Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 1. С. 139–144
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2026, vol. 26, iss. 1, pp. 139–144
https://mmi.sgu.ru DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-139-144
EDN: https://elibrary.ru/YOXDEJ

Научная статья
УДК 519.866.2,519.863

Модель динамического ценообразования без отрицательных примеров, основанная на безградиентной выпуклой оптимизации с неточным оракулом

А. Н. Курганский, А. Ю. Максимова✉, С. А. Корнев

Институт прикладной математики и механики, Россия, 283048, г. Донецк, ул. Розы Люксембург, д. 74

Курганский Алексей Николаевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории интеллектуальных систем, topologika@yandex.ru, https://orcid.org/0009-0006-9968-1935, SPIN: 5236-5352, AuthorID: 1273323

Максимова Александра Юрьевна, кандидат технических наук, заведующий лабораторией интеллектуальных систем, maximova.alexandra@mail.ru, https://orcid.org/0000-0001-9496-4385, SPIN: 1097-6085, AuthorID: 615429

Корнев Сергей Александрович, инженер-исследователь лаборатории интеллектуальных систем, sergkornev2001@mail.ru, https://orcid.org/0009-0006-0029-0740

Аннотация. В работе предложен основанный на безградиентной стохастической выпуклой оптимизации с неточным оракулом нулевого порядка алгоритм решения одного из вариантов задачи динамического ценообразования в случае, когда при переменном потоке покупателей обучающая выборка содержит информацию только о совершенных покупках, а число отказов от покупки при данной цене неизвестно. В работе рассматривается модель с одним сегментом клиентов и одним видом товаров как элемент более сложных, иерархических моделей динамического ценообразования. При отсутствии данных об отказах для сведения к задаче выпуклой безградиентной оптимизации используется прием логарифмирования целевой функции и разбиения сегмента клиентов случайным образом на два подсегмента при каждой итерации.

Ключевые слова: динамическое ценообразование, математическое моделирование, безградиентная выпуклая оптимизация, машинное обучение

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках научной темы «Разработка и совершенствование интеллектуальных методов классификации и прогнозирования для задач распознавания образов и моделирования информационных процессов» (проект № FREM-2024-0001).

Для цитирования: *Курганский А. Н., Максимова А. Ю., Корнев С. А.* Модель динамического ценообразования без отрицательных примеров, основанная на безградиентной выпуклой оптимизации с неточным оракулом // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 1. С. 139–144. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-139-144, EDN: YOXDEJ

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Dynamic pricing model without negative examples based on gradient-free convex optimization with inexact oracle

A. N. Kurganskii, A. Ju. Maximova✉, S. A. Kornev

Institute of Applied Mathematics and Mechanics, 74 Rosa Luxemburg St., Donetsk 283048, Russia

© *Курганский А. Н., Максимова А. Ю., Корнев С. А., 2026*

Aleksei N. Kurganskii, topologika@yandex.ru, https://orcid.org/0009-0006-9968-1935, SPIN: 5236-5352, AuthorID: 1273323

Alexandra Ju. Maximova, maximova.alexandra@mail.ru, https://orcid.org/0000-0001-9496-4385, SPIN: 1097-6085, AuthorID: 615429

Sergei A. Kornev, sergkornev2001@mail.ru, https://orcid.org/0009-0006-0029-0740

Abstract. The paper proposes an approach based on gradient-free stochastic convex optimization with an inexact oracle of zero-order to solve a special case of the dynamic pricing problem with a variable flow of customers when the training data contains information about purchases made, but the number of refusals to purchase at the given price is unknown. The paper considers a model with one customer segment and one type of product as a possible element of more complex, hierarchical dynamic pricing models. In the unavailability of data on rejections for reduction to a convex non-gradient optimization problem, the work uses the technique of logarithmization of the objective function and random division of the customer segment into two subsegments at each iteration.

Keywords: dynamic pricing, mathematical modelling, gradient-free convex optimization, machine learning

Acknowledgements: This work was supported by the Minobrnauki of Russia (project No. FREM-2024-0001).

For citation: Kurganskii A. N., Maximova A. Ju., Kornev S. A. Dynamic pricing model without negative examples based on gradient-free convex optimization with inexact oracle. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 1, pp. 139–144 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-139-144, EDN: YOXDEJ

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Задача динамического ценообразования появляется в разнообразных постановках, отражающих сложность содержания и разносторонность экономической жизни. Непрерывное развитие и усложнение экономической жизни сохраняет актуальность задачи динамического ценообразования вместе с поиском новых подходов и методов её решения на основе развития математических инструментов. Градиентные и отталкивающиеся от них стохастические и безградиентные методы оптимизации представляют собой такие развивающиеся инструменты. Примеры работ в данном направлении представлены в [1–3]. Так, в [1] авторы непараметрически восстанавливают спрос и минимизируют потери при полном доступе к данным и ограничениях на динамику цен. Баланс спроса и предложения в [2] рассматривается в дискретной модели выбора, опираясь на данные о потребителях и поставщиках. Авторы же [3] изучают безградиентные методы для негладких невыпуклых задач из области принятия решений в экономике.

В настоящей работе предлагается основанный на безградиентной стохастической выпуклой оптимизации с неточным оракулом нулевого порядка [4–8] метод решения задачи динамического ценообразования в следующей ниже постановке. Отметим, что отличительной особенностью рассматриваемой задачи является неизвестный переменный поток покупателей и отсутствие данных об отказах совершить покупку по данной цене. При некоторых предположениях её удаётся свести к задаче выпуклой оптимизации с неточным оракулом, что позволяет применять соответствующие известные современные методы решения. В работе рассматривается упрощённая модель с одним сегментом клиентов и одним видом товаров как элемент более сложных, иерархических моделей динамического ценообразования.

1. Постановка задачи

Пусть компания продаёт товары. Клиент один раз в период узнаёт цену, после чего покупает товар или отказывается. Требуется разработать алгоритм, оптимизирующий выручку продавца.

Уточним условие задачи. Клиенты со схожими признаками образуют потребительский сегмент. Цена товара как функция признаков клиента одна для всего сегмента. Однако признаки не полностью отражают состояние клиентов. Нельзя исключить, что разные клиенты одного сегмента готовы купить продукт по разным ценам. Это различие в потребителях одного сегмента представляется так называемой чувствительностью к цене. Под чувствительностью $p(x)$ сегмента мы понимаем функцию от цены x, которую возможно интерпретировать как вероятность $p(x)$ того, что случайно выбранный клиент сегмента купит продукт по цене x. Пусть далее сегменту C предложена цена x и только некоторая часть $C_k \subseteq C$ сегмента заинтересована в рассматриваемый период k времени в продукте. Тогда выручка за период k выражается величиной $U_k(x) = |C_k|\, xp(x)$. Задачей динамического ценообразования является нахождение оптимальной цены x_{opt}, доставляющей максимальное значение выручки $U_k(x)$ или, что эквивалентно, нормализованной выручки $E(x) = xp(x)$.

Расчёт чувствительности к цене упростился бы при наличии данных как о принятых, так и об отклонённых ценах. Однако обучающие данные зачастую содержат лишь информацию о покупках (позитивные примеры) и не содержат отказов от покупки товара по предлагаемой цене (негативные примеры). Ограничение в виде отсутствия негативных примеров ставит проблему и является основополагающей особенностью в формулировании задачи. В рамках данной работы мы отталкиваемся от следующих допущений, ограничений и упрощений: 1) даны один сегмент покупателей и один вид товара; 2) в начале каждого периода продавец устанавливает цену на товар; 3) клиент покупает не больше одной единицы товара за период; 4) продавцу известно только количество проданного товара, а количество покупателей, ознакомившихся с ценой за период, неизвестно, т.е. неизвестно, сколько покупателей отклонили цену как слишком высокую; 5) чувствительность к цене сегмента неизвестна, однако мы предполагаем в качестве её модели некоторое параметрическое семейство монотонно убывающих функций $p(x)$ со значениями в $[0,1]$ и неубывающей полуэластичностью $\frac{d\log p(x)}{dx} = \frac{p'(x)}{p(x)}$; параметризованная функция $p(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\left(1+e^{\frac{x-\mu}{\sigma}}\right)}$ является примером такого семейства, используемого ниже для иллюстраций; 6) чувствительность не меняется от периода к периоду; 7) только продавец предлагает цену покупателям, между продавцом и покупателем нет переговорного взаимодействия. Требуется найти оптимальную цену минимальными средствами.

2. Модель решения задачи

Обозначим через M число клиентов в сегменте, а через N число периодов, пронумерованных множеством $\{0, 1, 2, \ldots, N-1\}$. Для простоты под периодом дальше понимаем один день. Для инвариантности модели относительно всеобщих скачков цен мы рассматриваем относительные цены. Например, если известна максимальная $P_{\max}$ цена на товар на рынке, то цена P_{own} товара в относительном измерении есть величина $P = \frac{P_{own}}{P_{\max}}$. Или, допустим, известна минимальная, например, закупочная, цена $P_{\min}$, то относительной ценой будет величина $P = \frac{P_{own}}{P_{\min}}$.

Для продавца потребительский сегмент представляет собой чёрный ящик. Моделью чёрного ящика является функция чувствительности $p(x) = p(x;\mu,\sigma)$ к цене с неизвестными параметрами μ, σ. Входом чёрного ящика является цена x на начало текущего периода (итерации, дня), а выходом — nx, где n — количество продуктов, приобретённых по x за день. Требуется найти оптимальную цену минимальными средствами на основе данных, получаемых из чёрного ящика в форме пары значений (цена, выручка). Оптимальная цена доставляет максимум функции $E(x) = xp(x)$. Однако мы не можем напрямую найти оптимум для $E(x)$, поскольку оракул (чёрный ящик) в среднем доставляет значение $E_k(x) = M_k E(x)$, но не $E(x)$, где $M_k \leqslant M$ — неизвестное число клиентов, посмотревших цену в течение дня k. Трудность заключается не только в том, что неизвестно число M_k, но и в том, что оно варьируется от периода к периоду. Ниже мы предлагаем обходной путь этих трудностей, приводящий к известным методам стохастической безградиентной выпуклой оптимизации с использованием неточного двухточечного оракула нулевого порядка.

По условию задачи нет явно заданного градиента $\nabla E(x)$ функции $E(x)$, однако можно вычислить его приближение $\frac{E(x+\Delta x)-E(x)}{\Delta x}$. Для этого требуются значения функции в двух точках для каждой аппроксимации градиента. Это вынуждает на каждой итерации k случайно делить потребительский сегмент на два непересекающихся подсегмента S_k и S'_k и предлагать каждому подсегменту разные, но близкие цены x_k и $x'_k = x_k + \Delta x$ соответственно. Затем оракул возвращает два значения — $M_k E\left(x_k\right)$ и $M'_k E\left(x'_k\right)$. Количество M_k и M'_k клиентов, увидевших цены x_k и x'_k соответственно, нам неизвестны и, вообще говоря, отличаются друг от друга. Однако, если в данный период мы назначим каждого клиента первому или второму подсегменту с вероятностями $\frac{1}{2}$, то, исходя из вероятностных соображений, при достаточно больших M_k и M'_k будет достигнуто приблизительное равенство $M_k \approx M'_k$. Таким образом, можно сказать, что оракул возвращает в точках x_k и x'_k неточные значения $M_k E\left(x_k\right)$ и $M_k E\left(x'_k\right)$, возмущённые случайным шумом.

Сформулируем сказанное более формально. Обозначим через $\left(\zeta_1^k, ..., \zeta_c^k, ...\zeta_M^k\right) \in \{0,1\}^M$ случайный вектор с неизвестным распределением, но такой, что $C_k = \sum_c \zeta_c^k \gg 1$, где $\zeta_c^k = 1$ тогда и только тогда, когда клиент c в день k посмотрел цену на товар.

Обозначим через $I_c^{k,x}$ случайную величину со значениями в $\{0,1\}$ такую, что $I_c^{k,x} = 1$ тогда и только тогда, когда клиент c в день k увидел цену x. Таким образом, величина $M_k^x = \sum_c \zeta_c^k I_c^{k,x}$ показывает число всех клиентов, увидевших в день k цену x. В день k предлагаются две цены x_k и x'_k так, что $I_c^{k,x_k} + I_c^{k,x'_k} = 1$, при этом $I_c^{k,x_k} = 1$ с вероятностью $\frac{1}{2}$. Из определений следует равенство математических ожиданий $\mathbb{E}\left(M_k^{x_k}\right) = \mathbb{E}\left(M_k^{x'_k}\right)$. Обозначим $M_k = \mathbb{E}\left(M_k^{x_k}\right)$.

Пусть случайная величина $\xi_c^{k,x}$ со значениями в $\{0,1\}$ равна 1 тогда и только тогда, когда клиент c в день k купил продукт по цене x. Из определений следует, что

$$P\left(\xi_c^{k,x} = 1 \middle| \zeta_c^k = 1, I_c^{k,x} = 1\right) = p(x).$$

Обозначим $U_k(x) = x\sum_{c=1}^M \xi_c^{k,x}\zeta_c^k I_c^{k,x}$. Значение функции $U_k(x)$ доставляет оракул чёрного ящика в период k. Очевидно, что $\mathbb{E}\left(U_k\left(x_k\right)\right) = M_k E\left(x_k\right)$ и $\mathbb{E}\left(U_k\left(x'_k\right)\right) = M_k E\left(x'_k\right)$. Более того, при больших M_k имеем

$$U_k\left(x_k\right) = x_k M_k \frac{\sum_{\zeta_c^k=1, I_c^{k,x_k}=1} \xi_c^{k,x_k}}{M_k} \to x_k M_k p\left(x_k\right) = \mathbb{E}\left(U_k\left(x_k\right)\right).$$

Отсюда следует, что, с одной стороны,

$$\mathbb{E}\left(\frac{\log U_k\left(x'_k\right) - \log U_k\left(x_k\right)}{x'_k - x_k}\right) = \frac{\log E\left(x'_k\right) - \log E\left(x_k\right)}{x'_k - x_k} \approx \nabla \log E\left(x_k\right),$$

с другой —

$$\mathbb{E}\left(\frac{\log U_k\left(x'_k\right) - \log U_k\left(x_k\right)}{x'_k - x_k}\right) \approx \frac{\log U_k\left(x'_k\right) - \log U_k\left(x_k\right)}{x'_k - x_k}.$$

Следовательно, $\nabla \log E\left(x_k\right) \approx \dfrac{\log U_k\left(x'_k\right) - \log U_k\left(x_k\right)}{x'_k - x_k}$.

Лемма 1. *Если полуэластичность* $\frac{d\log p(x)}{dx} = \frac{p'(x)}{p(x)}$ *чувствительности к цене* $p(x)$ *не возрастает, т.е.* $\left(\frac{p'(x)}{p(x)}\right) \leqslant 0$, *то функция* $\log E(x)$ *выпуклая.*

Доказательство. Найдём вторую производную функции $\log E(x)$:

$$(\log E(x))' = (\log x + \log p(x))' = \frac{1}{x} + \frac{p'(x)}{p(x)},$$

$$(\log E(x))'' = -\frac{1}{x^2} + \left(\frac{p'(x)}{p(x)}\right)' < 0.$$

Что и требовалось доказать □

Легко проверить, что функции семейства $p(x;\mu,\sigma) = \dfrac{1}{\left(1+e^{\frac{x-\mu}{\sigma}}\right)}$ удовлетворяют условию леммы.

Далее рассматриваем только модели сегмента клиентов с невозрастающей полуэластичностью чувствительности к цене. Поскольку точки максимумов функций $E(x)$ и $\log E(x)$ совпадают, то задача $arg \max E(x)$ эквивалентна задаче $arg \max \log E(x)$, для решения которой уже, в силу вышесказанного, возможно применить методы безградиентной стохастической выпуклой оптимизации с использованием неточного двухточечного оракула нулевого порядка, основываясь на значениях $U_k(x_k)$ и $U_k(x'_k)$ выхода чёрного ящика в модели. В данной математической постановке задача оптимизации известна [4–8].

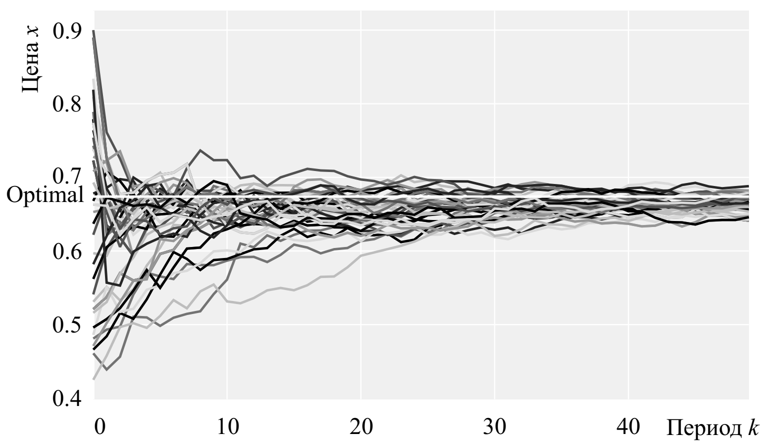
Скорость сходимости метода, от которой зависит и выручка, определяется выбором параметров метода: инициальных цен, длины обучающего шага и расстояния между x_k и x'_k на каждой итерации k. Оценка и выбор наилучших параметров в предлагаемой модели основывается на сравнении потерь в форме разности между возможно наилучшей и фактической выручками:

$$\text{Regret}\left(\left\{(x_k, x'_k)\right\}_{k=0}^{N-1}\right) = x_{opt}p(x_{opt}) - \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{x_k p(x_k) + x'_k p(x'_k)}{2}.$$

Теоретические оценки параметров модели являются предметом дальнейших исследований авторов. Имея априорные предположения о возможных значениях параметров μ и σ функции чувствительности к цене, можно экспериментально, основываясь на Regret и выборе числа итераций, найти наилучшие значения параметров модели решения задачи.

3. Симуляция работы модели на синтетическом примере

Продемонстрируем сходимость предлагаемой модели решения задачи на синтетическом примере (рисунок). Предполагаются истинными, но неизвестными для модели, значения $x_{opt} = 0.67$, $\mu = 0.8$ и $\sigma = 0.05$. Возьмём инициальные цены товаров из интервала $[0.4, 0.9]$. Пусть количество посмотревших цену клиентов равно $|C_k| = 150$, а разброс цен при этом $x'_k - x_k = 0.1$. Шаг обучения определяется из предположения о константе Липшица $L = 50$. Возьмём число итераций равным 50. В результате выполненных



Симуляции поиска оптимальной цены. Кривые показывают величину $\frac{x_k+x'_k}{2}$

Figure. Simulations of optimal price calculation. Curves show the value of $\frac{x_k+x'_k}{2}$

модельных вычислений получены следующие значения: оптимальная выручка за период равна 0.624; средняя выручка за период в течение всех 50 итераций оптимизации равна 0.596; при этом Regret $= 0.045 x_{opt} p\,(x_{opt})$. Среднее значение всех цен, полученных на последнем шаге симуляцией оптимизации, с точностью до второго знака равно 0.67.

На рисунке представлены графики изменения цены для 100 различных симуляций поиска оптимальной цены. Пример демонстрирует сходимость модели.

Заключение

Предложенная в работе модель требует дальнейшего исследования сходимости, выбора её наилучших параметров для сходимости при предположениях об априорном распределении параметров модели клиентов, а также обобщения на случай многих сегментов клиентов и товаров в форме байесовской иерархической модели.

Список литературы / References

1. Perakis G., Singhvi D. Dynamic pricing with unknown nonparametric demand and limited price changes. *Operations Research*, 2023, vol. 72, iss. 6, pp. 1123–1145. DOI: http://dx.doi.org/10.1287/opre.2020.0445, EDN: RGGZRJ
2. Pasechnyuk D., Dvurechensky P., Omelchenko S., Gasnikov A. Stochastic optimization for dynamic pricing. In: Olenev N. N., Evtushenko Y. G., Jaćimović M., Khachay M., Malkova V. (eds.) *Advances in optimization and applications. OPTIMA 2021.* Communications in Computer and Information Science, vol. 1514. Cham, Springer, 2021, pp. 82–94. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-030-92711-0_6, EDN: ZWJGID
3. Lin T., Zheng Z., Jordan M. I. Gradient-free methods for deterministic and stochastic nonsmooth nonconvex optimization. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 2022, vol. 35, pp. 26160–26175.
4. Duchi J. C., Jordan M. I., Wainwright M. J., Wibisono A. Optimal rates for zero order convex optimization: The power of two function evaluations. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2015, vol. 61, iss. 5, pp. 2788–2806. DOI: https://doi.org/10.1109/TIT.2015.2409256
5. Nesterov Yu. Random gradient-free minimization of convex functions. *Technical Report 2011001, Center for Operations Research and Econometrics (CORE), Catholic University of Louvain (UCL)*, 2011, vol. 16. 32 p. EDN: GEPEMD
6. Devolder O., Glineur F., Nesterov Yu. First-order methods of smooth convex optimization with inexact oracle. *Mathematical Programming*, 2014, vol. 146, iss. 1–2, pp. 37–75. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s10107-013-0677-5, EDN: CPTOLC
7. Gasnikov A.V., Nesterov Yu. E. Universal method for stochastic composite optimization problems. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2018, vol. 58, iss. 1, pp. 48–64. DOI: http://dx.doi.org/10.1134/S0965542518010050, EDN: XXGXEL
8. Bayandina A. S., Gasnikov A. V., Lagunovskaya A. A. Gradient-free two-point methods for solving stochastic nonsmooth convex optimization problems with small non-random noises. *Automation and Remote Control*, 2018, vol. 79, iss. 8, pp. 1399–1408. DOI: http://dx.doi.org/10.1134/S0005117918080039, EDN: VBKOAV

Поступила в редакцию / Received 24.11.2025
Принята к публикации / Accepted 05.12.2025
Опубликована / Published 02.03.2026