



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 4. С. 524–533

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 4, pp. 524–533

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-524-533>

EDN: <https://elibrary.ru/MVMKLN>

Научная статья

УДК 519.6

## Метод вариационных итераций исследования гибких пористых функционально-градиентных размерно зависимых косоугольных пластин

Л. А. Калущкий, А. В. Крысько, Т. В. Яковлева, В. А. Крысько<sup>✉</sup>

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук, Россия, 630090, г. Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, д. 15

**Калущкий Леонид Александрович**, младший научный сотрудник лаборатории моделирования гетерофазных материалов, [leon199703@gmail.com](mailto:leon199703@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0003-3335-4975>, SPIN: 6245-5920, AuthorID: 1175393

**Крысько Антон Вадимович**, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования гетерофазных материалов, [anton.krysko@gmail.com](mailto:anton.krysko@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0002-9389-5602>, SPIN: 3862-0430, AuthorID: 357800

**Яковлева Татьяна Владимировна**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории моделирования гетерофазных материалов, [yan-tan1987@mail.ru](mailto:yan-tan1987@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0003-3238-2317>, SPIN: 9900-0883, AuthorID: 673156

**Крысько Вадим Анатольевич**, доктор технических наук, главный научный сотрудник лаборатории моделирования гетерофазных материалов, [krysko1937@gmail.com](mailto:krysko1937@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0002-4914-764X>, SPIN: 1024-5028, AuthorID: 3929

**Аннотация.** Получена модель гибких косоугольных пластин Кирхгофа из пористых функционально-градиентных материалов. Нелинейность учитывается по теории Т. фон Кармана. Нелинейные уравнения в частных производных решаются с помощью метода вариационных итераций. Достоверность результатов, полученных методом вариационных итераций, обеспечивается проведением сравнительного анализа с известными решениями. Исследовано напряженно-деформированное состояние косоугольных пластин. Проведен анализ влияния угла наклона пластины, размерных эффектов, пористости и функциональной градиентности материала на ее напряженно-деформированное состояние и несущую способность. Концентрацией напряжений вблизи пустот можно пренебречь ввиду их малого размера, предполагается плавное, непрерывное изменение напряжений по толщине пластины. Выявлено, что увеличение объемной доли керамики в функционально-градиентных материалах позволяет существенно увеличить несущую способность косоугольных пластин. Косоугольные пластины с увеличенной концентрацией пор от верхней и нижней поверхностей к центру имеют наибольшую несущую способность по сравнению с равномерным распределением пористости и уменьшенной концентрацией. Величина угла наклона и размерно зависимого параметра существенно влияет на несущую способность пористых функционально-градиентных косоугольных пластин.

**Ключевые слова:** гибкие косоугольные пластины, пластины сложной геометрии, распределение пористости, теория Янга

**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-11-00160-П).

**Для цитирования:** Калущкий Л. А., Крысько А. В., Яковлева Т. В., Крысько В. А. Метод вариационных итераций исследования гибких пористых функционально-градиентных размерно зависимых косоугольных пластин // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика.



Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 4. С. 524–533. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-524-533>, EDN: MVMKLN

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## Variational iteration method for investigating flexible porous functionally graded size-dependent oblique plates

L. A. Kalutsky, A. V. Krysko, T. V. Yakovleva, V. A. Krysko✉

Lavrentiev Institute of Hydrodynamics of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 15 Academician Lavrentyev Ave., Novosibirsk 630090, Russia

**Leonid A. Kalutsky**, [leon199703@gmail.com](mailto:leon199703@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0003-3335-4975>, SPIN: 6245-5920, AuthorID: 1175393

**Anton V. Krysko**, [anton.krysko@gmail.com](mailto:anton.krysko@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0002-9389-5602>, SPIN: 3862-0430, AuthorID: 357800

**Tatiana V. Yakovleva**, [yan-tan1987@mail.ru](mailto:yan-tan1987@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0003-3238-2317>, SPIN: 9900-0883, AuthorID: 673156

**Vadim A. Krysko**, [krysko1937@gmail.com](mailto:krysko1937@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0002-4914-764X>, SPIN: 1024-5028, AuthorID: 3929

**Abstract.** A model of flexible oblique Kirchhoff plates made of porous functional-gradient materials is derived. Nonlinearity is accounted for by the theory of T. von Karman. The nonlinear partial derivative equations are solved using the method of variational iterations. The validity of the results obtained by the method of variational iterations is ensured by comparative analysis with known solutions. The stress-strain state (STS) of oblique-angled plates is investigated. The influence of plate inclination angle, dimensional effects, porosity and functional gradient of the material is analyzed. The stress concentration near voids can be neglected due to their small size, and a smooth, continuous stress variation along the plate thickness is assumed. It is revealed that the increase in the volume fraction of ceramics in functionally graded materials allows to significantly increase the bearing capacity of oblique plates. The oblique plates with increased pore concentration from the upper and lower surfaces to the center have the highest bearing capacity compared to the uniform porosity distribution and reduced concentration. The magnitude of the inclination angle and size-dependent parameter significantly affects the bearing capacity of porous functional-gradient oblique-angled plates.

**Keywords:** flexible oblique plates, plates of complex geometry, porosity distribution, Yang's theory

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-11-00160-P).

**For citation:** Kalutsky L. A., Krysko A. V., Yakovleva T. V., Krysko V. A. Variational iteration method for investigating flexible porous functionally graded size-dependent oblique plates. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 4, pp. 524–533 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-524-533>, EDN: MVMKLN

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Многие инженерные приложения требуют применения пластин с косоугольной (перекошенной) геометрией, например для хвостового оперения и стреловидных крыльев самолетов, а также в судостроении, машиностроении, медицине и др.

Для исследования косоугольных пластин необходимо разработать эффективные и точные методы. В исследованиях [1–10] эффективность метода вариационных итераций (МВИ)

была выявлена для исследования прямоугольных в плане пластин. Настоящая работа посвящена применению метода вариационных итераций для косоугольных геометрически нелинейных пластин. Наряду с методом вариационных итераций для исследования косоугольных пластин в линейной постановке применялись методы конечных элементов [11–13], дифференциальных квадратур [14] и конечных разностей [15] без учета пористости материала и размерной зависимости.

Исследование пластин с пористостью является важным ввиду их уникальных особенностей. Пористые материалы для пластин обладают рядом преимуществ, которые делают их востребованными в различных областях, включая электрохимию, энергетику, фильтрацию. Основными преимуществами пористых материалов являются:

- 1) термоизоляционные свойства — воздух в порах снижает теплопроводность, что делает такие материалы пригодными для изоляции;
- 2) экономия материала — меньший расход сырья по сравнению с монолитными структурами без потери функциональности;
- 3) уменьшение веса — это особенно важно в авиа-, судо- и автомобилестроении.

Настоящая работа посвящена исследованию геометрически нелинейных по Т. фон Карману косоугольных пористых функционально-градиентных пластин при действии поперечной нагрузки с учетом размерной зависимости. Исследуется влияние пористости, функциональной градиентности, размерных эффектов и угла наклона косоугольных пластин.

## 1. Математическое моделирование косоугольных размерно зависимых пористых функционально-градиентных пластин

Рассмотрим косоугольную пластину в пространстве  $R^3$  как трехмерное тело  $V \in \{0 \leq \xi \leq a, 0 \leq \eta \leq b, -h/2 \leq z \leq h/2\}$  (рис. 1), где  $h$  — толщина пластины,  $a$ ,  $b$  — стороны пластины,  $\varphi$  — угол наклона.

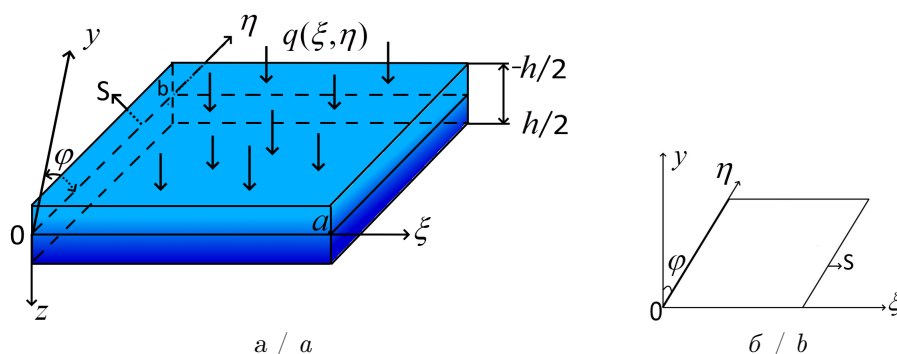


Рис. 1. Расчетная схема косоугольной пластины:  $a$  — в 3D виде;  $b$  — срединная плоскость косоугольной пластины (цвет онлайн)

Fig. 1. Calculation scheme of an oblique plate:  $a$  — in 3D view;  $b$  — the middle plane of an oblique plate (color online)

Приняты следующие гипотезы:

- 1) гипотеза Кирхгофа;
- 2) размерные эффекты пластин учитываются в соответствии с [16];
- 3) модуль упругости  $E = E(z)$  и коэффициент Пуассона  $\mu = \mu(z)$  являются функциями от  $z$ .

Исследуются следующие распределения пор  $(U, X, O)$  [17]:

- 1) U-ПФГМ:

$$\begin{aligned} E(z) &= (E_c - E_m) (1/2 + z/h)^p + E_m - (E_c + E_m) \Gamma/2, \\ \mu(z) &= (\mu_c - \mu_m) (1/2 + z/h)^p + \mu_m - (\mu_c + \mu_m) \Gamma/2; \end{aligned} \quad (1)$$



2) X-ПФГМ:

$$\begin{aligned} E(z) &= (E_c - E_m) (1/2 + z/h)^p + E_m - (E_c + E_m) (1/2 - |z|/h) \Gamma, \\ \mu(z) &= (\mu_c - \mu_m) (1/2 + z/h)^p + \mu_m - (\mu_c + \mu_m) (1/2 - |z|/h) \Gamma; \end{aligned} \quad (2)$$

3) O-ПФГМ:

$$\begin{aligned} E(z) &= (E_c - E_m) (1/2 + z/h)^p + E_m - (E_c + E_m) |z| \Gamma/h, \\ \mu(z) &= (\mu_c - \mu_m) (1/2 + z/h)^p + \mu_m - (\mu_c + \mu_m) |z| \Gamma/h, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $p$  — функционально-градиентный параметр, отвечающий за соотношения объемных долей материала;  $\Gamma$  — показатель пористости материала. Следует заметить, что концентрацией напряжений вблизи пустот можно пренебречь ввиду их малого размера, предполагается плавное, непрерывное изменение напряжений по толщине пластины.

Из принципа Гамильтона

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta (-U + W + K) dt = 0 \quad (4)$$

получены уравнения движения гибких ПФГМ размерно зависимых косоугольных пластин в принятой системе координат, а также краевые и начальные условия.

Приведем статические уравнения гибких ПФГМ косоугольных микро/нанопластин (5)–(7) в перемещениях  $u(\xi, \eta)$ ,  $v(\xi, \eta)$  и  $w(\xi, \eta)$  как функции  $\xi, \eta$  с краевыми условиями (8)–(9), опустив динамические члены:

$$\begin{aligned} &\left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial w}{\partial \xi} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right) \right) + A_3 c^{-2} \left( s^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2s \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial w}{\partial \xi} \left( s^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - 2s \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right) \right) + \\ &+ A_4 c^{-1} \left( -s \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + c^{-1} \left( -s \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) \left( -s \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right) \right) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} &c^{-2} \left( s^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - 2s \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + c^{-1} \left( -s \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) \left( s^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - 2s \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right) \right) + \\ &+ A_3 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + c^{-1} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \left( -s \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right) \right) + \\ &+ A_4 c^{-1} \left( \left( -s \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \right) + \frac{\partial w}{\partial \xi} \left( -s \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right) \right) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} &Dc^{-4} \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} - 4s \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^3 \partial \eta} + 2(1 + 2s) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} - 4s \frac{\partial^4 w}{\partial \xi \partial \eta^3} + \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} \right] + \\ &+ A_1 c^{-1} \left( c^{-1} \left( -s \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial v}{\partial \xi} + c^{-1} \frac{\partial w}{\partial \xi} \left( -s \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) \right) \left( -s \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right) - q = \\ &= A_2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 + \mu \left( c^{-1} \left( -s \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{2} c^{-2} \left( -s \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 \right) \right) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right] + \\ &+ A_2 c^{-2} \left[ \left( c^{-1} \left( -s \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{2} c^{-2} \left( -s \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 \right) \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( s^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - 2s \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{где } A_1 = \int_0^1 \frac{E}{(1+\mu)} dz, \quad A_2 = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{E}{1-\mu^2} dz, \quad A_3 = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1-\mu}{2} dz, \quad A_4 = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1-\mu}{2} dz;$$



граничные условия:

– шарнир по контуру пластины:

$$w|_S = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial n^2}|_S = 0, \quad u|_S = 0, \quad v|_S = 0; \quad (8)$$

– защемление по контуру пластины:

$$w|_S = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n}|_S = 0, \quad u|_S = 0, \quad v|_S = 0. \quad (9)$$

Для косоугольных ПФГМ пластин согласно модифицированной моментной теории выражение для цилиндрической  $\bar{D}$  примет вид

$$\bar{D} = \int_{-1/2}^{1/2} \left( \frac{E(z)z^2}{1 - \mu^2(z)} + \frac{E(z)l^2}{1 + \mu(z)} \right) dz. \quad (10)$$

В выражении (10) первый член относится к классической теории, второй член учитывает размерно зависимый параметр  $l$  согласно модифицированной моментной теории Янга [16]. Уравнения (5)–(10) приведены к безразмерному виду с использованием параметров (11). Черточки над безразмерными параметрами в уравнениях (5)–(10) и далее опущены.

$$\bar{w} = \frac{w}{h} \bar{q} = \frac{a^2 b^2}{E h^4} q, \quad \bar{E}(z) = \frac{E(z)}{E_m}, \quad \lambda = \frac{a}{b}, \quad \bar{\xi} = \frac{\xi}{a}, \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{b}, \quad \bar{l} = \frac{l}{h}. \quad (11)$$

## 2. Метод вариационных итераций

Рассмотрим использование метода вариационных итераций на примере системы нелинейных дифференциальных уравнений в операторном виде

$$L_i[\varphi_1(\xi, \eta), \dots, \varphi_m(\xi, \eta)] = f_i(\xi, \eta), \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (12)$$

Решение МВИ для косоугольных пластин представляется в виде суммы произведения функций для МВИ в высших приближениях  $\varphi_i(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^N T_{i,j}(\xi) P_{i,j}(\eta)$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Применение МВИ подробно описано в работах [1–5]. Показано, что МВИ позволяет минимизировать время расчета при высокой точности вычислений [1–5].

### 2.1. Сравнительный анализ решений

Таблица 1 / Table 1

Сопоставление решений квадратной ( $\lambda = 1$ ) полноразмерной ( $l = 0$ ) пластинки, защемленной по контуру (9)  
Comparison of solutions of a square ( $\lambda = 1$ ) full-size ( $l = 0$ ) plate clamped along the contour (9)

Методы	$w(0.5; 0.5)$	Погрешность, %
Yamaki [18]	1.25	0.79
Wang [19]	1.23	2.38
МКЭ [20]	1.23	2.38
МВИ 1 прибл. ( $n = 49$ )	1.26	0.00

Проведем сравнительный анализ известных решений, имеющихся в литературе. Решения  $w(0.5; 0.5)$  для защемления по контуру пластин (9) при  $q = 150$ ,  $\lambda = 1$ ,  $l = 0$ ,  $\varphi = 0$  сопоставляются с решениями, полученными методами Галеркина [18, 19] и конечных элементов [20].

Из данных, представленных в табл. 1, следует, что результаты, полученные МВИ, обладают высокой точностью и отличаются от [18–20] менее чем на 3%.



### 3. Исследование ПФГМ размерно зависимых косоугольных пластин

Геометрия косоугольных пластин существенно влияет на ее напряженно-деформированное состояние и несущую способность. Исследуем влияние угла наклона  $\varphi$  для размерно зависимой на изгибание функционально-градиентной пористой косоугольной пластины У-ПФГМ. На рассматриваемые пластины действует равномерная поперечная нагрузка  $q$ . На рис. 2 приведено сопоставление решений  $q[w(0.5; 0.5)]$  для макроразмерных и микропластин при  $l = 0.4$ , а также изображена поверхность прогибов пластины  $w(\xi, \eta)$  при  $\varphi = 25^\circ$ ,  $l = 0.5$ ,  $q = 200$ .

На рис. 3 изображены графики зависимости максимального прогиба в зависимости от угла наклона  $\varphi$  для трех типов распределения пор: У-ПФГМ, Х-ПФГМ, О-ПФГМ для макро- и наноразмерных пластин. Решения получены при действии равномерно распределенной нагрузки интенсивности  $q = 150$  для шарнирно опертых по контуру пластины (8). На рис. 3 также изображены поверхности  $w(\xi, \eta)$  при  $\varphi = 45^\circ$ ,  $l = 0.5$ ,  $q = 150$ .

Таким образом, увеличение угла наклона косоугольной пластины приводит к уменьшению величины прогиба  $w(\xi, \eta)$ . Зависимость функции  $w(\xi, \eta)$  от угла  $\varphi$  нелинейная (см. рис. 3). Увеличение параметра  $l$  увеличивает несущую способность косоугольных пластин.

Пористость материала является важным фактором при анализе напряженно-деформированного состояния косоугольных пластин. Отметим, что концентрацией напряжений вблизи пустот можно пренебречь ввиду их малого размера.

Исследуем влияние параметра пористости  $\Gamma$  на изгибание функционально-градиентной пористой косоугольной пластины У-ПФГМ.

На рис. 4 приведены решения  $q[w(0.5; 0.5)]$  косоугольных пластин У-ПФГМ для  $p = 1$ ,  $\lambda = 1$  и поверхность  $w(\xi, \eta)$  при  $\varphi = 15^\circ$ ,  $l = 0$ ,  $q = 250$  для шарнирного опирания (9). Цвет кривых указан на рис. 4 в соответствии с параметром пористости  $\Gamma$ .

Параметр пористости  $\Gamma$  определяет объем пор в материале пластинки. Значение параметра пористости оказывает существенное влияние на несущую способность косоугольных пластин. В частности, рост этого параметра способствует снижению величины прогиба для всех видов пористой структуры. Например, для косоугольных пластин с распределением пор типа У-ПФГМ при изменении коэффициента  $\Gamma$  от 0 до 0.4 прогиб возрастает

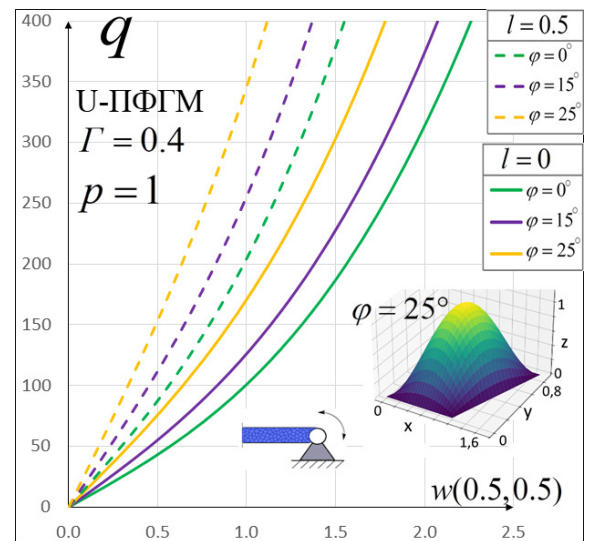


Рис. 2. Зависимость  $q[w(0.5, 0.5)]$  косоугольных пластин У-ПФГМ при  $p = 0$ ,  $\Gamma = 0.4$  макроразмерных ( $l = 0$ ) и микропластин ( $l = 0.5$ ) для граничных условий (8) (цвет онлайн)

Fig. 2. Dependence of  $q[w(0.5, 0.5)]$  of oblique U-PFGM plates at  $p = 0$ ,  $\Gamma = 0.4$  of macro-sized ( $l = 0$ ) and micro-plates ( $l = 0.5$ ) for boundary conditions (8) (color online)

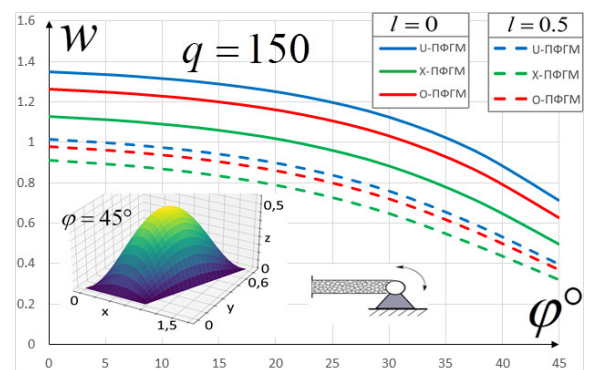


Рис. 3. Сопоставление распределения пористости пластины (цвет онлайн)

Fig. 3. Comparison of the plate's porosity distribution (color online)



на 18–25%, тогда как для микропластин (при  $l = 0.4$ ) увеличение составляет лишь 10%. Учет размерных эффектов также существенно изменяет НДС, приводя к уменьшению прогиба косоугольных пластин на 40–50%.

Соотношение материалов в композите может существенно влиять на их несущую способность. Для анализа данного эффекта исследуем влияние функционально-градиентного параметра материала  $p$  на изгиб ПФГМ косоугольных пластин с распределением пор U-ПФГМ (1). Приведены решения  $q[w(0.5; 0.5)]$  для  $l = 0, 0.4$  (рис. 5).

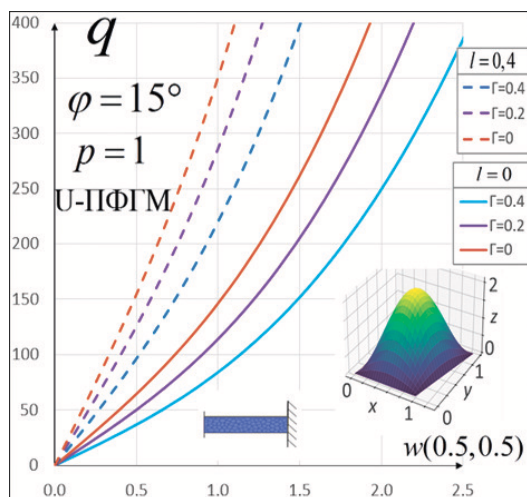


Рис. 4. Зависимость  $q[w(0.5, 0.5)]$  косоугольных пластин при  $\Gamma = 0, 0.2, 0.4$ ,  $\varphi = 15^\circ$  для граничных условий (8) (цвет онлайн)

Fig. 4. Dependence of  $q[w(0.5, 0.5)]$  on oblique plates at  $\Gamma = 0, 0.2, 0.4$ ,  $\varphi = 15^\circ$  for boundary conditions (8) (color online)

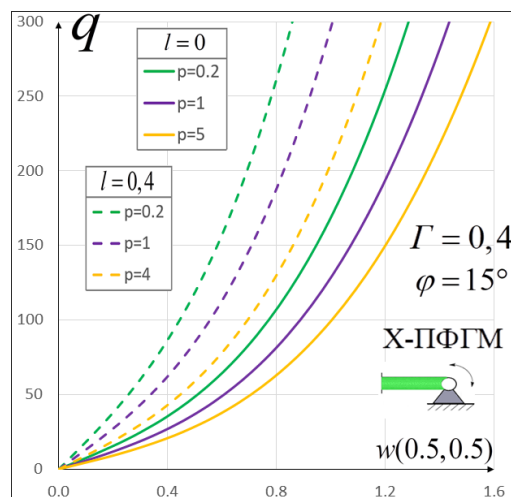


Рис. 5. Зависимость  $q[w(0.5, 0.5)]$  косоугольных пластин при  $\varphi = 15^\circ$ ,  $\lambda = 1$ ,  $p = 0.25, 1, 4$  для граничных условий (8) (цвет онлайн)

Fig. 5. Dependence  $q[w(0.5, 0.5)]$  of oblique plates at  $\varphi = 15^\circ$ ,  $\lambda = 1$ ,  $p = 0.25, 1, 4$  for boundary conditions (8) (color online)

Параметр  $p$  влияет на объемные доли керамики и металла в материале косоугольных пластин. Использование рассматриваемых функционально-градиентных материалов позволяет сочетать в себе особенности гибкости металлических пластин и прочности керамики. С ростом параметра  $p$  увеличивается отношение объема металла к керамике и приводит к значительному росту несущей способности косоугольных пластин для  $l = 0, 0.4$ .

## Заключение

Получена математическая модель косоугольных ПФГМ пластин по модифицированной моментной теории упругости и нелинейности Т. фон Кармана.

Метод вариационных итераций — расширенный метод Канторовича — применяется для расчета указанного класса задач. Показана его высокая точность, позволяющая получать практически точные решения.

Впервые в геометрически нелинейной постановке исследуется напряженно-деформированное состояние пористых функционально-градиентных размерно зависимых косоугольных пластин.

Увеличение объемной доли керамики в функционально-градиентных материалах позволяет существенно увеличить несущую способность косоугольных пластин. Косоугольные пластины с типом пор X (см. (2)) имеют наименьший прогиб по сравнению с порами U (см. (1)), O (см. (3)).

Величина угла наклона существенно влияет на несущую способность ПФГМ косоугольных пластин.



## Список литературы

1. *Awrejcewicz J., Krysko jr V. A., Kalutsky L. A., Krysko V. A.* Computing static behavior of flexible rectangular von Karman plates in fast and reliable way // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2022. Vol. 146. Art. 104162. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2022.104162>
2. *Krysko jr V. A., Awrejcewicz J., Kalutsky L. A., Krysko V. A.* Quantification of various reduced order modelling computational methods to study deflection of size-dependent plates // Computers and Mathematics with Applications. 2023. Vol. 133. P. 61–84. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2023.01.004>
3. *Крысько А. В., Калущкий Л. А., Захарова А. А., Крысько В. А.* Математическое моделирование пористых геометрически нелинейных металлических нанопластин с учетом влажности // Известия Томского политехнического университета. 2023. Т. 334, вып. 9. С. 36–48. DOI: <https://doi.org/10.18799/24131830/2023/9/4210>, EDN: WQMCIR
4. *Krysko A. V., Kalutsky L. A., Krysko V. A.* Stress-strain state of a porous flexible rectangular FGM size-dependent plate subjected to different types of transverse loading: Analysis and numerical solution using several alternative methods // Thin-Walled Structures. 2024. Vol. 196. Art. 111512. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2023.111512>
5. *Куриченко В. Ф., Крысько В. А.* Метод вариационных итераций в теории пластин и оболочек и его обоснование // Прикладная механика. 1981. Т. 17, вып. 4. С. 71–76.
6. *Hassan A. H. A., Kurgan N.* Bending analysis of thin FGM skew plate resting on Winkler elastic foundation using multi-term extended Kantorovich method // Engineering Science and Technology, an International Journal. 2020. Vol. 23, iss. 4. P. 788–800. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jestch.2020.03.009>
7. *Hassan A. H. A., Kurgan N.* Buckling of thin skew isotropic plate resting on Pasternak elastic foundation using extended Kantorovich method // Heliyon. 2020. Vol. 6, iss. 6. P. e04236. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2020.e04236>
8. *Joodaky A., Joodaky I.* A semi-analytical study on static behavior of thin skew plates on Winkler and Pasternak foundations // International Journal of Mechanical Sciences. 2015. Vol. 100. P. 322–327. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2015.06.025>
9. *Kargarnovin M. H., Joodaky A.* Bending analysis of thin skew plates using extended Kantorovich method // Engineering Systems Design and Analysis. 2010. Art. 24138. P. 39–44. DOI: <https://doi.org/10.1115/ESDA2010-24138>
10. *Topping B. H. V., Montero G., Montenegro R.* Bending analysis of curve-sided quadrilateral thin plates using the extended Kantorovich method // Proceedings of the Eighth International Conference on Computational Structures Technology / eds. B. H. V. Topping, G. Montero, R. Montenegro. Stirlingshire, UK : Civil-Comp Press, 2006. Art. 159. DOI: <http://dx.doi.org/10.4203/ccp.83.159>
11. *Wankhade R. L.* Geometric nonlinear analysis of skew plates using finite element method // International Journal of Advanced Engineering Technology. 2011. Vol. 2, iss. 2. P. 154–163.
12. *Mishra B. B., Kumar A., Samui P., Roshni T.* Buckling of laminated composite skew plate using FEM and machine learning methods // Engineering Computations. 2021. Vol. 38, iss. 1. P. 501–528. DOI: <https://doi.org/10.1108/EC-08-2019-0346>
13. *Alwar R. S., Rao N. R.* Nonlinear analysis of orthotropic skew plates // AIAA Journal. 1973. Vol. 11, iss. 4. P. 495–498. DOI: <https://doi.org/10.2514/3.6777>
14. *Kim C. K., Hwang M. H.* Non-linear analysis of skew thin plate by finite difference method // Journal of Mechanical Science and Technology. 2012. Vol. 26. P. 1127–1132. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12206-012-0226-9>
15. *Wang X., Yuan Z.* Buckling analysis of isotropic skew plates under general in-plane loads by the modified differential quadrature method // Applied Mathematical Modelling. 2018. Vol. 56. P. 83–95. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.11.031>
16. *Yang F., Chong A. C. M., Lam D. C. C., Tong P.* Couple stress based strain gradient theory for elasticity // International Journal of Solids and Structures. 2002. Vol. 39, iss. 10. P. 2731–2743. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(02\)00152-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00152-X)
17. *Fan F., Xu Y., Sahmani S., Safaei B.* Modified couple stress-based geometrically nonlinear oscillations of porous functionally graded microplates using NURBS-based isogeometric approach // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2020. Vol. 372. Art. 113400. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113400>





18. Yamaki N. Influence of large amplitudes on flexural vibrations of elastic plates // ZAMM. Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 1961. Vol. 41, iss. 12. P. 501–510. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.19610411204>
19. Wang M., Huang X., Wang X., Qiu X. An approximate solution to the finite deformation of an elastic rectangular plate under static and dynamic transverse loadings // International Journal of Impact Engineering. 2021. Vol. 155. Art. 103916. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2021.103916>
20. Wang M., Huang X., Qiu X. The finite deformation approximate solution and pressure–impulse diagram of an elastic–brittle rectangular glass plate under pressure loading // Thin-Walled Structures. 2023. Vol. 182, pt. A. Art. 110168. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.110168>

## References

1. Awrejcewicz J., Krysko jr V. A., Kalutsky L. A., Krysko V. A. Computing static behavior of flexible rectangular von Karman plates in fast and reliable way. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2022, vol. 146, art. 104162. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2022.104162>
2. Krysko jr V. A., Awrejcewicz J., Kalutsky L. A., Krysko V. A. Quantification of various reduced order modelling computational methods to study deflection of size-dependent plates. *Computers and Mathematics with Applications*, 2023, vol. 133, pp. 61–84. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2023.01.004>
3. Krysko A. V., Kalutsky L. A., Zakharova A. A., Krysko V. A. Mathematical modeling of porous geometrically nonlinear metal nanoplates taking humidity into account. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Geo Assets Engineering*, 2023, vol. 334, iss. 9, pp. 36–48 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18799/24131830/2023/9/4210>, EDN: WQMCIR
4. Krysko A. V., Kalutsky L. A., Krysko V. A. Stress-strain state of a porous flexible rectangular FGM size-dependent plate subjected to different types of transverse loading: Analysis and numerical solution using several alternative methods. *Thin-Walled Structures*, 2024, vol. 196, art. 111512. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2023.111512>
5. Kirichenko V. F., Krysko V. A. The method of variational iterations in plate and shell theory and its justification. *Applied Mechanics*, 1981, vol. 17, iss. 4, pp. 71–76 (in Russian).
6. Hassan A. H. A., Kurgan N. Bending analysis of thin FGM skew plate resting on Winkler elastic foundation using multi-term extended Kantorovich method. *Engineering Science and Technology, an International Journal*, 2020, vol. 23, iss. 4, pp. 788–800. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jestch.2020.03.009>
7. Hassan A. H. A., Kurgan N. Buckling of thin skew isotropic plate resting on Pasternak elastic foundation using extended Kantorovich method. *Heliyon*, 2020, vol. 6, iss. 6, pp. e04236. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2020.e04236>
8. Joodaky A., Joodaky I. A semi-analytical study on static behavior of thin skew plates on Winkler and Pasternak foundations. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2015, vol. 100, pp. 322–327. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2015.06.025>
9. Kargarnovin M. H., Joodaky A. Bending analysis of thin skew plates using extended Kantorovich method. *Engineering Systems Design and Analysis*, 2010, art. 24138, pp. 39–44. DOI: <https://doi.org/10.1115/ESDA2010-24138>
10. Topping B. H. V., Montero G., Montenegro R. Bending Analysis of Curve-Sided Quadrilateral Thin Plates Using the Extended Kantorovich Method. In: Topping B. H. V., Montero G., Montenegro R. (eds.) *Proceedings of the Eighth International Conference on Computational Structures Technology*. Civil-Comp Press, Stirlingshire, UK, 2006, art. 159. DOI: <http://dx.doi.org/10.4203/ccp.83.159>
11. Wankhade R. L. Geometric nonlinear analysis of skew plates using finite element method. *International Journal of Advanced Engineering Technology*, 2011, vol. 2, iss. 2, pp. 154–163.
12. Mishra B. B., Kumar A., Samui P., Roshni T. Buckling of laminated composite skew plate using FEM and machine learning methods. *Engineering Computations*, 2021, vol. 38, iss. 1, pp. 501–528. DOI: <https://doi.org/10.1108/EC-08-2019-0346>
13. Alwar R. S., Rao N. R. Nonlinear analysis of orthotropic skew plates. *AIAA Journal*, 1973, vol. 11, iss. 4, pp. 495–498. DOI: <https://doi.org/10.2514/3.6777>
14. Kim C. K., Hwang M. H. Non-linear analysis of skew thin plate by finite difference method. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2012, vol. 26, pp. 1127–1132. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12206-012-0226-9>



15. Wang X., Yuan Z. Buckling analysis of isotropic skew plates under general in-plane loads by the modified differential quadrature method. *Applied Mathematical Modelling*, 2018, vol. 56, pp. 83–95. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.11.031>
16. Yang F., Chong A. C. M., Lam D. C. C., Tong P. Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 2002, vol. 39, iss. 10, pp. 2731–2743. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(02\)00152-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00152-X)
17. Fan F., Xu Y., Sahmani S., Safaei B. Modified couple stress-based geometrically nonlinear oscillations of porous functionally graded microplates using NURBS-based isogeometric approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020, vol. 372, art. 113400. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113400>
18. Yamaki N. Influence of large amplitudes on flexural vibrations of elastic plates. *ZAMM. Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 1961, vol. 41, iss. 12, pp. 501–510. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.19610411204>
19. Wang M., Huang X., Wang X., Qiu X. An approximate solution to the finite deformation of an elastic rectangular plate under static and dynamic transverse loadings. *International Journal of Impact Engineering*, 2021, vol. 155, art. 103916. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2021.103916>
20. Wang M., Huang X., Qiu X. The finite deformation approximate solution and pressure–impulse diagram of an elastic–brittle rectangular glass plate under pressure loading. *Thin-Walled Structures*, 2023, vol. 182, pt. A, art. 110168. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.110168>

Поступила в редакцию / Received 05.06.2025

Принята к публикации / Accepted 20.07.2025

Опубликована / Published 28.11.2025