



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 4. С. 513–523

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 4, pp. 513–523

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-513-523>

EDN: <https://elibrary.ru/KMPNKO>

Научная статья

УДК 539.3

## Решение задачи об изгибе многосвязной кусочно-однородной электромагнитоупругой тонкой плиты

С. А. Калоеров, О. Э. Ермаков<sup>✉</sup>

Донецкий государственный университет, Россия, 283001, г. Донецк, ул. Университетская, д. 24

**Калоеров Стефан Алексеевич**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории упругости и вычислительной математики им. акад. А. С. Космодамианского, [kaloerov@mail.ru](mailto:kaloerov@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0003-1339-6035>, SPIN: 8113-1310, AuthorID: 1049003

**Ермаков Олег Эдуардович**, аспирант кафедры теории упругости и вычислительной математики им. акад. А. С. Космодамианского, [ermakov.donetsk@mail.ru](mailto:ermakov.donetsk@mail.ru), <https://orcid.org/0009-0007-4854-4209>, SPIN: 7090-2033, AuthorID: 1247657

**Аннотация.** С использованием комплексных потенциалов теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит получено решение задачи об изгибе многосвязной пьезоплиты с эллиптическими включениями из других материалов. При этом функции, голоморфные вне отверстий, представлены рядами Лорана, а функции, голоморфные во включениях, — рядами по полиномам Фабера. Удовлетворением граничным условиям на контурах контактов плиты и включений, обобщенным методом наименьших квадратов, определение неизвестных коэффициентов рядов сведено к переопределенной системе линейных алгебраических уравнений, решаемой методом сингулярного разложения. Описаны результаты численных исследований для плиты с двумя круговыми или линейными включениями. Исследованы закономерности влияния физико-механических свойств материалов и геометрических характеристик включений на значения изгибающих моментов и коэффициентов интенсивности моментов для концов линейных включений.

**Ключевые слова:** пьезоплита, пьезовключения, комплексные потенциалы, обобщенный метод наименьших квадратов, изгибающие моменты

**Для цитирования:** Калоеров С. А., Ермаков О. Э. Решение задачи об изгибе многосвязной кусочно-однородной электромагнитоупругой тонкой плиты // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 4. С. 513–523. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-513-523>, EDN: KMPNKO

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## Solution of the problem on bending of a multiconnected piecewise homogeneous electromagnetoelastic thin plate

S. A. Kaloerov, O. E. Ermakov<sup>✉</sup>

Donetsk State University, 24 Universitetskaya St., Donetsk 283001, Russia

**Stefan A. Kaloerov**, [kaloerov@mail.ru](mailto:kaloerov@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0003-1339-6035>, SPIN: 8113-1310, AuthorID: 1049003

**Oleg E. Ermakov**, [ermakov.donetsk@mail.ru](mailto:ermakov.donetsk@mail.ru), <https://orcid.org/0009-0007-4854-4209>, SPIN: 7090-2033, AuthorID: 1247657



**Abstract.** Using the complex potentials of the theory of bending of thin electromagnetoelastic plates, a solution has been obtained to the problem of bending a multiconnected piezoplate with elliptical inclusions made of other materials. In this case, functions holomorphic outside the holes are represented by Laurent series, and functions holomorphic in inclusions are represented by Faber polynomial series. By satisfying the boundary conditions on the contact contours of the plate and inclusions using the generalized least squares method, the determination of unknown coefficients of the series is reduced to an overriden system of linear algebraic equations solved by the singular value decomposition method. The results of numerical studies for a plate with two circular or linear inclusions are described. The patterns of the influence of the physical and mechanical properties of materials and geometric characteristics of inclusions on the values of bending moments and coefficients of the moment intensity for the ends of linear inclusions are investigated.

**Keywords:** piezoplate, piezoinclusions, complex potentials, generalized least squares method, bending moments

**For citation:** Kaloerov S. A., Ermakov O. E. Solution of the problem on bending of a multiconnected piecewise homogeneous electromagnetoelastic thin plate. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 4, pp. 513–523 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-513-523>, EDN: KMPNKO

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Элементы различных конструкций современной техники изготавливаются из пьезоматериалов [1–7]. Часто такие элементы находятся в условиях изгиба тонких плит, имеют отверстия, трещины и инородные включения. При различных механических и электромагнитных воздействиях вблизи контуров этих отверстий, трещин и включений возникают высокие концентрации моментов (напряжений), что нужно учитывать при проектировании соответствующих конструкций. А для этого нужно иметь надежные методы определения электромагнитоупругого состояния (ЭМУС) многосвязных тонких плит.

Как показывают исследования, наиболее достоверные результаты по определению ЭМУС многосвязных плит получаются при решении задач с использованием комплексных потенциалов электромагнитоупругости [8].

В данной работе с использованием этих функций построено общее решение задачи об изгибе бесконечной пьезоплиты с произвольными включениями. При этом комплексные потенциалы для бесконечной плиты представлены рядами Лорана, для включений — рядами по полиномам Фабера, а определение неизвестных коэффициентов рядов обобщенным методом наименьших квадратов (ОМНК) [9] сведено к решению переопределенной системы линейных алгебраических уравнений. Для плиты с двумя круговыми или линейными включениями проведены широкомасштабные численные исследования распределения изгибающих моментов и изменения коэффициентов интенсивности моментов (КИМ). Установлен ряд закономерностей влияния на ЭМУС плит геометрических характеристик включений и физико-механических свойств материалов бесконечной плиты и включений.

## 1. Постановка и метод решения задачи

Рассмотрим отнесенную к прямоугольной декартовой системе координат  $Oxy$  электромагнитоупругую тонкую плиту с эллиптическими отверстиями с контурами  $L_l$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ) и полуосями  $a_l$ ,  $b_l$  (рис. 1), в которые вложены включения из других пьезоматериалов, находящиеся с плитой в условиях идеального электромагнитоупругого контакта. Каждое из включений способно переходить в линейное, которое можно рассматривать как эллиптическое, у которого  $b_l = 0$  (в практике расчетов  $b_l \leq 10^{-3}a_l$ ). Обозначим бесконечную многосвязную область, ограниченную контурами  $L_l$ , через  $S$ , области включений — через  $S^{(l)}$ . Введем локальные системы координат  $O_l x_l y_l$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ) с началами в центрах эллипсов  $L_l$



и осями  $O_l x_l$  вдоль полуосей  $a_l$  так, что в этих системах и в основной системе координат уравнения эллипсов имеют вид

$$\begin{aligned} x_l &= a_l \cos \theta, & y_l &= b_l \sin \theta; \\ x &= x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, & y &= y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l, \end{aligned}$$

где  $\varphi_l$  — угол между положительными направлениями осей  $Ox$  и  $O_l x_l$ , отсчитываемый от положительного направления  $Ox$  против часовой стрелки;  $x_{0l}, y_{0l}$  — координаты начала локальной системы  $O_l x_l y_l$  в основной системе  $Oxy$ ;  $\theta$  — параметр, изменяющийся в интервале от 0 до  $2\pi$ . На бесконечности плита находится под действием механических моментов  $M_x^\infty, M_y^\infty, H_{xy}^\infty$  и моментов индукций  $M_{dx}^\infty, M_{dy}^\infty, M_{bx}^\infty, M_{by}^\infty$ . При этом на основе уравнений ЭМУС можно найти и моменты напряженностей  $H_{dx}^\infty, H_{dy}^\infty, H_{bx}^\infty, H_{by}^\infty$ .

Если для решения задачи об определении ЭМУС рассматриваемой кусочно-однородной пьезоплиты использовать комплексные потенциалы изгиба тонких электромагнитоупругих плит [8], то оно сводится к нахождению из соответствующих граничных условий комплексных потенциалов  $W'_k(z_k)$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) для бесконечной плиты и  $W_k^{(l)}(z_k^{(l)})$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) для каждого включения.

Комплексные потенциалы  $W'_k(z_k)$  являются функциями обобщенных комплексных переменных

$$z_k = x + \mu_k y, \quad (1)$$

где  $\mu_k$  — корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} l_{4s}(\mu) & l_{3g}(\mu) & l_{3p}(\mu) \\ l_{3g}(\mu) & l_{2\beta}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) \\ l_{3p}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) & l_{2\chi}(\mu) \end{vmatrix} = 0; \quad (2)$$

$l_{ij}(\mu)$  — полиномы вида

$$\begin{aligned} l_{4s}(\mu) &= -\left(D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{66}\mu + D_{11}\right), \\ l_{3g}(\mu) &= C_{g22}\mu^3 + (C_{g12} + 2C_{g26})\mu^2 + (C_{g21} + 2C_{g16})\mu + C_{g11}, \\ l_{3p}(\mu) &= C_{p22}\mu^3 + (C_{p12} + 2C_{p26})\mu^2 + (C_{p21} + 2C_{p16})\mu + C_{p11}, \\ l_{2\beta}(\mu) &= C_{\beta22}\mu^2 + 2C_{\beta12}\mu + C_{\beta11}, \\ l_{2\nu}(\mu) &= C_{\nu22}\mu^2 + 2C_{\nu12}\mu + C_{\nu11}, \\ l_{2\chi}(\mu) &= C_{\chi22}\mu^2 + 2C_{\chi12}\mu + C_{\chi11}; \end{aligned}$$

$D_{ij} = b_{ij}D_0$  — упругие жесткости плиты;  $C_{gij} = c_{gij}D_0$ ,  $C_{pij} = c_{pij}D_0$ ,  $C_{\beta ij} = c_{\beta ij}D_0$ ,  $C_{\nu ij} = c_{\nu ij}D_0$ ,  $C_{\chi ij} = c_{\chi ij}D_0$  — электромагнитные жесткости плиты;  $D_0 = \frac{2}{3}h^3$ ;  $h$  — полутолщина плиты;  $b_{ij}, c_{gij}, c_{pij}, c_{\beta ij}, c_{\nu ij}, c_{\chi ij}$  — элементы обратной матрицы

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{16} & c_{g11} & c_{g21} & c_{p11} & c_{p21} \\ b_{12} & b_{22} & b_{26} & c_{g12} & c_{g22} & c_{p12} & c_{p22} \\ b_{16} & b_{26} & b_{66} & c_{g16} & c_{g26} & c_{p16} & c_{p26} \\ -c_{g11} & -c_{g12} & -c_{g16} & c_{\beta11} & c_{\beta12} & c_{\nu11} & c_{\nu12} \\ -c_{g21} & -c_{g22} & -c_{g26} & c_{\beta12} & c_{\beta22} & c_{\nu12} & c_{\nu22} \\ -c_{p11} & -c_{p12} & -c_{p16} & c_{\nu11} & c_{\nu12} & c_{\chi11} & c_{\chi12} \\ -c_{p21} & -c_{p22} & -c_{p26} & c_{\nu12} & c_{\nu22} & c_{\chi12} & c_{\chi22} \end{pmatrix} =$$

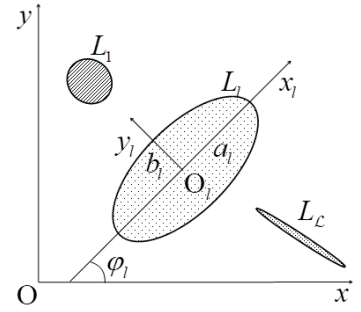


Рис. 1. Многосвязная плита с включениями  
Fig.1. Multiconnected plate with inclusions



$$= \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{16} & g_{11} & g_{21} & p_{11} & p_{21} \\ s_{12} & s_{22} & s_{26} & g_{12} & g_{22} & p_{12} & p_{22} \\ s_{16} & s_{26} & s_{66} & g_{16} & g_{26} & p_{16} & p_{26} \\ -g_{11} & -g_{12} & -g_{16} & \beta_{11} & \beta_{12} & \nu_{11} & \nu_{12} \\ -g_{21} & -g_{22} & -g_{26} & \beta_{12} & \beta_{22} & \nu_{12} & \nu_{22} \\ -p_{11} & -p_{12} & -p_{16} & \nu_{11} & \nu_{12} & \chi_{11} & \chi_{12} \\ -p_{21} & -p_{22} & -p_{26} & \nu_{12} & \nu_{22} & \chi_{12} & \chi_{22} \end{pmatrix}^{-1};$$

$s_{ij}$  — коэффициенты деформации материала, измеренные при постоянных индукциях электрического и магнитного полей;  $g_{ij}$  и  $p_{ij}$  — пьезоэлектрические и пьезомагнитные модули деформации и напряженностей, измеренные при постоянных напряжениях и индукциях;  $\beta_{ij}$ ,  $\nu_{ij}$  и  $\chi_{ij}$  — коэффициенты диэлектрической, магнитной и электромагнитной восприимчивостей, измеренные при постоянных напряжениях [8].

Комплексные потенциалы  $W_k^{(l)}(z_k^{(l)})$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) для каждой плиты-включения  $S^{(l)}$  являются функциями обобщенных комплексных переменных

$$z_k^{(l)} = x + \mu_k^{(l)} y, \quad (3)$$

где  $\mu_k^{(l)}$  — корни характеристического уравнения, получаемого из уравнения (2) заменой всех величин на аналогичные величины с индексом  $(l)$  сверху.

Функции  $W_k^{(l)}(z_k)$  определены в областях  $S_k$ , получаемых из области  $S$  аффинными преобразованиями (1) и ограниченных контурами  $L_{kl}$ , соответствующими контурам  $L_l$  при этих преобразованиях, и в общем случае многосвязной плиты можно представить в виде [8, 9]

$$W_k'(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^L \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{kln}}{\zeta_{kl}^n},$$

в котором  $\Gamma_k$  — известные постоянные, определяемые по значениям моментов на бесконечности;  $\zeta_{kl}$  — переменные, получаемые из конформных отображений внешности единичных кругов  $|\zeta_{kl}| \geq 1$  на внешности контуров  $L_{kl}$  [10],

$$\begin{aligned} z_k &= z_{kl0} + R_{kl} / (\zeta_{kl} + m_{kl} / \zeta_{kl}), \quad z_{kl0} = x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \\ R_{kl} &= (a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)) / 2, \\ m_{kl} &= (a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)) / 2 R_{kl}; \end{aligned}$$

$a_{kln}$  — неизвестные коэффициенты рядов, определяемые из условий на контурах плиты.

Функции  $W_k^{(l)}(z_k^{(l)})$  голоморфны в конечных областях  $S_k^{(l)}$ , получаемых из областей  $S^{(l)}$  аффинными преобразованиями (3), и их можно представить рядами по полиномам Фабера для этих областей

$$W_k^{(l)}(z_k^{(l)}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn}^{(l)} P_{kn}^{(l)}(z_k^{(l)}),$$

где  $P_{kn}^{(l)}(z_k^{(l)})$  — полиномы Фабера для эллипса  $L_k^{(l)}$ , имеющие вид [11]

$$P_{k0}^{(l)} = 1, \quad P_{kn}^{(l)} = (\zeta_k^{(l)})^n + (m_k^{(l)})^n / (\zeta_k^{(l)})^n;$$

$\zeta_k^{(l)}$  — переменные, получаемые из конформных отображений внешности единичных кругов  $|\zeta_k^{(l)}| \geq 1$  на внешности контуров  $L_k^{(l)}$  с помощью следующих формул:

$$z_k^{(l)} = z_{k0}^{(l)} + R_k^{(l)} / (\zeta_k^{(l)} + m_k^{(l)} / \zeta_k^{(l)}), \quad z_{k0}^{(l)} = x_{0l} + \mu_k^{(l)} y_{0l},$$



$$R_k^{(l)} = \left( a_l (\cos \varphi_l + \mu_k^{(l)} \sin \varphi_l) + i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k^{(l)} \cos \varphi_l) \right) / 2,$$

$$m_k^{(l)} = \left( a_l (\cos \varphi_l + \mu_k^{(l)} \sin \varphi_l) - i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k^{(l)} \cos \varphi_l) \right) / 2 R_k^{(l)}.$$

Но полиномы Фабера  $P_{kn}^{(l)}(z_k^{(l)})$  можно представить рядами по степеням  $z_k^{(l)} - z_{k0}^{(l)}$  [11]. Поэтому функции  $W_k^{(l)}(z_k^{(l)})$  можно представить и в виде степенных рядов

$$W_k^{(l)}(z_k^{(l)}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn}^{(l)} (z_k^{(l)} - z_{k0}^{(l)})^n,$$

где  $a_{kn}^{(l)}$  — неизвестные постоянные, которые, как и  $a_{kln}$ , будем определять из граничных условий на контурах контактов плиты  $S$  и включений  $S^{(l)}$ .

На контурах включений, где имеет место идеальный контакт плиты с включениями, граничные условия для определения функций имеют вид [8]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left( g_{ikl} W_k'(z_k) - g_{ik}^{(l)} W_k^{(l)}(z_k^{(l)}) \right) = f_{il}(t) \quad (i = \overline{1, 8}), \quad (4)$$

в котором

$$\begin{aligned} g_{1kl} &= \frac{p_k}{\mu_k}, & g_{2kl} &= q_k, & g_{3kl} &= 1, & g_{4kl} &= \mu_k, \\ g_{5kl} &= d_{yk}, & g_{6kl} &= b_{yk}, & g_{7kl} &= \nu_k, & g_{8kl} &= \rho_k, \\ g_{1k}^{(l)} &= \frac{p_k^{(l)}}{\mu_k^{(l)}}, & g_{2k}^{(l)} &= q_k^{(l)}, & g_{3k}^{(l)} &= 1, & g_{4k}^{(l)} &= \mu_k^{(l)}, \\ g_{5k}^{(l)} &= d_{yk}^{(l)}, & g_{6k}^{(l)} &= b_{yk}^{(l)}, & g_{7k}^{(l)} &= \nu_k^{(l)}, & g_{8k}^{(l)} &= \rho_k^{(l)}, \\ f_{1l} &= -c_l x + c_{1l}, & f_{2l} &= c_l y + c_{2l}, & f_{3l} &= f_{4l} = 0, \\ f_{jl} &= c_{jl}, & j &= 5, 6, 7, 8, \end{aligned}$$

$p_k, q_k, d_{yk}, b_{yk}, \nu_k, \rho_k$  — известные постоянные [8];  $c_l$  — вещественные постоянные, причем все величины со значком  $(l)$  вверху относятся к включению  $S^{(l)}$  и получаются по формулам для плиты заменой величин без значка на величины со значком  $(l)$ ;  $\mu_k^{(l)} (k = \overline{1, 4})$  — корни уравнения (2) для включения  $S^{(l)}$ .

Для многосвязных областей граничным условиям удобнее удовлетворять в дифференциальной форме, которая не будет содержать аддитивных постоянных, входящих в обычные граничные условия. Последние условия, полученные из условий (4) их дифференцированием по дуге контура, имеют вид

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left[ g_{ikl} \delta_{k,s} W_k''(z_k) - g_{ik}^{(l)} \delta_{k,s}^{(l)} W_k^{(l)''}(z_k^{(l)}) \right] = \frac{df_{il}(t)}{ds} \quad (i = \overline{1, 8}), \quad (5)$$

в котором

$$\begin{aligned} W_k''(z_k) &= \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \phi'_{kln}(z_k) a_{kln}, & W_k^{(l)''}(z_k^{(l)}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{kn}'^{(l)}(z_k^{(l)}) a_{kn}^{(l)}, \\ \delta_{k,s} &= \frac{dz_k}{ds}, & \delta_{k,s}^{(l)} &= \frac{dz_k^{(l)}}{ds}, \\ \phi'_{kln}(z_k) &= -\frac{n}{\zeta_{kl}^{n-1} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})}, & \phi_{kn}'^{(l)}(z_k^{(l)}) &= n (z_k^{(l)} - z_{k0}^{(l)})^{n-1} \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}). \end{aligned} \quad (6)$$



Граничным условиям (5) будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов [9, 12, 13]. Для этого выберем на каждом из контуров  $L_p$  систему точек  $M_{pm}(x_{pm}, y_{pm})$  ( $p = \overline{1, \mathcal{L}}; m = \overline{1, M}$ ), в которых удовлетворим соответствующим граничным условиям. Подставляя функции (6) в граничные условия (5) в точках  $M_{pm}(x_{pm}, y_{pm})$ , для определения неизвестных постоянных  $a_{kln}$  и  $a_{kn}^{(l)}$  получаем систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \left[ \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} g_{ikp} \delta_{k,s} \phi'_{kln}(t_{kpm}) a_{kln} - \sum_{k=1}^4 \sum_{n=1}^{\infty} g_{ik}^{(l)} \delta_{k,s} \phi_{kn}'^{(l)}(t_{km}^{(p)}) a_{kn}^{(l)} \right] = \\ = \frac{df_{ip}(t_{pm})}{ds} - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 g_{ik} \delta_{k,s} \Gamma_k \quad (i = \overline{1, 8}; p = \overline{1, \mathcal{L}}; m = \overline{1, M}). \end{aligned} \quad (7)$$

Кроме уравнений (7), для каждого контура отверстия должны выполняться уравнения

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 i a_{kp1} = 0 \quad (p = \overline{1, \mathcal{L}}), \quad (8)$$

следующие из однозначности прогиба при полном обходе каждого из контуров  $L_p$ .

Систему (7), дополненную уравнениями (8), будем решать методом сингулярных разложений [14, 15]. После нахождения псевдорешений этой системы функции  $W'_k(z_k)$  и  $W_k'^{(l)}(z_k^{(l)})$  будут известными и по ним можно вычислять основные характеристики ЭМУС (механические изгибающие и крутящий моменты, моменты индукций электрического и магнитного полей, перерезывающие силы) [8]. Если некоторый эллипс  $L_l$  переходит в прямолинейное включение, то для его концов можно вычислить также коэффициенты интенсивности моментов (КИМ)  $k_{1M}^{\pm}$  и  $k_{2M}^{\pm}$  по известным формулам

$$\begin{aligned} k_{1M}^{\pm} &= 2 \operatorname{Re} \left[ p_k \sin^2 \varphi_l + q_k \cos^2 \varphi_l - 2r_k \cos \varphi_l \sin \varphi_l \right] M_k, \\ k_{2M}^{\pm} &= 2 \operatorname{Re} \left[ (q_k - p_k) \cos \varphi_l \sin \varphi_l + r_k (\cos^2 \varphi_l - \sin^2 \varphi_l) \right] M_k, \end{aligned}$$

в которых

$$M_k = \pm \frac{\sqrt{a_l}}{2R_{kl}} \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n n a_{kln},$$

причем «+» и «-» у КИМ в локальной системе координат  $O_l x_l y_l$  относятся к правому и левому концам трещины соответственно.

Как частные случаи из приведенных решений задач электромагнитоупругости (ЭМУ) следуют решения задач электроупругости (ЭУ), магнитоупругости (МУ) и теории упругости (ТУ). При проведении численных исследований решения всех этих задач можно получить по программе решения задачи ЭМУ, проводя вычисления для модельного материала с постоянными  $g'_{ij} = \lambda_g g_{ij}$ ,  $p'_{ij} = \lambda_p p_{ij}$ ,  $\nu'_{ij} = \lambda_{gp} \nu_{ij}$ , причем их нужно принять такими:  $\lambda_g = \lambda_p = \lambda_{gp} = 1$  для задач ЭМУ;  $\lambda_g = 1, \lambda_p = \lambda_{gp} \leq 10^{-3}$  для задач ЭУ;  $\lambda_p = 1, \lambda_g = \lambda_{gp} \leq 10^{-3}$  для задач МУ;  $\lambda_g = \lambda_p = \lambda_{gp} \leq 10^{-3}$  для задач ТУ.

## 2. Результаты численных исследований

Были проведены численные исследования для плит из материалов: 1) композит на основе  $BaTiO_3 - CaFe_2O_4$  (материал М1) [16, 17]; 2) композит, упругие, пьезоэлектрические и электрические постоянные которого соответствуют селениду кадмия  $CdSe$ , а пьезомагнитные и магнитные —  $BaTiO_3$  (материал М2) [18]. При проведении расчетов упругие свойства



материала каждого включения связывались со свойствами материала бесконечной плиты соотношениями  $s_{ij}^{(l)} = \lambda_s^{(l)} s_{ij}$ , где  $\lambda_s^{(l)}$  — параметры, связывающие соответствующие постоянные материалов бесконечной плиты с областями  $S$  и включений с областями  $S^{(l)}$ . Ввиду того что на значения моментов в бесконечной плите пьезосвойства включений влияют незначительно, при проведении расчетов эти свойства включений не учитывались, т.е. считалось, что  $\lambda_g^{(l)} = \lambda_p^{(l)} = \lambda_{gp}^{(l)} = 0$ .

В табл. 1 для изгиба моментами  $M_y^\infty = m_y$  бесконечной плиты с двумя одинаковыми круговыми упругими (не обладающими пьезосвойствами) включениями радиуса  $a_1$  ( $b_1 = a_1$ ,  $b_2 = a_2 = a_1$ ) (рис. 2), с точностью до множителя  $m_y$ , в зависимости от  $c/a_1$ , где  $c$  — расстояние между включениями, параметра механической жесткости включений  $\lambda_s^{(1)}$  и центрального угла  $\theta$  контура  $L_1$ , отсчитываемого от направления оси  $Ox$  против часовой стрелки, приведены значения изгибающих моментов  $M_s$  в точках контакта плиты с левым включением на площадках, перпендикулярных к контуру. Значения  $\lambda_s^{(1)}$ , равные 0 и  $\infty$ , относятся к случаям плиты с абсолютно жесткими включениями и абсолютно мягкими включениями (отверстиями). На рис. 3 изображены графики распределения этих моментов около контура  $L_1$  в плите из материала М2 при различных значениях  $c/a_1$ . Сплошные линии относятся к случаю  $c/a_1 = 0, 1$ , штриховые — к случаю  $c/a_1 = \infty$ .

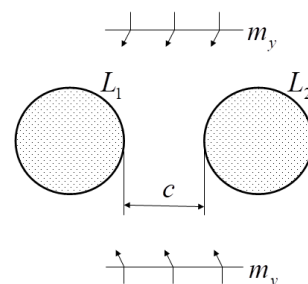


Рис. 2. Схема задачи с двумя круговыми включениями

Fig. 2. Task diagram with two circular inclusions

Таблица 1 / Table 1

Значения  $M_s/m_y$  в плите около контура левого включения  
The values of  $M_s/m_y$  in the plate near the contour of the left switch

$c/a_1$	$\lambda_s^{(1)}$	$\theta$ , рад.										
		0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$\pi$	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$		
		Задача ЭМУ					Задача ТУ					
		Материал М2										
$\infty$	0.0	−0.747	−0.400	0.958	0.986	−0.747	−0.849	−0.218	0.679	1.027		
	0.1	−0.150	0.002	0.648	0.540	−0.150	−0.170	0.106	0.447	0.559		
	0.5	0.647	0.526	0.323	0.088	0.647	0.669	0.546	0.253	0.094		
	2.0	1.332	0.953	0.233	−0.001	1.332	1.280	0.945	0.302	−0.013		
	10.0	1.903	1.293	0.287	0.132	1.903	1.696	1.272	0.469	0.078		
	$\infty$	2.184	1.457	0.336	0.232	2.184	1.876	1.424	0.565	0.146		
1.00	0.0	−0.542	−0.579	0.611	0.875	−0.726	−0.649	−0.382	0.439	0.907		
	0.1	−0.137	−0.127	0.476	0.485	−0.160	−0.185	−0.004	0.344	0.500		
	10.0	2.256	1.430	0.279	0.126	2.010	2.098	1.406	0.438	0.075		
	$\infty$	2.703	1.645	0.317	0.220	2.332	2.454	1.617	0.519	0.138		
0.10	0.0	−1.478	−0.624	0.553	0.867	−0.780	−1.627	−0.449	0.386	0.899		
	0.1	−0.549	−0.219	0.415	0.466	−0.188	−0.575	−0.105	0.299	0.480		
	10.0	4.207	1.453	0.249	0.148	2.148	3.816	1.355	0.320	0.091		
	$\infty$	6.973	1.506	0.244	0.237	2.554	6.146	1.386	0.281	0.148		
0.01	0.0	−4.843	−0.288	0.628	0.874	−0.812	−5.690	−0.224	0.435	0.907		
	0.1	−1.131	−0.147	0.423	0.463	−0.197	−1.267	−0.078	0.300	0.477		
	0.5	0.376	0.436	0.281	0.070	0.612	0.459	0.462	0.240	0.076		
	2.0	1.939	1.028	0.237	0.010	1.399	1.746	1.002	0.274	−0.002		
	10.0	6.521	1.265	0.221	0.154	2.189	5.453	1.192	0.279	0.096		

Из данных табл. 1, рис. 3 и других полученных результатов следует, что влияние одного включения на ЭМУС около другого значительно, если расстояние между включениями



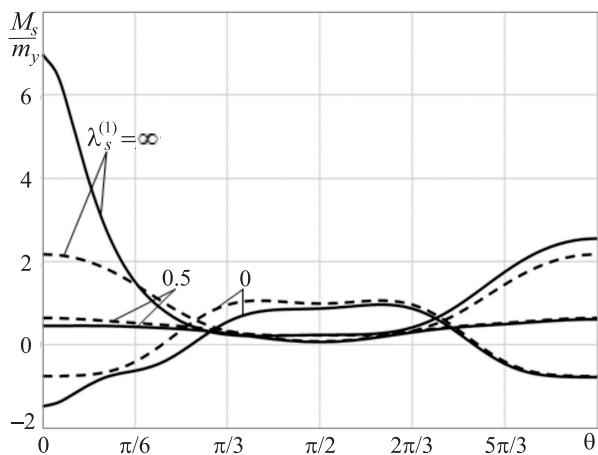


Рис. 3. Графики распределения моментов  $M_s$  около контура  $L_1$  при  $c/a_1 = 0,1$  (сплошные линии) и  $c/a_1 = \infty$  (штриховые линии)

Fig. 3. Graphs of the distribution of moments  $M_s$  near the contour  $L_1$  at  $c/a_1 = 0.1$  (solid lines) and  $c/a_1 = \infty$  (dashed lines)

Вдали от перемычки значения моментов изменяются незначительно. Как видно, отрицательные моменты в плите вблизи горизонтальных диаметров включений возникают, когда  $\lambda_s^{(1)} < 0.14$ , при  $0 \leq \theta < \pi/6$  и  $11\pi/12 \leq \theta \leq \pi$ . Последнее наглядно видно на рис. 4, где для некоторых малых значений  $\lambda_s^{(1)}$  приведены графики распределения этих моментов  $M_s$  для плиты с одним включением (при  $c/a_1 = \infty$ ).

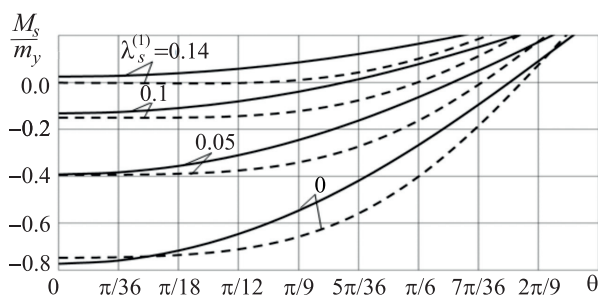


Рис. 4. Графики распределения моментов  $M_s$  для некоторых значений  $\lambda_s^{(1)}$  в плите с одним включением (при  $c/a_1 = \infty$ ) из материалов М1 (сплошные линии) и М2 (штриховые линии)

Fig. 4. Graphs of the distribution of moments  $M_s$  for some values of  $\lambda_s^{(1)}$  in a single-inclusion plate (at  $c/a_1 = \infty$ ) made of M1 (solid lines) and M2 (dashed lines) materials

ности концов больших полуосей  $a_l$ , стремясь к бесконечности, и при  $b_l/a_l \leq 10^{-3}$  можно говорить о КИМ для концов линейных включений.

В табл. 2 для плиты из материала М2 с двумя одинаковыми упругими линейными включениями (не обладающими пьезосвойствами) длины  $2a_1$  ( $2a_2 = 2a_1$ ) (рис. 5) в зависимости от  $c/a_1$ , где  $c$  — расстояние между включениями, и параметра механической жесткости включений  $\lambda_s^{(1)}$  даны значения КИМ  $k_1^\pm$  (в данном случае  $k_2^\pm = 0$ ). Значения  $\lambda_s^{(1)}$ , равные 0 и  $\infty$ , относятся к случаям абсолютно жестких включений и трещин соответственно. Для случаев, когда параметр  $\lambda_s^{(1)}$  равен 0, 1 и 10 значения  $k_1^+$  (КИМ для правого конца трещины) для всех  $c/a_1$  получаются такими же, как и  $k_1^-$ , поэтому они в табл. 2 не приведены.

меньше диаметров включений ( $c/a_1 \leq 2$ ), с уменьшением расстояния  $c$  между включениями значения моментов  $M_s$  в плите около контуров включений резко изменяются вблизи точек перемычки и несколько меньше в зонах противоположной перемычке (растут при  $\lambda_s^{(1)} > 1$  (при  $E_1^{(1)} < E_1$ ) и уменьшаются при  $\lambda_s^{(1)} < 1$  (при  $E_1^{(1)} > E_1$ )). При этом на значения моментов в этой зоне существенно влияет значение параметра жесткости  $\lambda_s^{(1)}$ : с увеличением значения  $\lambda_s^{(1)}$  (с уменьшением жесткости включений) значения моментов  $M_s$  резко растут. Так, если  $c/a_1 = 0.01$ , то в точке контура, соответствующей  $\theta = 0$ , при изменении  $\lambda_s^{(1)}$  от 0 (абсолютно жесткие включения) до  $\infty$  (неподкрепленные отверстия) значения моментов растут от  $-4.843$  до  $21.831$ .

Значения изгибающих моментов в плите из «сильно анизотропного» материала М2 значительно больше, чем в плите из «близкого к изотропному» материала М1. На изгибающие моменты в плите значительно влияют пьезосвойства, порой значения моментов с учетом пьезосвойств (задача ЭМУ) в 2 и более раз отличаются от их значений без учета пьезосвойств (задача ТУ).

Как показывают исследования, с уменьшением отношения полуосей эллиптических включений  $b_l/a_l$  значения моментов  $M_s$  в окрестности концов малых полуосей эллипсов  $b_l$  значительно уменьшаются, но резко растут в окрестности концов больших полуосей  $a_l$ , стремясь к бесконечности, и при  $b_l/a_l \leq 10^{-3}$  можно говорить о КИМ для концов линейных включений.

В табл. 2 для плиты из материала М2 с двумя одинаковыми упругими линейными включениями (не обладающими пьезосвойствами) длины  $2a_1$  ( $2a_2 = 2a_1$ ) (рис. 5) в зависимости от  $c/a_1$ , где  $c$  — расстояние между включениями, и параметра механической жесткости включений  $\lambda_s^{(1)}$  даны значения КИМ  $k_1^\pm$  (в данном случае  $k_2^\pm = 0$ ). Значения  $\lambda_s^{(1)}$ , равные 0 и  $\infty$ , относятся к случаям абсолютно жестких включений и трещин соответственно. Для случаев, когда параметр  $\lambda_s^{(1)}$  равен 0, 1 и 10 значения  $k_1^+$  (КИМ для правого конца трещины) для всех  $c/a_1$  получаются такими же, как и  $k_1^-$ , поэтому они в табл. 2 не приведены.





Таблица 2 / Table 2

Значения КИМ для концов левого линейного включения в плите из материала М2 с двумя линейными включениями  
 The CMI (the coefficient of the moments intensity) values for the ends of the left linear inclusion in a plate made of M2 material with two linear inclusions

$\lambda_s^{(1)}$	КИМ	$c/a_1$					
		$\infty$	2	1	0.5	0.1	0.01
0	$k_1^-$	-0.527	-0.542	-0.554	-0.568	-0.603	-0.639
	$k_1^+$	-0.527	-0.552	-0.585	-0.645	-0.935	-1.971
$10^{-3}$	$k_1^-$	-0.160	-0.161	-0.162	-0.162	-0.164	-0.164
	$k_1^+$	-0.160	-0.162	-0.166	-0.173	-0.206	-0.319
0.1	$k_1^-$	-0.003	-0.003	-0.003	-0.003	-0.003	-0.003
10	$k_1^-$	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006
$10^3$	$k_1^-$	0.404	0.408	0.410	0.413	0.417	0.419
	$k_1^+$	0.404	0.412	0.423	0.444	0.543	0.882
$\infty$	$k_1^-$	0.998	1.026	1.049	1.079	1.148	1.221
	$k_1^+$	0.998	1.046	1.110	1.226	1.791	3.836

Как видно из данных, приведенных в табл. 2, если механическая жесткость включений меньше жесткости плиты ( $\lambda_s^{(1)} > 1$ ), то КИМ положительны и в малой окрестности концов линейных включений при положительных толщинных координатах  $z$  напряжения положительны (происходит растяжение), если же механическая жесткость включений меньше жесткости плиты ( $\lambda_s^{(1)} < 1$ ), то КИМ отрицательны и в малой окрестности концов включений при положительных толщинных координатах  $z$  напряжения в плите отрицательны (происходит сжатие). Если материалы плиты и включений по механическим свойствам одинаковы ( $\lambda_s^{(1)} = 1$ ), то, как и следовало ожидать, КИМ равны нулю и напряженное состояние в плите такое, как в плите без включения. При сближении друг с другом включений из более жесткого материала, чем материал плиты ( $\lambda_s^{(1)} < 1$ ), значения КИМ уменьшаются; при сближении друг с другом включений из материала, который значительно мягче материала плиты ( $\lambda_s^{(1)} \gg 1$ ), значения КИМ резко растут, особенно для ближайших друг к другу концов включений (трещин). Для случая трещин ( $\lambda_s^{(1)} = \infty$ ) значения КИМ совпадают с известными [19].

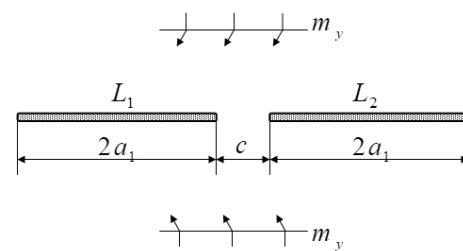


Рис. 5. Схема задачи с двумя линейными включениями  
 Fig. 5. Task diagram with two linear inclusions

## Заключение

Таким образом, с использованием комплексных потенциалов теории изгиба тонких пьезоплит [8] решена задача об изгибе плиты с включениями из других материалов. При этом с помощью конформных отображений, разложений голоморфных функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера за счет выполнения краевых условий ОМНК [9] задача сведена к переопределенной системе линейных алгебраических уравнений, решаемой методом сингулярных разложений [14, 15]. Численные исследования проведены для плиты с двумя круговыми или линейными включениями. Установлены закономерности изменения ЭМУС плиты в зависимости от физико-механических свойств материалов и геометрических характеристик включений.



### Список литературы

1. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях // Физическая акустика : в 7 т., 11 кн. / под ред. У. Мезона. Москва : Мир, 1966. Т. 1, ч. А. С. 204–326.
2. Кэди У. Пьезоэлектричество и его практическое применение. Москва : Иностранная литература, 1949. 717 с.
3. Бичурин М. И., Петров В. М., Филиппов Д. А. Магнитоэлектрические материалы. Москва : Академия Естествознания, 2006. 296 с.
4. Пятаков А. П. Магнитоэлектрические материалы и их практическое применение // Бюллетень МАГО. 2006. Т. 5, № 2. С. 1–3.
5. Rahmoune M., Benjeddou A., Ohayon R. New thin piezoelectric plate models // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. 1998. Vol. 9. P. 1017–1029.
6. Srinivas S., Jiang Yu Li The effective magnetoelectric coefficients of polycrystalline multiferroic composites // Acta Materialia. 2005. Vol. 53, iss. 15. P. 4135–4142. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2005.05.014>
7. Vel S. S., Batra R. C. Exact solution for the cylindrical bending of laminated plates with embedded piezoelectric shear actuators // Smart Materials and Structures. 2001. Vol. 10, iss. 2. P. 240–251. DOI: <https://doi.org/10.1088/0964-1726/10/2/309>
8. Калоеров С. А. Основные соотношения прикладной теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит // Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки. 2022. № 1. С. 22–38. EDN: EZZZBN
9. Калоеров С. А., Паришкова О. А. Термовязкоупругое состояние многосвязной анизотропной пластинки // Прикладная механика. 2012. Т. 48, № 3. С. 106–116.
10. Калоеров С. А., Горянская Е. С. Двумерное напряженное состояние многосвязного анизотропного тела с полостями и трещинами // Теоретическая и прикладная механика. 1995. № 25. С. 45–56.
11. Космодамианский А. С., Калоеров С. А. Температурные напряжения в многосвязных пластинках. Киев ; Донецк : Вища школа, 1983. 160 с.
12. Воеводин В. В. Вычислительные основы линейной алгебры. Москва : Наука, 1977. 304 с.
13. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. Москва : Мир, 1980. 280 с.
14. Drmac Z., Veselic K. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 1 // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 2008. Vol. 29, iss. 4. P. 1322–1342. DOI: <https://doi.org/10.1137/050639193>
15. Drmac Z., Veselic K. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 2 // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 2008. Vol. 29, iss. 4. P. 1343–1362. DOI: <https://doi.org/10.1137/05063920X>
16. Tian Wen-Ye, Gabbert U. Multiple crack interaction problem in magnetoelectroelastic solids // European Journal of Mechanics. Part A: Solids. 2004. Vol. 23, iss. 4. P. 599–614. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2004.02.002>
17. Yamamoto Y., Miya K. Electromagnetomechanical interactions in deformable solids and structures. Amsterdam : Elsevier Science-North Holland, 1987. 450 p.
18. Hou P.-F., Teng G. -H., Chen H. -R. Three-dimensional Greens function for a point heat source in two-phase transversely isotropic magneto-electro-thermo-elastic materials // Mechanics of Materials. 2009. Vol. 41, iss. 3. P. 329–338. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2008.12.001>
19. Калоеров С. А., Сероштанов А. В. Решение задачи об электромагнитоупругом изгибе многосвязной плиты // Прикладная математика и техническая физика. 2022. Т. 63, № 4. С. 143–155. DOI: <https://doi.org/10.15372/PMTF20220415>, EDN: LWKFFP

### References

1. Berlincourt D. A., Curran D. R., Jaffe H. Piezoelectric and piezomagnetic materials and their function as transducers. Mason W. P. (ed.) *Physical Acoustics*. New York, Academic Press, 1964. Vol. 1, pt. A, pp. 169–270. (Russ. ed: Moscow, Mir, 1966. Vol. 1, pt. A, pp. 204–326).
2. Cady W. G. *Piezoelectricity: An introduction to the theory and applications of electromechanical phenomena in crystals*. New York, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1946. 806 p. (Russ. ed.: Moscow, IL, 1949. 717 p.)



3. Bichurin M. I., Petrov V. M., Filippov D. A. *Magnitoelektricheskie materialy* [Magnetolectric materials]. Moscow, Akademiya Estestvoznaniya, 2006. 296 p. (in Russian).
4. Pyatakov A. P. Magnetolectric materials and their practical application. *Byulleten' MAGO* [Bulletin of the Magnetic Society], 2006, vol. 5, iss. 2, pp. 1–3 (in Russian).
5. Rahmoune M., Benjeddou A., Ohayon R. New thin piezoelectric plate models. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 1998, vol. 9, pp. 1017–1029.
6. Srinivas S., Jiang Yu Li. The effective magnetolectric coefficients of polycrystalline multiferroic composites. *Acta Materialia*, 2005, vol. 53, iss. 15, pp. 4135–4142. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2005.05.014>
7. Vel S. S., Batra R. C. Exact solution for the cylindrical bending of laminated plates with embedded piezoelectric shear actuators. *Smart Materials and Structures*, 2001, vol. 10, iss. 2, pp. 240–251. DOI: <https://doi.org/10.1088/0964-1726/10/2/309>
8. Kaloerov S. A. The main relations for the applied theory of thin electromagnetoelastic plates bending. *Bulletin of Donetsk National University. Series A: Natural Sciences*, 2022, iss. 1, pp. 22–38 (in Russian). EDN: EZZZBN
9. Kaloerov S. A., Parshikova O. A. Thermoviscoelastic state of multiply connected anisotropic plates. *International Applied Mechanics*, 2012, vol. 48, iss. 3, pp. 319–331. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-012-0523-0>
10. Kaloerov S. A., Goryanskaya E. S. Two-dimensional stress state of a multiconnected anisotropic body with cavities and cracks. *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika* [Theoretical and applied mechanics], 1995, iss. 25, pp. 45–56 (in Russian).
11. Kosmodamianskiy A. S., Kaloerov S. A. *Temperaturnye napryazheniya v mnogosvyaznykh plastinkakh* [Temperature stresses in multicoupled plates]. Kiev, Donetsk, Vishcha shkola, 1983. 160 p. (in Russian).
12. Voevodin V. V. *Vychislitel'nye osnovy lineynoy algebrы* [Computational foundations of linear algebra]. Moscow, Nauka, 1977. 304 p. (in Russian).
13. Forsythe G., Malcolm M., Moler C. *Computer methods for mathematical computations*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1977. 280 p. (Russ. ed: Moscow, Mir, 1980. 280 p).
14. Drmac Z., Veselic K. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 1. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2008, vol. 29, iss. 4, pp. 1322–1342. DOI: <https://doi.org/10.1137/050639193>
15. Drmac Z., Veselic K. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 2. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2008, vol. 29, iss. 4, pp. 1343–1362. DOI: <https://doi.org/10.1137/05063920X>
16. Tian Wen-Ye, Gabbert U. Multiple crack interaction problem in magneto-electroelastic solids. *European Journal of Mechanics. Part A: Solids*, 2004, vol. 23, iss. 4, pp. 599–614. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2004.02.002>
17. Yamamoto Y., Miya K. *Electromagnetomechanical interactions in deformable solids and structures*. Amsterdam, Elsevier Science-North Holland, 1987. 450 p.
18. Hou P.-F., Teng G.-H., Chen H.-R. Three-dimensional Greens function for a point heat source in two-phase transversely isotropic magneto-electro-thermo-elastic materials. *Mechanics of Materials*, 2009, vol. 41, iss. 3, pp. 329–338. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2008.12.001>
19. Kaloerov S. A., Seroshtanov A. V. Solving the problem of electro-magneto-elastic bending of a multiply connected area. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2022, vol. 63, iss. 4, pp. 676–687. <https://doi.org/10.1134/s0021894422040150>, EDN: FCTIZV

Поступила в редакцию / Received 07.04.2025

Принята к публикации / Accepted 18.06.2025

Опубликована / Published 28.11.2025