



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 4. С. 534–545

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 4, pp. 534–545

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-534-545>

EDN: <https://elibrary.ru/PKGXTO>

Научная статья

УДК 534.2

## Расчет рассеяния плоской звуковой волны абсолютно жестким телом произвольной формы на основе граничного интегрального уравнения Бертона – Миллера

Д. Р. Лепетков

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, Россия, 300026, г. Тула, пр. Ленина, д. 125

**Лепетков Даниил Русланович**, аспирант кафедры прикладной математики и информатики, [Lepetckov@ya.ru](mailto:Lepetckov@ya.ru), <https://orcid.org/0000-0002-5474-1328>, SPIN: 9047-2173, AuthorID: 1246103

**Аннотация.** Рассматривается задача расчета рассеяния плоской звуковой волны абсолютно жестким трехмерным телом. Предполагается, что поверхность тела задана неструктурированной полигональной сеткой (треугольным 3D-мешем), что важно для практических приложений. Развивается метод граничных элементов на основе регуляризованного интегрального уравнения Бертона – Миллера с параметром  $\alpha$ . Применение этого уравнения решает проблему неединственности решения. Несмотря на то, что данный подход изучался многими авторами, некоторые факты оставались неисследованными, в частности, регуляризация для неструктурированных сеток, обоснование метода коллокаций для регуляризованного уравнения Бертона – Миллера. В данной работе даны некоторые ответы на эти вопросы. Предложены регуляризованное уравнение Бертона – Миллера и его дискретная обоснованная версия на основе метода коллокаций. Это позволило разработать устойчивый численный метод, работающий для произвольных волновых чисел. В нем применяется интегрирование по ячейкам Вороного, оценка поверхностного градиента акустического потенциала по соседним вершинам. С целью валидации и тестирования численного метода, обоснования выбора параметра  $\alpha$  для случая шара сделан вывод аналитического решения напрямую из уравнения Бертона – Миллера и сферического разложения Джексона функции Грина. Приведены результаты программной реализации.

**Ключевые слова:** акустический потенциал, плоская звуковая волна, абсолютно жесткое тело, метод граничных элементов, уравнение Гельмгольца, функция Грина, граничное интегральное уравнение Бертона – Миллера, треугольный 3D-меш

**Благодарности:** Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства просвещения РФ, соглашение № 073-00033-24-01 от 09.02.2024, тема научного исследования «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике». Автор благодарит Д. В. Горбачева и С. А. Скобельцына за полезные замечания.

**Для цитирования:** Лепетков Д. Р. Расчет рассеяния плоской звуковой волны абсолютно жестким телом произвольной формы на основе граничного интегрального уравнения Бертона – Миллера // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 4. С. 534–545. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-534-545>, EDN: PKGXTO

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Article

## Calculation of scattering of a plane sound wave by a hard body of arbitrary shape based on the Burton – Miller boundary integral equation

D. R. Lepetkov

Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, 125 Lenin Ave., Tula 300026, Russia

Daniil R. Lepetkov, Lepetkov@ya.ru, <https://orcid.org/0000-0002-5474-1328>, SPIN: 9047-2173, AuthorID: 1246103

**Abstract.** The problem of calculating the scattering of a plane sound wave by a hard three-dimensional body is considered. It is assumed that the surface of the body is given by an unstructured triangular mesh, which is important for practical applications. We develop the boundary element method based on the regularized Burton – Miller integral equation with parameter  $\alpha$ . The use of this equation solves the problem of non-uniqueness of the solution. Despite the fact that this approach has been studied by many authors, some aspects remained unexplored, in particular, the regularization for unstructured meshes and justification for the collocation method for regularized Burton – Miller equation. We provide some answers to these questions. The regularized Burton – Miller equation and its discrete justified version based on the collocation method are proposed. This made it possible to develop a robust numerical method that works for arbitrary wavenumbers. The method involves integration over Voronoi cells and estimation of the surface gradient of the acoustic potential using adjacent vertices. In order to validate and test the numerical method and justify the choice of the parameter  $\alpha$  for the case of a sphere, we derive an analytical solution directly from the Burton – Miller equation and the Jackson spherical expansion of the Green's function. The results of the software implementation are presented.

**Keywords:** acoustic potential, plane sound wave, hard body, boundary element method, Helmholtz equation, Green's function, Burton – Miller boundary integral equation, triangular 3D-mesh

**Acknowledgements:** The work was carried out within the framework of the state assignment of the Ministry of Education of the Russian Federation agreement No. 073-00033-24-01 dated 02/09/2024 scientific research topic “Number-theoretic methods in approximate analysis and their applications in mechanics and physics”. The author thanks D. V. Gorbachev and S. A. Skobeltsyn for their useful comments.

**For citation:** Lepetkov D. R. Calculation of scattering of a plane sound wave by a hard body of arbitrary shape based on the Burton – Miller boundary integral equation. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 4, pp. 534–545 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-534-545>, EDN: PKGXTO

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Пусть  $D \subset \mathbb{R}^3$  — замкнутая односвязная область (тело),  $S = \partial D$  — граница  $D$  (поверхность),  $n = n_x \in \mathbb{S}^2$  — внешняя нормаль в точке  $x \in S$ ,  $\Psi_i(x) = Ae^{ikxd}$  — потенциал падающей на  $D$  плоской звуковой волны,  $k > 0$  — волновое число,  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $d \in \mathbb{S}^2$  — направление,  $xd = x_1d_1 + x_2d_2 + x_3d_3$ ,  $(x)_n = x - (xn)n$ ,  $\partial_n = \nabla n$ ,  $\nabla_S = (\nabla)_n$  — поверхностный градиент,  $f'$  для функций обозначает производную,  $c$  — положительные константы,  $A \approx B$  значит, что  $A$  и  $B$  в пределе равны.

Требуется рассчитать акустический потенциал рассеянной волны  $\Psi_s(x)$  в дальней зоне  $x \in D^c$ . Рассмотрим случай абсолютно жесткого тела с преимущественно гладкой поверхностью (см. [1, гл. 2]). Примеры геометрии сцены приведены в разд. 3.

Данная задача хорошо изучена в теоретической акустике (см., например, [2–5]). Однако ее аналитическое решение известно только для тел канонической формы, задающихся фиксированием одной из координат в некоторой ортогональной системе координат, где разделяются переменные в уравнении Гельмгольца (например, плоскость, сфера или эллипсоид,

бесконечный круговой или эллиптический цилиндр). Для практических приложений важно рассмотреть произвольные тела. В этом случае предложены разные численные методы. Рассмотрим метод граничных элементов (МГЭ) на основе регуляризованной версии граничного интегрального уравнения (ГИУ) Бертона – Миллера с параметром  $\alpha$  (см. [1, 5–9]). Такой выбор связан с тем, что ГИУ в стандартной постановке ( $\alpha = 0$ ) имеет неединственное решение для волновых чисел  $k$ , отвечающих собственным значениям внутренней задачи Дирихле. Это приводит к численной неустойчивости.

МГЭ широко применяется при теоретическом и практическом исследовании задач волновой механики. В ряде работ этот метод используется для приближенного решения задач рассеяния звуковых волн на телах неканонической формы, задаваемых аналитически [2, 10, 11]. Однако в инженерных приложениях чаще всего встречаются либо CAD-поверхности (В-сплайны) [5], либо полигональные сетки (3D-меш). Рассмотрим случай неструктурированного треугольного меша. Например, он может быть получен 3D-сканированием объекта или триангуляцией CAD-модели.

Основной вклад работы в теорию МГЭ состоит в предложении 1 и его дискретной версии 3, полученной обоснованным методом коллокаций (предложение 4). На основе предложения 3 для неструктурированных сеток разработан устойчивый численный метод, включающий применение дискретного градиента (разд. 4). Его преимуществом, по сравнению, например, с [2], является учет произвольных  $k$  и сложных поверхностей. Для случая шара доказано предложение 2, нужное для валидации численного метода и аргументации в пользу выбора параметра  $\alpha = i/k$  (замечание 1).

## 1. Основные уравнения метода граничных элементов

Пусть  $\Psi = \Psi_i + \Psi_s$  — суммарный потенциал. Акустические потенциалы удовлетворяют уравнению Гельмгольца. Для потенциала  $\Psi_s$  справедливо условие излучения Зоммерфельда для уходящих на бесконечность волн. На границе абсолютно жесткого тела  $D$  выполняется условие Неймана  $\partial_n \Psi(x) = 0$ . Потенциал  $\Psi_s(x)$  интересен в дальней зоне, поэтому для уравнения Гельмгольца берется внешняя задача  $x \in D^c$ .

Из результатов [1, 4–8, 12, 13] вытекают следующие факты, в которых  $G_k(x', x) = (4\pi r)^{-1} e^{ikr}$ ,  $r = |x' - x|$ , — функция Грина для уравнения Гельмгольца с условием излучения для уходящих волн,  $G = G_k$ ,  $n' = n_{x'}$ ,  $dx' = dS(x')$ .

1. Во внешности тела  $D$  суммарный потенциал  $\Psi$  гладкий и

$$\Psi_s(x) = \int_S \partial_{n'} G(x', x) \Psi(x') dx', \quad x \in D^c. \quad (1)$$

2. На поверхности  $S$  имеем ГИУ в стандартной постановке

$$C(x) \Psi(x) = \int_S \partial_{n'} G(x', x) \Psi(x') dx' + \Psi_i(x), \quad x \in S, \quad (2)$$

где  $C(x)$  — геометрический коэффициент, равный  $1/2$  в точках гладкости. В этих точках  $\partial_{n'} G = O(r^{-1})$ , поэтому интеграл в (2) слабо сингулярный.

3. Если  $k^2$  является собственным значением внутренней задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца, то решение ГИУ (2) неединственно. Для решения этой проблемы вместо (2) применяется комбинированное уравнение Бертона – Миллера

$$C(x) \Psi(x) = \int_S \partial_{n'} G(x', x) \Psi(x') dx' + \Psi_i(x) + \alpha \left( \int_S \partial_{n, n'}^2 G(x', x) \Psi(x') dx' + \partial_n \Psi_i(x) \right), \quad (3)$$

получаемое суммированием (2) и продифференцированной правой части (2). В точках гладкости  $\partial_{n, n'}^2 G = O(r^{-2})$ , поэтому второй интеграл в (3) гиперсингулярный. При  $\text{Im } \alpha \neq 0$  ГИУ (3) имеет единственное решение класса  $C^{1, \beta}(S)$ ,  $\beta \in (0, 1)$  (см. определение (21)). Обычно полагают  $\alpha = i/k$  (см. замечание 1).



4. Для решения проблемы сингулярности берутся следующие тождества:

$$\begin{aligned} \int_S \partial_{n'} G_0(x', x) dx' &= -C(x), \quad \int_S \partial_{n, n'}^2 G_0(x', x) dx' = 0, \\ \int_S \partial_{n, n'}^2 G_0(x', x)(x' - x) dx' &= \int_S \partial_n G_0(x', x) n' dx' - C(x)n, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $C(x) = 1$ ,  $x \in D^c$ ,  $C(x) = 0$ ,  $x \in D \setminus S$ ,  $n \in \mathbb{S}^2$  — произвольный вектор при  $x \notin S$ . С учетом (4) применяется следующая регуляризация сингулярных интегралов:

$$\begin{aligned} \int_S \partial_{n'} G(x', x) \Psi(x') dx' &= A_1 \Psi(x) - C(x) \Psi(x), \quad \int_S \partial_{n, n'}^2 G(x', x) \Psi(x') dx' = A_2 \Psi(x), \\ A_1 \Psi(x) &= \int_S [\partial_{n'} G(x', x) \Psi(x') - \partial_n G_0(x', x) \Psi(x)] dx', \\ A_2 \Psi(x) &= \int_S [\partial_{n, n'}^2 G(x', x) \Psi(x') - \partial_{n, n'}^2 G_0(x', x) L(x', x)] dx' + \int_S \partial_n G_0(x', x) \nabla_S \Psi(x) n' dx', \\ L(x', x) &= \Psi(x) + \nabla_S \Psi(x)(x' - x) = \Psi(x) + \nabla_S \Psi(x)(x' - x)_n. \end{aligned} \quad (5)$$

Из фактов 1–4 вытекает следующее утверждение.

**Предложение 1.** Пусть  $A = A_0 - A_1 - \alpha A_2$ ,  $B = I + \alpha \partial_n$ , где  $A_0 \Psi(x) = 2C(x) \Psi(x)$ . Тогда справедливо регуляризованное ГИУ Бертона – Миллера

$$A \Psi(x) = B \Psi_1(x), \quad x \in S. \quad (8)$$

При  $\text{Im } \alpha \neq 0$  оно имеет единственное решение  $\Psi \in C^{1, \beta}(S)$ .

Уравнение (8) встречается в немного другой форме и без обсуждения гладкости решения в работе [8]. Идея использовать (d) и линейную функцию  $L$  взята из [5]. В разд. 3 она адаптируется для треугольных мешей.

## 2. Вывод аналитического решения для шара из ГИУ Бертона – Миллера

Для обоснования выбора  $\alpha$ , валидации и тестирования численного решения нужно рассмотреть пример, где известно аналитическое решение. Удобно взять единичный шар,  $A = 1$ ,  $d = (1, 0, 0)$ . Тогда  $S = \mathbb{S}^2$  — единичная сфера,  $C(x) \equiv 1/2$ .

Пусть  $(r \cos \theta, r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta)$  — сферические координаты  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $r = |x|$ .

Имеем [3]

$$\Psi_1(x) = e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} \gamma_l j_l(kr) P_l(\cos \theta), \quad \gamma_l = (2l+1)i^l, \quad (9)$$

где  $j_l$  — сферические функции Бесселя,  $P_l$  — многочлены Лежандра. В численных расчетах сходящийся ряд (9) применяется с конечным числом слагаемых. Тогда по теореме Парсеваля приближенное решение ГИУ (3) также будет содержать конечное число слагаемых. Поэтому далее считаем, что это верно для всех рядов Фурье – Лежандра. Тогда их можно свободно дифференцировать, в частности,

$$\partial_n \Psi_1(x) = k \sum_{l=0}^{\infty} \gamma_l j'_l(kr) P_l(\cos \theta). \quad (10)$$

Для внешней задачи в силу условия излучения для уходящих волн имеем

$$\Psi_s(x) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l h_l(kr) P_l(\cos \theta),$$



где  $h_l$  — сферические функции Ганкеля первого рода,  $A_l$  — неизвестные коэффициенты. В итоге суммарный потенциал равен

$$\Psi(x) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l(kr) P_l(\cos \theta), \quad B_l(z) = \gamma_l j_l(z) + A_l h_l(z). \quad (11)$$

Из условия Неймана для  $r = 1$  и произвольного  $\theta$  находим

$$k \sum_{l=0}^{\infty} B'_l(k) P_l(\cos \theta) = 0, \quad B'_l(k) = \gamma_l j'_l(k) + A_l h'_l(k) = 0, \quad A_l = -\frac{\gamma_l j'_l(k)}{h'_l(k)},$$

где  $h'_l(k) \neq 0$ . Получили известное выражение для коэффициентов  $A_l$  потенциала  $\Psi_s$  (см., например, [5, разд. 7.2]). Соответственно,  $B_l(z) = \frac{\gamma_l}{h'_l(k)} [j_l(z) h'_l(k) - j'_l(k) h_l(z)]$ . Если воспользоваться вронскианом  $j_l(z) h'_l(z) - j'_l(z) h_l(z) = \frac{i}{z^2}$ , получим

$$B_l(k) = \frac{i \gamma_l}{k^2 h'_l(k)}. \quad (12)$$

Выведем теперь решение (12) из ГИУ Бертона–Миллера (3).

**Предложение 2.** Для всех  $l = 0, 1, 2, \dots$  справедливо равенство

$$-ik^2 h'_l(k) [j_l(k) + \alpha k j'_l(k)] B_l(k) = \gamma_l [j_l(k) + \alpha k j'_l(k)]. \quad (13)$$

**Доказательство.** Воспользуемся сферическим разложением Джексона [14]

$$G(x', x) = ik \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} j_l(k \min(r, r')) h_l(k \max(r, r')) P_l(\cos \gamma),$$

где  $(r' \cos \theta', r' \cos \varphi' \sin \theta', r' \sin \varphi' \sin \theta')$  — сферические координаты  $x'$ ,  $xx' = rr' \cos \gamma$ .

Производные функции Грина вычисляем в смысле главного значения. Тогда

$$\partial_{n'} G(x', x) = \frac{ik^2}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} [j_l(k) h'_l(k) + j'_l(k) h_l(k)] P_l(\cos \gamma), \quad (14)$$

$$\partial_{n,n'}^2 G(x', x) = ik^3 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} j'_l(k) h'_l(k) P_l(\cos \gamma), \quad x, x' \in \mathbb{S}^2. \quad (15)$$

Подставим (9), (10), (11), (14), (15) в ГИУ (3) и воспользуемся формулой

$$\frac{2l+1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} P_l(x'd) P_l(x'x) dx' = P_l(xd) \delta_{ll'}, \quad x, d \in \mathbb{S}^2.$$

Тогда для всех  $\theta$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} B_l(k) P_l(\cos \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \frac{ik^2}{2} [j_l(k) h'_l(k) + j'_l(k) h_l(k)] B_l(k) + \gamma_l j_l(k) + \right. \\ &\quad \left. + \alpha [ik^3 j'_l(k) h'_l(k) B_l(k) + k \gamma_l j'_l(k)] \right\} P_l(\cos \theta), \end{aligned}$$

откуда с учетом вронскиана

$$\left[ \frac{1}{2} - \frac{ik^2}{2} \left( 2j_l(k) h'_l(k) - \frac{i}{k^2} \right) - \alpha ik^3 j'_l(k) h'_l(k) \right] B_l(k) = \gamma_l [j_l(k) + \alpha k j'_l(k)]$$

после упрощений получаем искомое равенство (13).  $\square$



**Замечание 1.** Известно, что  $j_l(k) + \alpha k j'_l(k) \neq 0$  при  $\text{Im } \alpha \neq 0$ . Тогда (13) влечет (12). Если  $\alpha = 0$ , что отвечает стандартной постановке ГИУ, то для  $k$ , совпадающих с нулями функции Бесселя  $j_l(k)$  (равносильно,  $k^2$  — собственное значение задачи Дирихле в шаре) значения  $B_l(k)$  в (13) не определены, что влечет неединственность решения и численную неустойчивость.

Из (13) и определения оператора  $A$  следует, что в базисе из многочленов Лежандра  $A$  является диагональным с элементами  $a_l = -ik^2 h'_l(k) [j_l(k) + \alpha k j'_l(k)]$ , поэтому его число обусловленности  $\kappa = \frac{\max_l |a_l|}{\min_l |a_l|}$ . Если положить  $\alpha k = ic$  (можно ограничиться  $c > 0$ ) и построить гистограмму значений  $c_{\min} = \arg\min_c \kappa(k, c)$ , то увидим пик при  $c_{\min} \approx 1$ . Это обосновывает выбор  $\alpha = i/k$  (см. также [4, 12]).

### 3. Описание метода коллокаций для треугольного меша

Приведем дискретную версию предложения 1, нужную для численной реализации. Для этого, отталкиваясь от задания поверхности тела, аппроксимируем ГИУ (8).

**Геометрия поверхности.** Пусть поверхность тела  $D$  представлена неструктурированным равномерным невырожденным водонепроницаемым треугольным мешом  $S$ , состоящим из вершин  $\{x_i\}_{i=1}^N \subset \mathbb{R}^3$  с внешними нормальными  $\{n_i\}_{i=1}^N \subset \mathbb{S}^2$  (примеры см. на рис. 1). Ребра приблизительно равны и их средняя длина  $h \approx 0$ .

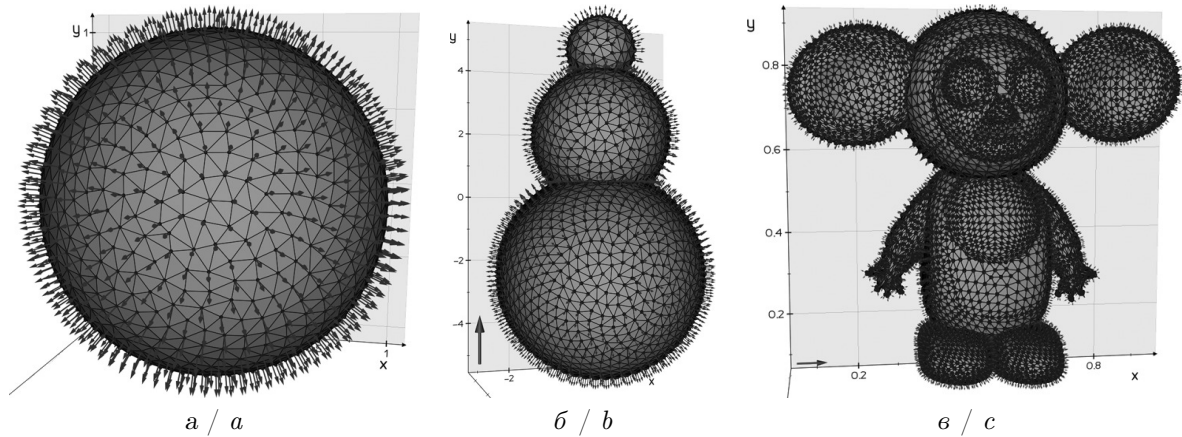


Рис. 1. Примеры мешей (показаны вершины, нормали и ребра): а — сфера Фибоначчи; б — «Снеговик» (объединение трех сфер); в — «Чебурашка»

Fig. 1. Examples of meshes (vertices, normals, and edges are shown): a is the Fibonacci sphere; b is “Snowman” (union of three spheres); c is “Cheburashka”

**Дискретизация интегралов и функций.** Пусть  $i, j = 1, \dots, N$ ,  $\sum_i = \sum_{i=1}^N$ . Точки  $x, x'$  ассоциируем с вершинами  $x_i, x_j$ , нормали  $n, n'$  — с нормальными  $n_i, n_j$ . Меш  $S$  разбивается на ячейки Вороного  $S_i$  с центрами в  $x_i$  и площадями  $w_i = |S_i|$ ,  $\sum_i w_i = |S|$ . Для равномерного меша  $\max_{x \in S_i} |x - x_i| \asymp h$ ,  $w_i \asymp h^2$ .

Функции на меше аппроксимируются кусочно-линейными функциями и

$$\int_S f(x) dx = \sum_i \int_{S_i} f(x) dx \approx \sum_i w_i f(x_i). \quad (16)$$

Точность квадратурной формулы (16) определяется погрешностью кусочно-линейной аппроксимации  $f$ . Действительно, если  $T$  — треугольная грань с барицентром  $x_T$  и  $f$  — линейная на  $T$ , то  $\int_T f(x) dx = |T|f(x_T)$ . Так как ячейка  $S_i$  разбивается на соизмеримые треугольники  $T$  с общей вершиной  $x_i$ , то  $\sum_T |T| x_T \approx w_i x_i$  и

$$\int_{S_i} f(x) dx = \sum_T \int_T f(x) dx = \sum_T |T| f(x_T) = f\left(\sum_T |T| x_T\right) \approx w_i f(x_i).$$

Интегралы вида  $\int_S f(x', x_i) dx'$  аппроксимируем  $\sum_j w_j f(x_j, x_i)$ . Если  $f$  имеет слабую сингулярность  $O(|x' - x_i|^{-\gamma})$ ,  $x' \in S_i$ ,  $\gamma \in [0, 2)$ , то учтем, что по [1, гл. 2]

$$\int_{S_i} f(x', x_i) dx' = O(|x' - x_i|^{2-\gamma}) = O(h^{2-\gamma}). \quad (17)$$

Напомним, что  $\Psi_i(x) = e^{k_1 x d}$ ,  $G(x', x) = (4\pi)^{-1} e^{k_1 r t}$ , где  $k_1 = ik$ ,  $r = |y|$ ,  $y = x' - x$ ,  $t = r^{-1}$ . Отсюда

$$\begin{aligned} \partial_n \Psi_i &= k_1 e^{k_1 x d} dn, \quad \partial_{n'} G = G(k_1 - t) \partial_{n'} r, \quad \partial_n G = G(k_1 - t) \partial_n r, \\ \partial_{n,n'} G &= k_1^2 G \partial_{n'} r \partial_n r - G(k_1 - t) t (n' n + 3 \partial_{n'} r \partial_n r), \quad \partial_{n'} r = t n', \quad \partial_n r = -t n. \end{aligned}$$

Положим  $\Psi_i^{(i)} = \Psi_i(x_i)$ ,  $(\partial_n \Psi_i)^{(i)} = \partial_{n_i} \Psi_i(x_i)$ ,  $C^{(i)} = C(x_i)$ ,  $(\partial_n G_k)^{(j,i)} = \partial_{n_i} G_k(x_j, x_i)$ ,  $(\partial_{n'} G_k)^{(j,i)} = \partial_{n_j} G_k(x_j, x_i)$ ,  $(\partial_{n,n'}^2 G_k)^{(j,i)} = \partial_{n_i, n_j}^2 G_k(x_j, x_i)$  и приближенно  $\Psi^{(i)} \approx \Psi(x_i)$ ,  $(\nabla_S \Psi)^{(i)} \approx \nabla_S \Psi(x_i)$ ,  $L^{(j,i)} \approx L(x_j, x_i)$ . В силу (17) можно положить  $(\partial_{n'} G_k)^{(i,i)} = 0$  и аналогично в остальных случаях.

**Оценка поверхностного градиента.** В соответствии с (7) для  $x' \approx x_i$

$$\nabla_S \Psi(x_i)(x' - x_i)_{n_i} = L(x', x_i) - \Psi(x_i) \approx \Psi(x') - \Psi(x_i).$$

Для оценки  $\nabla_S \Psi(x_i)$  используем соседние с  $x_i$  вершины  $x_{i'}$  из 1-ринга  $R_i$ .

Пусть  $U^{(i)} = ((x_{i'} - x_i)_{n_i})_{i' \in R_i}$  — матрица размера  $|R_i| \times 3$ ,  $F^{(i)} = (\Psi^{(i')} - \Psi^{(i)})_{i' \in R_i}$  — вектор длины  $|R_i|$ . Тогда для дискретного градиента  $(\nabla_S \Psi)^{(i)}$  получаем переопределенную систему линейных уравнений  $U^{(i)}(\nabla_S \Psi)^{(i)} = F^{(i)}$ , которая решается с помощью псевдообратной матрицы  $(U^{(i)})^+$  размером  $3 \times |R_i|$ :  $(\nabla_S \Psi)^{(i)} = (U^{(i)})^+ F^{(i)}$ . Матрица  $(U^{(i)})^+$  вычисляется быстро, так как  $|R_i| \approx 6$ . Ее колонки обозначим  $(U^{(i)})_{i'}^+$ .

**Система линейных уравнений.** В соответствии с предложением 1 имеем  $A\Psi(x) = B\Psi_i(x)$ ,  $x \in S$ , где  $A = A_0 - A_1 - \alpha A_2$ ,  $B = I + \alpha \partial_n$ . Найдем дискретные варианты этих операторов. В случае  $A_0$  и  $B$  имеем

$$(A_0 \Psi)^{(i)} = 2C^{(i)} \Psi^{(i)}, \quad (B \Psi_i)^{(i)} = \Psi_i^{(i)} + \alpha (\partial_n \Psi_i)^{(i)}. \quad (18)$$

С учетом (5), (6) получаем

$$\begin{aligned} (A_1 \Psi)^{(i)} &= \sum_j w_j (\partial_{n'} G)^{(j,i)} \Psi^{(j)} - \Psi^{(i)} \sum_j w_j (\partial_{n'} G_0)^{(j,i)}, \\ (A_2 \Psi)^{(i)} &= \sum_j w_j (\partial_{n,n'}^2 G)^{(j,i)} \Psi^{(j)} - \sum_j w_j (\partial_{n,n'}^2 G_0)^{(j,i)} L^{(j)} + \sum_j w_j (\partial_n G_0)^{(j,i)} (\nabla_S \Psi)^{(i)} n_j, \end{aligned}$$

где  $(\nabla_S \Psi)^{(i)} = (U^{(i)})^+ (\Psi^{(i')} - \Psi^{(i)})_{i' \in R_i}$ . Из этой формулы следует, что

$$(\nabla_S \Psi)^{(i)} v = \sum_{i'} (U^{(i)})_{i'}^+ v \Psi^{(i')} - \Psi^{(i)} \sum_{i'} (U^{(i)})_{i'}^+ v, \quad v \in \mathbb{R}^3.$$

Если раскрыть  $L^{(j,i)} = \Psi^{(i)} + (\nabla_S \Psi)^{(i)}(x_j - x_i)$ , находим

$$\begin{aligned} (A_2 \Psi)^{(i)} &= \sum_j w_j (\partial_{n,n'}^2 G)^{(j,i)} \Psi^{(j)} - \Psi^{(i)} \sum_j w_j (\partial_{n,n'}^2 G_0)^{(j,i)} - \\ &- \sum_j w_j (\partial_{n,n'}^2 G_0)^{(j,i)} \left( \sum_{i'} (U^{(i)})_{i'}^+ (x_j - x_i) \Psi^{(i')} - \Psi^{(i)} \sum_{i'} (U^{(i)})_{i'}^+ (x_j - x_i) \right) + \\ &+ \sum_j w_j (\partial_n G_0)^{(j,i)} \left( \sum_{i'} (U^{(i)})_{i'}^+ n_j \Psi^{(i')} - \Psi^{(i)} \sum_{i'} (U^{(i)})_{i'}^+ n_j \right). \end{aligned}$$

Запишем данные формулы в следующий дискретный вариант предложения 1.



**Предложение 3.** Дискретный потенциал  $\Psi^{(i)}$  удовлетворяет системе линейных уравнений

$$(A^{(i,j)})(\Psi^{(j)}) = (B^{(i)}), \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (19)$$

где  $B^{(i)} = (B\Psi_1)^{(i)}$  взят из (18), а  $i$ -я строка матрицы определяется из равенства

$$\begin{aligned} \sum_j A^{(i,j)} \Psi^{(j)} &= (A_0 \Psi)^{(i)} - (A_1 \Psi)^{(i)} - \alpha (A_2 \Psi)^{(i)} = \\ &= 2C^{(i)} \Psi^{(i)} - \sum_j w_j (\partial_{n'} G)^{(j,i)} \Psi^{(j)} + \left( \sum_j w_j (\partial_{n'} G_0)^{(j,i)} \right) \Psi^{(i)} - \\ &\quad - \alpha \left[ \sum_j w_j (\partial_{n,n'}^2 G)^{(j,i)} \Psi^{(j)} - \left( \sum_j w_j (\partial_{n,n'}^2 G_0)^{(j,i)} \right) \Psi^{(i)} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i'} V_1^{(i,i')} \Psi^{(i')} + \left( \sum_{i'} V_1^{(i,i')} \right) \Psi^{(i)} + \sum_{i'} V_2^{(i,i')} \Psi^{(i')} - \left( \sum_{i'} V_2^{(i,i')} \right) \Psi^{(i)} \right], \\ V_l^{(i,i')} &= (U^{(i)})_{i'}^+ Q_l^{(i)}, \quad Q_1^{(i)} = \sum_j w_j (\partial_{n,n'}^2 G_0)^{(j,i)} (x_j - x_i), \quad Q_2^{(i)} = \sum_j w_j (\partial_n G_0)^{(j,i)} n_j. \end{aligned}$$

**Расчет акустического потенциала.** Решая систему (19), находим приближенные граничные значения потенциала  $\Psi^{(j)}$ , после чего дискретизируем (1) и приближенно записываем  $\Psi_s(x) \approx \sum_j w_j \partial_{n_j} G(x_j, x) \Psi^{(j)}$ ,  $x \in D^c$ ,  $|x| \gg 1$ .

**Сходимость дискретного решения.** Метод коллокаций для уравнения Гельмгольца обосновывается, например, в работе [15] с помощью теории Вайникко. Сделаем это для регуляризованного уравнения Бертона – Миллера (8) напрямую. Спроектировав меш на поверхность, теперь будем считать, что  $S = \partial D$ , ячейки  $S_i$  отвечают разбиению  $S$  на криволинейные многоугольники, параметр  $h \asymp N^{-1}$  характеризует размер множеств  $S_i$  и не зависит от разбиения,  $|x - x_i| = O(h)$  для  $x \in S_i$ . Для простоты пусть  $S$  гладкая (иначе ее и решение нужно разбить на гладкие куски). Тогда по [1, теорема 2.2] имеем  $|(x' - x)n'| = O(r^2)$ ,  $|n' - n| = O(r)$ ,  $\partial_{n'} r = O(r)$ ,

$$\partial_{n'} G(x', x) = O(r^{-1}), \quad \partial_{n,n'}^2 G(x', x) = O(r^{-2}). \quad (20)$$

Пусть  $C^{1,\beta}(S)$ ,  $\beta \in (0, 1)$ , — пространство Гёльдера функций с нормой [1, гл. 2]

$$\|f\|_{1,\beta} = \|f\|_\infty + \|\nabla_S f\|_\infty + \sup_{x, x' \in S, x \neq x'} \frac{|\nabla_S f(x) - \nabla_S f(x')|}{|x - x'|^\beta}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in S} |f(x)|. \quad (21)$$

По [7, теорема 3.5] существует единственное решение  $\Psi \in C^{1,\beta}(S)$  уравнения Бертона – Миллера (3), а значит, и его регуляризованной версии (8). Интегралы в (8) слабо сингулярные, поэтому по [1, гл. 2] оператор  $A$  из предложения 1 компактный при действии из  $C^{1,\beta}(S)$  в пространство непрерывных функций  $C(S)$ . Обоснование метода коллокаций, по сути, заключается в доказательстве равномерной по  $i = 1, \dots, N$ ,  $x \in S_i$  сходимости в пространстве решения  $C^{1,\beta}(S)$  дискретных конечномерных операторов  $(A\Psi)^{(i)}$ ,  $(B\Psi_1)^{(i)}$  к  $A\Psi(x)$ ,  $B\Psi_1(x)$  при измельчении разбиения  $h \rightarrow 0$  ( $N \rightarrow \infty$ ) (см. также [1, теорема 1.10]).

**Предложение 4.** Пусть  $\Psi \in C^{1,\beta}(S)$ . Равномерно по  $x \in S_i$

$$A\Psi(x) = (A\Psi)^{(i)} + o(1), \quad B\Psi_1(x) = (B\Psi_1)^{(i)} + O(h), \quad h \rightarrow 0,$$

где константы в  $O$  не зависят от  $i$  и включают нормы функций.

**Доказательство.** Напомним, что  $A = A_0 - A_1 - \alpha A_2$ . Для гладкой поверхности  $A_0 = I$ , поэтому равномерная сходимость  $(A_0\Psi)^{(i)} = \Psi(x_i)$  к  $A_0\Psi(x)$  вытекает из

$$|\Psi(x) - \Psi(x_i)| \leq \|\nabla_S \Psi\|_\infty |x - x_i| \leq \|\Psi\|_{1,\beta} |x - x_i| = O(h) \quad (22)$$



(см. также [1, теорема 2.5]). Аналогично, так как  $B\Psi_i(x) = e^{k_1 x d}(1 + \alpha k_1 d n)$  гладкая функция,  $(B\Psi_i)^{(i)} = B\Psi_i(x_i)$ , то  $|B\Psi_i(x) - (B\Psi_i)^{(i)}| = O(h)$ .

Рассмотрим интегральные операторы  $A_1, A_2$  (5), (6). Из оценок (20), (22) и

$$\begin{aligned}\partial_{n'}(G - G_0)(x', x) &= O(1), \quad \partial_{n, n'}^2(G - G_0)(x', x) = O(1), \\ |\Psi(x') - L(x', x)| &= |\Psi(x') - \Psi(x) - \nabla_S \Psi(x)(x' - x)| = O(r^{1+\beta}), \\ |\nabla_S \Psi(x)n'| &= |(\nabla_S \Psi(x) - \nabla_S \Psi(x'))n'| = O(r^\beta)\end{aligned}$$

следует, что нужно исследовать на равномерную сходимость интеграл  $\int_S f(x', x) dx'$ , где в худшем случае  $f$  имеет сингулярность  $O(r^{\beta-1})$ . Достаточно изучить только этот случай. Положим  $f = r^{\beta-1}g$ , где  $g$  — равномерно непрерывная ограниченная функция. Интеграл сравнивается с суммой  $\sum_j w_j f(x_j, x_i)$ , где считаем  $f(x_i, x_i) = 0$ , так как  $\int_{S_i} f dx' = O(h^{1+\beta})$  по (17).

Пусть  $j \neq i$ ,  $x' \in S_j$ . Так как  $g(x', x) - g(x_j, x_i) = o(1)$  при  $h \rightarrow 0$  равномерно по  $i, j$ , то  $\int_{S_j} f(x', x) dx' = (g(x_j, x_i) + o(1)) \int_{S_j} r^{\beta-1} dx'$ .

Имеем

$$\left| \frac{1}{|x' - x|^{1-\beta}} - \frac{1}{|x_j - x_i|^{1-\beta}} \right| = \frac{||x_j - x_i|^{1-\beta} - |x' - x|^{1-\beta}|}{|x' - x|^{1-\beta}|x_j - x_i|^{1-\beta}} \leq \frac{|x_j - x_i - x' + x|^{1-\beta}}{|x' - x|^{1-\beta}|x_j - x_i|^{1-\beta}}.$$

Числитель последней дроби есть  $O(h^{1-\beta})$ . Так как  $|x_j - x_i| \geq c_0 h$ ,  $|x' - x| \leq |x_j - x_i| + c_1 h$  для всех  $i, j$ , то  $|x' - x| \leq c|x_j - x_i|$ , поэтому дробь есть  $|x' - x|^{2\beta-2} O(h^{1-\beta})$ . Отсюда

$$\int_{S_j} \left( \frac{1}{|x' - x|^{1-\beta}} - \frac{1}{|x_j - x_i|^{1-\beta}} \right) dx' = s_j O(h^{1-\beta}), \quad s_j = \int_{S_j} \frac{1}{|x' - x|^{2-2\beta}} dx'.$$

Сингулярный интеграл  $\int_S |x' - x|^{-\gamma} dx' = O(1)$ ,  $x \in S$ ,  $\gamma \in (0, 2)$  (см. [1, гл. 2]), поэтому

$$\sum_j s_j = O(1) \quad \text{и} \quad \int_S \frac{1}{|x' - x|^{1-\beta}} dx' = \sum_{j \neq i} \frac{w_j}{|x_j - x_i|^{1-\beta}} + O(h^{1-\beta}).$$

В итоге находим

$$\begin{aligned}\int_{S_j} f(x', x) dx' &= (g(x_j, x_i) + o(1))(w_j |x_j - x_i|^{\beta-1} + s_j O(h^{1-\beta})) = \\ &= w_j f(x_j, x_i) + w_j |x_j - x_i|^{\beta-1} o(1) + g(x_j, x_i) s_j O(h^{1-\beta}) + s_j o(1) O(h^{1-\beta})\end{aligned}$$

и искомое равенство  $\int_S f(x', x) dx' = \sum_j w_j f(x_j, x_i) + o(1)$ .

Сходимость дискретного градиента  $(\nabla_S \Psi)^{(i)}$  в  $A_2$  вытекает из равномерной оценки  $\Psi(x_{i'}) - \Psi(x_i) = (\nabla_S \Psi(x_i) + O(h^\beta))(x_{i'} - x_i)_{n_i}$ , откуда  $(\nabla_S \Psi)^{(i)} = \nabla_S \Psi(x) + O(h^\beta)$ .  $\square$

#### 4. Примеры результатов расчета

Компьютерная реализация валидировалась и тестировалась для жесткого шара на основе формул разд. 2 и на телах, задаваемых мешом небольшого размера (см. рис. 1).

На рис. 2 приведены диаграммы рассеяния аналитического (сплошная линия) и численного (штриховая линия) решений в дальней зоне для случая единичного шара. Результаты даны для  $k = 2\pi$ , когда решение при  $\alpha = 0$  неединственно, что привело к расхождению.

На рис. 3 изображены 3D-диаграммы рассеяния для тел «Снеговик» и «Чебурашка», а также примеры 2D-сечений, где штриховой линией показано аналитическое решение для шара того же объема, что и тело. Отметим, что в случае тела «Снеговик» идентичный результат был получен в COMSOL методом конечных элементов, адаптированным для акустических задач [3].

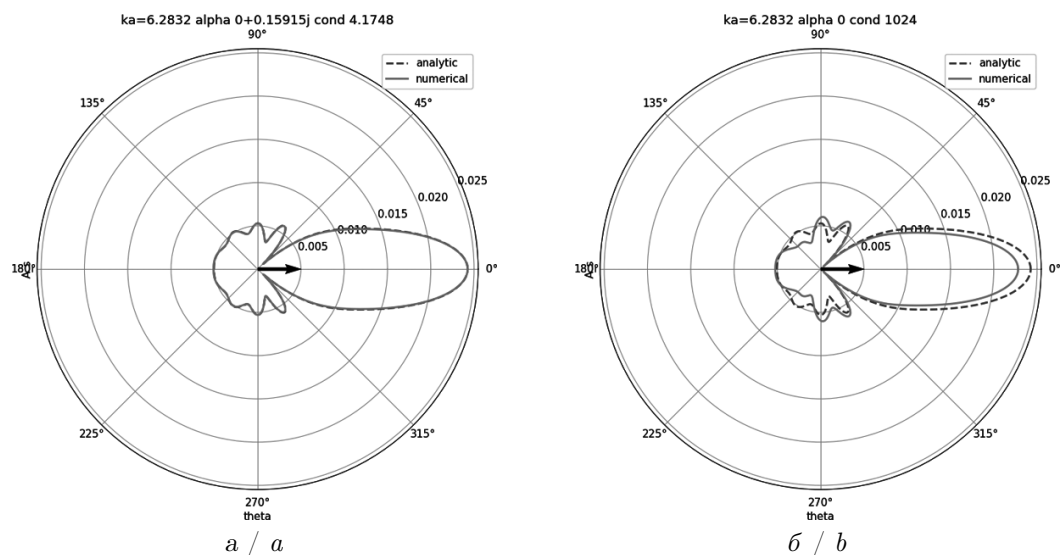


Рис. 2. Сравнение решений для шара:  $a$  — при  $\alpha = i/k$ ;  $b$  —  $\alpha = 0$   
 Fig. 2. Comparison of solutions for the ball:  $a$  is when  $\alpha = i/k$ ;  $b$  is when  $\alpha = 0$

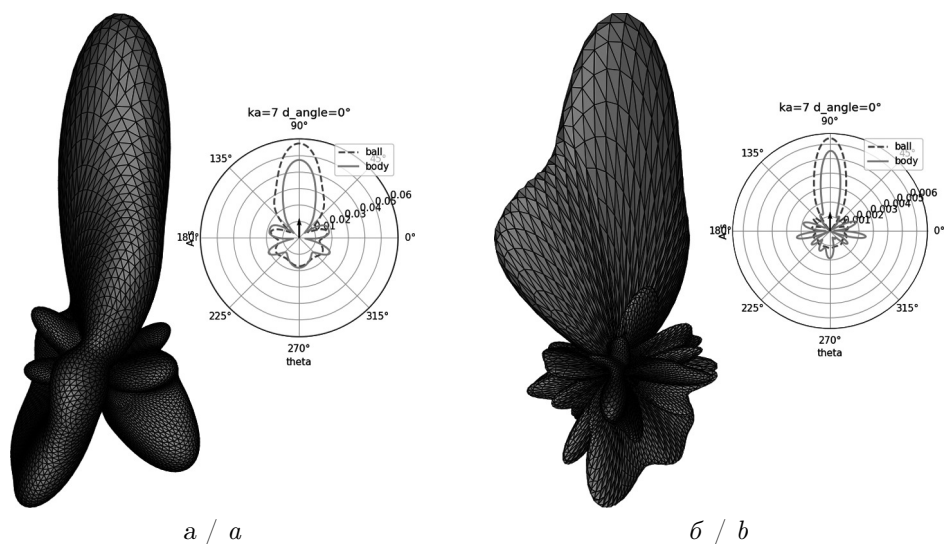


Рис. 3. 3D-диаграммы рассеяния:  $a$  — для тела «Снеговик»;  $b$  — для тела «Чебурашка»  
 Fig. 3. 3D scatter plots:  $a$  is for the body “Snowman”;  $b$  is for the body “Cheburashka”

## Заключение

В работе предложен метод расчета рассеяния плоской звуковой волны абсолютно жестким трехмерным телом произвольной формы, поверхность которого аппроксимирована треугольной сеткой. Метод базируется на граничном интегральном уравнении Бертона – Миллера и методе граничных элементов. Для его реализации выполнена регуляризация сингулярных интегралов, адаптированная для треугольных сеток. Аналитическая модель дискретизована методом коллокаций, и обоснована сходимость численного решения. Для валидации численной модели получено аналитическое решение для сферы напрямую из уравнения Бертона – Миллера и разложения Джексона функции Грина. Показаны совпадение численных и аналитических результатов, а также устойчивость численной реализации для волновых чисел из средневолновой области. Метод сравнивался с FEM и при сопоставимой точности показал значительно большую эффективность.



## Список литературы

1. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. Москва : Мир, 1987. 311 с.
2. Авдеев И. С. Рассеяние звука телами неканонической формы : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Тула, 2011. 153 с. EDN: QFDEQF
3. Скобелъцын С. А. Некоторые обратные задачи дифракции звуковых волн на неоднородных анизотропных упругих телах : дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Тула, 2020. 317 с. EDN: TNKMIA
4. Amini S. On the choice of the coupling parameter in boundary integral formulations of the exterior acoustic problem // *Applicable Analysis*. 1990. Vol. 35, iss. 1–4. P. 75–92. DOI: <https://doi.org/10.1080/00036819008839905>
5. Simpson R. N., Scott M. A., Taus M., Thomas D. C., Lian H. Acoustic isogeometric boundary element analysis // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2014. Vol. 269. P. 265–290. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2013.10.026>
6. Burton A. J., Miller G. F. The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary-value problems // *Proceedings of the Royal Society of London. A*. 1971. Vol. 323, iss. 1553. P. 201–210. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1971.0097>
7. Lin T.-C. A proof for the Burton and Miller integral equation approach for the Helmholtz equation // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1984. Vol. 103, iss. 2. P. 565–574. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(84\)90146-X](https://doi.org/10.1016/0022-247X(84)90146-X)
8. Chen K., Cheng J., Harris P. J. A new study of the Burton and Miller method for the solution of a 3D Helmholtz problem // *IMA Journal of Applied Mathematics*. 2009. Vol. 74, iss. 2. P. 163–177. DOI: <https://doi.org/10.1093/imamat/hxp002>
9. Langrenne C., Garcia A., Bonnet M. Solving the hypersingular boundary integral equation for the Burton and Miller formulation // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2015. Vol. 138, iss. 5. P. 3332–3340. DOI: <https://doi.org/10.1121/1.4935134>
10. Kress R. On the numerical solution of a hypersingular integral equation in scattering theory // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 1995. Vol. 61, iss. 3. P. 345–360. DOI: [https://doi.org/10.1016/0377-0427\(94\)00073-7](https://doi.org/10.1016/0377-0427(94)00073-7)
11. Gaunaurd G. C., Huang H. Acoustic scattering by a spherical body near a plane boundary // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1994. Vol. 96, iss. 4. P. 2526–2536. DOI: <https://doi.org/10.1121/1.410126>
12. Meyer W. L., Bell W. A., Stallybrass M. P., Zinn B. T. Prediction of the sound field radiated from axisymmetric surfaces // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1979. Vol. 65, iss. 3. P. 631–638. DOI: <https://doi.org/10.1121/1.382498>
13. Liu Y. J., Rudolphi T. J. Some identities for fundamental solutions and their applications to weakly-singular boundary element formulations // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 1991. Vol. 8, iss. 6. P. 301–311. DOI: [https://doi.org/10.1016/0955-7997\(91\)90043-S](https://doi.org/10.1016/0955-7997(91)90043-S)
14. Jackson J. D. *Classical electrodynamics*. 3rd ed. New York : Wiley City, 1999. 808 p.
15. Халилов Э. Г. О приближенном решении одного класса слабо сингулярных интегральных уравнений // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2020. Т. 20, вып. 3. С. 310–325. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-310-325>, EDN: XVVVZH

## References

1. Colton D., Kress R. *Integral equation methods in scattering theory*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2013. 287 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1987. 311 p.).
2. Avdeev I. S. *Scattering of sound by bodies of non-canonical shape*. Diss. Cand. Sci. (Phys. and Math.). Tula, 2011. 153 p. (in Russian). EDN: QFDEQF
3. Skobeltsyn S. A. *Some inverse problems of diffraction of sound waves on inhomogeneous anisotropic elastic bodies*. Diss. Dr. Sci. (Phys. and Math.). Tula, 2020. 317 p. (in Russian). EDN: TNKMIA
4. Amini S. On the choice of the coupling parameter in boundary integral formulations of the exterior acoustic problem. *Applicable Analysis*, 1990, vol. 35, iss. 1–4, pp. 75–92. DOI: <https://doi.org/10.1080/00036819008839905>
5. Simpson R. N., Scott M. A., Taus M., Thomas D. C., Lian H. Acoustic isogeometric boundary element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2014, vol. 269, pp. 265–290. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2013.10.026>
6. Burton A. J., Miller G. F. The application of integral equation methods to the numerical solution



- of some exterior boundary-value problems. *Proceedings of the Royal Society of London. A*, 1971, vol. 323, iss. 1553, pp. 201–210. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1971.0097>
7. Lin T. C. A proof for the Burton and Miller integral equation approach for the Helmholtz equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1984, vol. 103, iss. 2, pp. 565–574. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(84\)90146-X](https://doi.org/10.1016/0022-247X(84)90146-X)
  8. Chen K., Cheng J., Harris P. J. A new study of the Burton and Miller method for the solution of a 3D Helmholtz problem. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 2009, vol. 74, iss. 2, pp. 163–177. DOI: <https://doi.org/10.1093/imamat/hxp002>
  9. Langrenne C., Garcia A., Bonnet M. Solving the hypersingular boundary integral equation for the Burton and Miller formulation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2015, vol. 138, iss. 5, pp. 3332–3340. DOI: <https://doi.org/10.1121/1.4935134>
  10. Kress R. On the numerical solution of a hypersingular integral equation in scattering theory. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1995, vol. 61, iss. 3, pp. 345–360. DOI: [https://doi.org/10.1016/0377-0427\(94\)00073-7](https://doi.org/10.1016/0377-0427(94)00073-7)
  11. Gaunaurd G. C., Huang H. Acoustic scattering by a spherical body near a plane boundary. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1994, vol. 96, iss. 4, pp. 2526–2536. DOI: <https://doi.org/10.1121/1.410126>
  12. Meyer W. L., Bell W. A., Stallybrass M. P., Zinn B. T. Prediction of the sound field radiated from axisymmetric surfaces. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1979, vol. 65, iss. 3, pp. 631–638. DOI: <https://doi.org/10.1121/1.382498>
  13. Liu Y. J., Rudolphi T. J. Some identities for fundamental solutions and their applications to weakly-singular boundary element formulations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1991, vol. 8, iss. 6, pp. 301–311. DOI: [https://doi.org/10.1016/0955-7997\(91\)90043-S](https://doi.org/10.1016/0955-7997(91)90043-S)
  14. Jackson J. D. *Classical electrodynamics*. 3rd ed. New York, Wiley City, 1999. 808 p.
  15. Khalilov E. H. On the approximate solution of a class of weakly singular integral equations. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2020, vol. 20, iss. 3, pp. 310–325 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-310-325>, EDN: XVVVZH

Поступила в редакцию / Received 21.06.2024

Принята к публикации / Accepted 21.04.2025

Опубликована / Published 28.11.2025