



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 1. С. 101–105

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2026, vol. 26, iss. 1, pp. 101–105

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-101-105>

EDN: <https://elibrary.ru/QWNQLX>

Краткое сообщение

УДК 532.529:534.2

Динамика инкапсулированного пузырька газа около упругой стенки

Ю. В. Федоров

Институт механики и машиностроения — структурное подразделение ФИЦ КазНЦ РАН, Россия, 420111, г. Казань, ул. Лобачевского, д. 2/31

Федоров Юрий Валентинович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории механики сплошной среды, kopperfildd@ya.ru, <https://orcid.org/0000-0001-7186-5173>, SPIN: 9325-8051, AuthorID: 850228

Аннотация. Работа посвящена изучению влияния анизотропии оболочки пузырька на его радиальные колебания около упругой стенки конечной толщины под действием внешнего акустического возмущения. Для этого получена система из двух уравнений, определяющих пульсации пузырька газа, покрытого анизотропной оболочкой конечной толщины. В случае, когда толщина оболочки пузырька достаточна мала, что соответствует большинству известных ультразвуковых контрастных агентов, система уравнений сведена к одному модифицированному уравнению Релея–Плессета. Представлено обобщение данного уравнения на случай колебаний инкапсулированного пузырька около упругой стенки. Проведено численное решение полученного уравнения. Проанализировано влияние анизотропии оболочки и наличия упругой стенки на радиальные колебания покрытого пузырька газа во внешнем акустическом поле. В частном случае дано сравнение теории с имеющимися в литературе экспериментальными данными.

Ключевые слова: акустическое давление, пузырек газа, анизотропная оболочка, упругая стенка

Для цитирования: Федоров Ю. В. Динамика инкапсулированного пузырька газа около упругой стенки // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 1. С. 101–105. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-101-105>, EDN: [QWNQLX](https://elibrary.ru/QWNQLX)

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Short communication

Dynamics of an encapsulated gas bubble near an elastic wall

Yu. V. Fedorov

Institute of Mechanics and Engineering, Federal Research Center “Kazan Scientific Center of Russian Academy of Sciences”, 2/31 Lobachevsky St., Kazan 420111, Russia

Yuri V. Fedorov, kopperfildd@ya.ru, <https://orcid.org/0000-0001-7186-5173>, SPIN: 9325-8051, AuthorID: 850228

Abstract. The work is devoted to studying the influence of the bubble shell anisotropy on its radial oscillations near an elastic wall of finite thickness under the action of an external acoustic disturbance. For this purpose, a system of two equations that determine the pulsations of a gas bubble covered with an anisotropic shell of finite thickness is obtained. In the case when the thickness of the bubble shell is



sufficiently small, which corresponds to most known ultrasound contrast agents, the system of equations is reduced to a single modified Rayleigh–Plesset equation. A generalization of this equation for the case of oscillations of an encapsulated bubble near an elastic wall is presented. A numerical solution of the obtained equation is carried out. The influence of the shell anisotropy and the presence of an elastic wall on the radial oscillations of a covered gas bubble in an external acoustic field is analyzed. In a particular case, a comparison of the theory with experimental data available in literature is given.

Keywords: acoustic pressure, gas bubble, anisotropic shell, elastic wall

For citation: Fedorov Yu. V. Dynamics of an encapsulated gas bubble near an elastic wall. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 1, pp. 101–105 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-101-105>, EDN: QWNQLX

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Известно, что микропузырьки газа применяются в ультразвуковой диагностике для построения и лучшего разрешения изображений тканей человека [1]. Для более длительного нахождения в жидкости и лучшей стабильности пузырьки покрывают тонкой оболочкой. В простейших случаях выведены уравнения радиальных колебаний включения по модели Кельвина–Фойгта [2] и Максвелла [3]. С другими моделями покрытий пузырьков можно ознакомиться в обзоре [4]. В работе [5] получено уравнение радиальных колебаний покрытого пузырька с учетом сжимаемости оболочки. Указано влияние сжимаемости покрытия на резонансную частоту пузырьков. В настоящей работе на основе идей [5] и [6] выведено уравнение радиальных колебаний пузырька газа, покрытого анизотропной оболочкой, как в безграничной жидкости, так и на некотором расстоянии от упругой стенки.

1. Постановка задачи

Пусть имеется в жидкости покрытый анизотропной оболочкой пузырек газа. Уравнение сохранения массы для жидкости (индекс f) в сферической системе координат и его решение имеют вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 v_f) = 0, \quad v_f(r, t) = \frac{R_2^2(t)}{r^2} U_2, \quad v_f(R_2, t) \equiv U_2, \quad (1)$$

где r — радиальная координата, v_f — радиальная скорость, R_2 — радиус пузырька вместе с оболочкой. Уравнение сохранения импульса в сферических координатах интегрируется от R_2 до ∞ с учетом (1):

$$\rho_f \left(\frac{\partial v_f}{\partial t} + v_f \frac{\partial v_f}{\partial r} \right) = - \frac{\partial p_f}{\partial r} \quad \Rightarrow \quad \rho_f \left(R_2 \dot{U}_2 + \frac{3}{2} U_2^2 \right) = p_f(R_2, t) - p_\infty, \quad (2)$$

где ρ — плотность, p — давление. Записываются условия на границах включения при учете сил поверхностного натяжения:

$$-p_g(R_1, t) + \frac{2\sigma_1}{R_1} = \tau_{rr}^s(R_1, t), \quad p_f(R_2, t) + \frac{2\sigma_2}{R_2} = \tau_{rr}^f(R_2, t) - \tau_{rr}^s(R_2, t), \quad (3)$$

где индексы g и s относятся к газу и оболочке пузырька соответственно, σ — коэффициент поверхностного натяжения, R_1 — радиус пузырька газа, τ_{rr} — нормальное напряжение. Для жидкости τ_{rr} определяется следующим образом:

$$\tau_{rr}^f = 2\mu_f \frac{\partial v_f}{\partial r} = -4\mu_f \frac{R_2^2 U_2}{r^3}. \quad (4)$$

Здесь μ_f — вязкость жидкости. Для оболочки пузырька τ_{rr} примем в виде [5]

$$\tau_{rr}^s = \frac{(1 - \nu_{||}) E_r}{1 - \nu_{||} - 2E_{||} \nu_{\theta r}^2 / E_r} \varepsilon_{rr} + \frac{2\nu_{\theta r} E_{||}}{1 - \nu_{||} - 2E_{||} \nu_{\theta r}^2 / E_r} \varepsilon_{\theta\theta}, \quad (5)$$



где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, индекс r относится к радиальному направлению, индекс \parallel — к орторадиальному направлению, ε — компоненты тензора деформаций, которые определяются следующим образом:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\phi\phi} = \frac{u}{r},$$

где u — радиальная скорость оболочки вида [5]

$$u(r) = ar^{\beta_+} + br^{\beta_-}, \quad \beta_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8k}}{2}, \quad k = \frac{E_{\parallel}(1 - \nu_{\theta r})}{E_r(1 - \nu_{\parallel})}. \quad (6)$$

Здесь a и b — неизвестные коэффициенты, которые находятся из условий $u(R_1) = R_1 - R_{10}$ и $u(R_2) = R_2 - R_{20}$ (индекс 0 относится к начальному состоянию). Выражение (6) подставляется в (5), затем полученное выражение подставляется в граничные условия (3) с учетом (2) и (4). Таким образом, определяются два уравнения:

$$-p_g(R_1, t) + \frac{2\sigma_1}{R_1} = \frac{R_1^{\beta_-} R_1^{\beta_+ - 1} x_+ - R_1^{\beta_+} R_1^{\beta_- - 1} x_-}{R_1^{\beta_-} R_2^{\beta_+} - R_1^{\beta_+} R_2^{\beta_-}} (R_2 - R_{20}) + \frac{R_2^{\beta_+} R_1^{\beta_- - 1} x_- - R_2^{\beta_-} R_1^{\beta_+ - 1} x_+}{R_1^{\beta_-} R_2^{\beta_+} - R_1^{\beta_+} R_2^{\beta_-}} (R_1 - R_{10}), \quad x_{\pm} = \frac{(1 - \nu_{\parallel})E_r \beta_{\pm} + 2\nu_{\theta r} E_{\parallel}}{1 - \nu_{\parallel} - 2E_{\parallel} \nu_{\theta r}^2 / E_r}, \quad (7)$$

$$\rho_f \left(R_2 \dot{U}_2 + \frac{3}{2} U_2^2 \right) = -4\mu_f \frac{U_2}{R_2} - \frac{2\sigma_2}{R_2} - p_{\infty} - aR_2^{\beta_+ - 1} x_+ - bR_2^{\beta_- - 1} x_-. \quad (8)$$

Выразив из уравнения (7) слагаемое $R_2 - R_{20}$ и подставив в (8), находится следующее уравнение:

$$\rho_f \left(R_2 \dot{U}_2 + \frac{3}{2} U_2^2 \right) = -4\mu_f \frac{U_2}{R_2} - \frac{2\sigma_2}{R_2} - p_{\infty} + (R_1 - R_{10}) \frac{x_- x_+ (R_1^{-\beta_-} R_2^{\beta_-} - R_1^{-\beta_+} R_2^{\beta_+})}{R_2(x_- - x_+)} + \left(p_g - \frac{2\sigma_1}{R_1} \right) \frac{R_1^{\beta_-} R_2^{\beta_+ - 1} x_+ - R_1^{\beta_+} R_2^{\beta_-} x_-}{R_1^{\beta_-} R_1^{\beta_+ - 1} x_+ - R_1^{\beta_+} R_1^{\beta_- - 1} x_-}. \quad (9)$$

Таким образом, уравнения (7) и (9) описывают радиальную динамику пузырька газа, покрытого анизотропной оболочкой конечной толщины. В дальнейшем для простоты полагается, что толщина оболочки пузырька близка к нулю, т.е. $R_1 = R_2 - d$, $d \rightarrow 0$. В этом случае уравнение (7) выполняется тождественно, а уравнение (9), опустив у радиуса индекс 2, примет вид

$$\rho_f \left(R \ddot{R} + \frac{3}{2} \dot{R}^2 \right) = \left(p_g - \frac{2\sigma_1}{R - d} \right) \left(1 - \frac{\chi_1 d}{R} \right) - 4\mu_f \frac{\dot{R}}{R} - \frac{2\sigma_2}{R} - p_f - \frac{\chi_2 d}{R} \left(1 - \frac{R_0}{R} \right), \quad (10)$$

$$\chi_1 = \frac{x_+ - x_- + \beta_- x_- - \beta_+ x_+}{x_+ - x_-}, \quad \chi_2 = \frac{x_- (\beta_- - \beta_+) x_+}{x_+ - x_-}.$$

Рассмотрим радиальные колебания инкапсулированного пузырька, находящегося на некотором расстоянии l от упругой стенки конечной толщины h . Следуя процедуре работы [6], уравнение (10) легко обобщается до уравнения Келлера – Миксиса рассматриваемой среды и записывается в виде

$$R \ddot{R} \left(1 - \alpha - \frac{\dot{R}}{C_f} \right) + \frac{3}{2} \dot{R}^2 \left(1 - \frac{4\alpha}{3} - \frac{\dot{R}}{3C_f} \right) = \frac{1}{\rho_f} \left(1 + \frac{\dot{R}}{C_f} + \frac{R}{C_f} \frac{d}{dt} \right) P, \quad (11)$$

$$P = \left(p_g - \frac{2\sigma_1}{R - d} \right) \left(1 - \chi_1 \frac{d}{R} \right) - 4\mu_f \frac{\dot{R}}{R} - \frac{2\sigma_2}{R} - p_f - \chi_2 \frac{d}{R} \left(1 - \frac{R_0}{R} \right),$$

$$\alpha = \left(\frac{\rho_f - \beta}{\rho_f + \beta}\right) \frac{R}{2l} + \left(\frac{\beta - \rho_3}{\beta + \rho_3}\right) \frac{R}{2(l+h)} - \frac{(\rho_f - \beta)(\beta - \rho_3)}{(\rho_f + \beta)(\beta + \rho_3)} \frac{R}{2h}, \quad \beta = \rho_2 \frac{3K - 2\eta}{3K + 4\eta}.$$

Здесь ρ_2 — плотность стенки, K — модуль всестороннего сжатия, η — модуль сдвига упругой стенки, ρ_3 — плотность жидкости за стенкой, C_f — скорость звука.

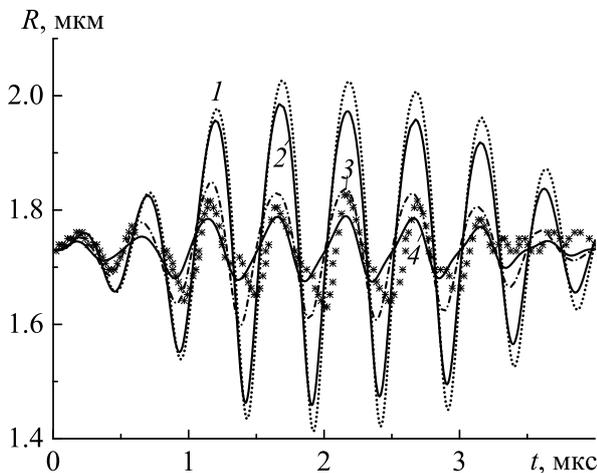
2. Результаты расчетов

Рассмотрим радиальные колебания пузырька газа, покрытого анизотропной оболочкой, около упругой стенки. Пузырек заполнен фторуглеродным газом. Для среды используются параметры [7]. Начальный радиус пузырька R_0 составляет $1.73 \cdot 10^{-6}$ м, вязкость жидкости $\mu_f = 0.025$ Па·с, плотность жидкости $\rho_f = 1000$ кг/м³, скорость звука $C_f = 1470$ м/с, давление $p_\infty = 10^5$ Па, показатель адиабаты $\gamma = 1.07$. Для оболочки пузырька используются следующие данные: $\nu_{\theta r} = \nu_{||} = 0.35$, $E_r = 88.8 \cdot 10^6$ Па, $\sigma_1 = 0.03$, $\sigma_2 = 0.005$. Толщина оболочки $d = 4 \cdot 10^{-9}$ м. Внешнее акустическое возмущение создается в виде $p_f = p_\infty - p_a \sin(2\pi f_a t) \exp[-((2f_a t - 2N)/N)^2]$, где амплитуда давления $p_a = 40000$ Па, частота $f_a = 2 \cdot 10^6$ Гц, $N = 8$. В качестве упругой стенки рассматривается пластиковая

стенка (OptiCell, BioCrystall, Inc.) со следующими параметрами: $\rho_2 = 1060$ кг/м³, $K = 3.75 \cdot 10^9$ Па, $\eta = 1.34 \cdot 10^9$ Па, $\rho_3 = \rho_f = 1000$ кг/м³, $l = 50 \cdot 10^{-6}$ м, $h = 75 \cdot 10^{-6}$ м. Проведено численное решение уравнения (11).

На рисунке представлено влияние упругой стенки и различия модуля Юнга $E_{||}$ на зависимости радиуса инкапсулированного пузырька от времени. Можно наблюдать, что наличие упругой стенки несколько сдерживает радиальные колебания включения.

Заметно уменьшение амплитуды осцилляций пузырька, что, в частности, не противоречит выводам работы [8], где экспериментально было показано, что непосредственная близость упругой стенки снижает амплитуду колебаний включения в среднем на 10%. Увеличение модуля Юнга $E_{||}$ оболочки пузырька, в свою очередь, также приводит к заметному уменьшению амплитуды его колебаний. Чем более упругая оболочка, тем



Зависимости радиуса пузырька от времени: 1 — покрытый пузырек в безграничной жидкости ($E_{||} = 0.5E_r$), 2 — покрытый пузырек около упругой стенки ($E_{||} = 0.5E_r$), 3 — ($E_{||} = E_r$), 4 — ($E_{||} = 2E_r$); маркеры — экспериментальные данные [7]

Figure. Dependencies of the bubble radius on time: 1 — covered bubble in an infinite liquid ($E_{||} = 0.5E_r$), 2 — covered bubble near an elastic wall ($E_{||} = 0.5E_r$), 3 — ($E_{||} = E_r$), 4 — ($E_{||} = 2E_r$); markers — experimental data [7]

меньше время сжатия пузырька. Видно, что при $E_{||} = 0.5E_r$ первое сжатие пузырька происходит при $t = 0.45$ мкс, а при $E_{||} = 2E_r$ первое сжатие наступает раньше, при $t = 0.34$ мкс. Для изотропной оболочки (кривая 3) показано удовлетворительное соответствие теоретической кривой радиуса пузырька с экспериментальными данными [7].

Замечание. По результатам проведенных расчетов показано, что увеличение модуля Юнга $E_{||}$ приводит к замедлению роста газового пузырька, а также к уменьшению амплитуды его колебаний как в безграничной жидкости, так и около препятствия. Чем более упругая оболочка, тем меньше время сжатия пузырька.



Список литературы / References

1. Sboros V. Response of contrast agents to ultrasound. *Advanced Drug Delivery Reviews*, 2008, vol. 60, iss. 10, pp. 1117–1136. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.addr.2008.03.011>
2. Hoff L., Sontum P. C., Hovem J. M. Oscillations of polymeric microbubbles: Effects of the encapsulating shell. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2000, vol. 107, iss. 4, pp. 2272–2280. DOI: <https://doi.org/10.1121/1.428557>
3. Doinikov A. A., Dayton P. A. Maxwell rheological model for lipid-shelled ultrasound microbubble contrast agents. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2007, vol. 121, iss. 6, pp. 3331–3340. DOI: <https://doi.org/10.1121/1.2722233>, EDN: XKEZKH
4. Doinikov A. A., Bouakaz A. Review of shell models for contrast agent microbubbles. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 2011, vol. 58, iss. 5, pp. 981–993. DOI: <https://doi.org/10.1109/TUFFC.2011.1899>
5. Chabouh G., Dollet B., Quilliet C., Coupier G. Spherical oscillations of encapsulated microbubbles: Effect of shell compressibility and anisotropy. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2021, vol. 149, iss. 2, pp. 1240–1257. DOI: <https://doi.org/10.1121/10.0003500>
6. Doinikov A. A., Aired L., Bouakaz A. Acoustic scattering from a contrast agent microbubble near an elastic wall of finite thickness. *Physics in Medicine and Biology*, 2011, vol. 56, iss. 2, pp. 6951–6967. DOI: <https://doi.org/10.1088/0031-9155/56/21/012>
7. van der Meer S. M., Dollet B., Voormolen M. M., Chin C. T., Bouakaz A., de Jong N., Versluis M., Lohse D. Microbubble spectroscopy of ultrasound contrast agents. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2007, vol. 121, iss. 1, pp. 648–656. DOI: <https://doi.org/10.1121/1.2390673>
8. Garbin V., Cojoc D., Ferrari E., di Fabrizio E., Overvelde M. L. J., van der Meer S. M., de Jong N., Lohse D., Versluis M. Changes in microbubble dynamics near a boundary revealed by combined optical micromanipulation and high-speed imaging. *Applied Physics Letters*, 2007, vol. 90, iss. 11, art. 114103. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.2713164>

Поступила в редакцию / Received 27.05.2025

Принята к публикации / Accepted 07.09.2025

Опубликована / Published 02.03.2026