения (вблизи одного из многообразий  $M_1, M_2, \dots, M_p$ ).

Ветви движения отличаются гладким многообразием, в малой окрестности которого происходит движение системы с жестким потенциалом.

На рис. 4 показано, что траектория системы с жестким потенциалом может двигаться вблизи двух парабол, обходя как верхнюю, так и нижнюю параболу. С точки зрения голономной механики переход с верхней параболы на нижнюю параболу соответствует «негладкому» движению. Если рассмотреть траектории на более длительном интервале времени, то изображающая точка достаточно плотно замечает сингулярную область (см. рис. 4). На рис. 2 и 3 показано, что траектория движения материальной точки при сужении области возможного движения переходит на «возвратное» движение.

## Заключение

При моделировании движения материальной точки по двойному параболоиду было получено, что траектории голономной системы и траектории соответствующей системы с



жестким потенциалом качественно отличаются. В рассматриваемом случае, когда траектория может проходить через особенность, пространственная задача переходит в плоскую задачу о движении материальной точки вблизи двух касающихся парабол.

Траектории голономной системы неограниченно движутся в одну сторону. Траектории движения системы с жестким потенциалом обычно не продолжаются неограниченно в одну сторону от двух парабол, а совершают некоторые колебания в окрестности особой точки. Для рассмотренных примеров траекторий с увеличением жесткости поведение траекторий качественно не меняется. Траектории движения системы с жестким потенциалом можно разбить на несколько участков:

- движение в области определенности, вблизи одной из парабол;
- движение в сингулярной области, в которой траектория может быстро изменить тип движения (перейти с малой окрестности верхней параболы на малую окрестность нижней параболы);
- быстрые колебания в сингулярной области, когда двумерное движение фактически переходит в последовательность одномерных «импульсных ударов» вблизи границы области возможного движения.

Траектории голономной системы проходят геометрическую особенность за нулевое время. Но траектории системы с жестким потенциалом могут находиться в сингулярной области длительное время, которое можно наблюдать. Если некоторая механическая система окажется в такой модельной сингулярной области, то последовательность быстрых смен направлений движения может привести к поломке. Поэтому необходимо учитывать возможность выхода системы на сингулярный режим движения.

### Список литературы

1. Yang L., Xue S., Yao W. A regularization method for solving the redundant problems in multibody dynamic system // Journal of Physics: Conference Series. 2020. Vol. 1634. Art. 012100. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1634/1/012100>
2. Mukharlyamov R. G., Deressa C. T. Dynamic equations of controlled Mechanical system with redundant holonomic constraints // Вестник Казанского технологического университета. 2014. Т. 17, № 11. С. 236–242. EDN: SHKDYR
3. Закалюкин И. В. Особенности вырождения неголономных связей и управляемость // Труды МАИ. 2010. № 39. С. 1–18. EDN: MTIBHR
4. Самсонов В. А., Михалев А. А. Перестройка пространства положений механической системы // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2005. № 4. С. 13–16. EDN: HRVSYR
5. Zlatanov D., Fenton R. G., Benhabib B. A unifying framework for classification and interpretation of mechanism singularities // Journal of Mechanical Design. 1995. Vol. 117, iss. 4. P. 566–572. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.2826720>
6. Kowalski K., Rembieliński J. On the dynamics of a particle on a cone // Annals of Physics. 2013. Vol. 329. P. 146–157. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.aop.2012.10.003>, EDN: RRDOKD
7. Бурьян С. Н. «Парадоксальный» механизм П. Л. Чебышёва // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 4. С. 536–551. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-536-551>, EDN: NZJSQK
8. Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. Москва : ВИНТИ, 1985. 304 с.
9. Rubin H., Ungar P. Motion under a strong constraining force // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1957. Vol. 10. P. 65–87. DOI: <https://doi.org/10.1002/CPA.3160100103>
10. Козлов В. В., Нейштадт А. И. О реализации голономных связей // Прикладная математика и механика. 1990. Т. 54, № 5. С. 858–861.
11. Takens F. Motion under influence of a strong constraining force // Global theory of dynamical systems / eds. Z. Nitecki, C. Robinson. Berlin ; Heidelberg : Springer, 1980. P. 425–445. (Lecture Notes in Mathematics, vol. 819). DOI: <https://doi.org/10.1007/BFb0087006>
12. Поляхов Н. Н., Зегезда С. А., Юшков М. П., Товстик П. Е., Солтаханов Ш. Х., Филиппов С. Б., Петрова В. И. Теоретическая и прикладная механика : в 2 т. Т. I: Общие вопросы теоретической механики. Санкт-Петербург : Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2022. 560 с.
13. Журавлев В. Ф. Основы теоретической механики. Москва : Физматлит, 2001. 320 с.
14. Бурьян С. Н. Силы реакции сингулярного маятника // Вестник Санкт-Петербургского уни-



верситета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9, № 2. С. 278–293. DOI: <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.209>, EDN: GCBILE

15. Бурьян С. Н. Сильные связи в динамике систем с геометрическими особенностями // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2024. Т. 30, № 3. С. 53–67. DOI: <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2024-30-3-53-67>, EDN: BOLUFQ

### References

1. Yang L., Xue S., Yao W. A regularization method for solving the redundant problems in multibody dynamic system. *Journal of Physics: Conference Series*, 2020, vol. 1634, art. 012100. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1634/1/012100>
2. Mukharlyamov R. G., Deressa C. T. Dynamic equations of controlled Mechanical system with redundant holonomic constraints. *Vestnik of Kazan Technological University*, 2014, vol. 17, iss. 11, pp. 236–242. EDN: SHKDYR
3. Zakalyukin I. V. Peculiarities of the degeneracy of nonholonomic constraints and controllability. *Trudy MAI*, 2010, iss. 39, pp. 1–18 (in Russian). EDN: MTIBHR
4. Samsonov V. A., Mikhalev A. A. Restructuring of the position space of a mechanical system. *Problems of Mechanical Engineering and Reliability of Machines*, 2005, vol. 4, pp. 13–16 (in Russian). EDN: HRVSYR
5. Zlatanov D., Fenton R. G., Benhabib B. A unifying framework for classification and interpretation of mechanism singularities. *Journal of Mechanical Design*, 1995, vol. 117, iss. 4, pp. 566–572. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.2826720>
6. Kowalski K., Rembieliński J. On the dynamics of a particle on a cone. *Annals of Physics*, 2013, vol. 329, pp. 146–157. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.aop.2012.10.003>, EDN: RRDOKD
7. Burian S. N. The “paradoxical” mechanism of P. L. Chebyshev. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 4, pp. 536–551 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-536-551>, EDN: NZJSQK
8. Arnold V. I., Kozlov V. V., Neistadt A. I. *Mathematical aspects of classical and celestial mechanics*. Berlin, Heidelberg, Springer, 2010. 505 p. (Russ. ed.: Moscow, VINITI, 1985. 304 p.).
9. Rubin H., Ungar P. Motion under a strong constraining force. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1957, vol. 10, pp. 65–87. DOI: <https://doi.org/10.1002/CPA.3160100103>
10. Kozlov V. V., Neistadt A. I. On the implementation of holonomic connections in dynamics. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1990, vol. 54, iss. 5, pp. 858–861 (in Russian).
11. Takens F. Motion under influence of a strong constraining force. In: Nitecki Z., Robinson C. (eds.) *Global theory of dynamics systems*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 819. Berlin, Heidelberg, Springer, 1980, pp. 425–445. DOI: <https://doi.org/10.1007/BFb0087006>
12. Polyakhov N. N., Yushkov M. P., Zegzhda S. A., Tovstik P. E. *Rational and applied mechanics. Vol. 1. Complete general course for students of engineering*. Cham, Springer, 2021. 520 p. (Russ. ed.: St. Petersburg, St. Petersburg University Publ., 2022. 560 p.).
13. Zhuravlev V. F. *Osnovy teoreticheskoy mekhaniki* [Fundamentals of theoretical mechanics]. Moscow, Fizmatlit, 2001. 320 p. (in Russian).
14. Burian S. N. Reaction forces of singular pendulum. *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics*, 2022, vol. 55, pp. 192–202. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063454122020054>
15. Burian S. N. Strong constraints in the dynamics of systems with geometric singularities. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, iss. 3, pp. 53–67 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2024-30-3-53-67>, EDN: BOLUFQ

Поступила в редакцию / Received 01.03.2025

Принята к публикации / Accepted 06.06.2025

Опубликована / Published 28.11.2025