



Научная статья

УДК 519.87

Приближенный метод анализа системы массового обслуживания с неординарным входящим потоком и групповым обслуживанием

Н. В. Сергеева[✉], Е. П. Станкевич, И. Е. Тананко

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Сергеева Надежда Викторовна, старший преподаватель кафедры системного анализа и автоматического управления, sergeevanv@info.sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0001-6125-7078>, SPIN: 3960-0429, AuthorID: 785093

Станкевич Елена Петровна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры системного анализа и автоматического управления, stankevichelena@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0630-4550>, SPIN: 4119-6338, AuthorID: 684128

Тананко Игорь Евстафьевич, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой системного анализа и автоматического управления, tanankoie@info.sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8960-9709>, SPIN: 8132-3706, AuthorID: 447915

Аннотация. Рассматривается система массового обслуживания с одним прибором и буфером бесконечной емкости. Из источника в систему в некоторый момент времени может поступить одно или сразу два требования с заданными вероятностями. Длительности интервалов времени между поступлениями требований являются экспоненциально распределенными случайными величинами. Требования выбираются из буфера случайным образом и обслуживаются группами фиксированного размера. Длительность обслуживания группы имеет экспоненциальное распределение. После завершения обслуживания вся группа мгновенно покидает систему. Если в этот момент в очереди системы группа требований не сформирована, то прибор ожидает, пока в систему не поступит необходимое число требований. Используя метод производящих функций, в работе получены формулы для вычисления стационарных вероятностей состояний рассматриваемой системы, математического ожидания числа требований в системе и математического ожидания длительности пребывания требований в системе. Предложен приближенный метод анализа системы с групповым входящим потоком и групповым обслуживанием, в основе которого лежит метод анализа системы обслуживания с ординарным входящим потоком и групповым обслуживанием. Проведен сравнительный анализ результатов вычислений характеристик, полученных с использованием точного и приближенного методов анализа рассматриваемой системы обслуживания.

Ключевые слова: система массового обслуживания, групповой входящий поток, групповое обслуживание

Для цитирования: Сергеева Н. В., Станкевич Е. П., Тананко И. Е. Приближенный метод анализа системы массового обслуживания с неординарным входящим потоком и групповым обслуживанием // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 1. С. 145–155. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-145-155>, EDN: XIYXTG

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Article

An approximate method for analyzing a queuing system with batch arrivals and batch services

N. V. Sergeeva[✉], E. P. Stankevich, I. E. Tananko

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Nadezhda V. Sergeeva, sergeevanv@info.sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0001-6125-7078>, SPIN: 3960-0429, AuthorID: 785093

Elena P. Stankevich, stankevichelena@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0630-4550>, SPIN: 4119-6338, AuthorID: 684128

Igor E. Tananko, tanankoie@info.sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8960-9709>, SPIN: 8132-3706, AuthorID: 447915

Abstract. A queueing system with a single server and an infinite-capacity buffer is considered. At any given time, one or two customers with specified probabilities can be received at once. The durations of intervals between arrivals of customers are exponentially distributed random variables. The customers are randomly selected from the buffer and served in batches of a fixed size. Customers are served as a unique batch of a given size with exponentially distributed service time. After the completion of service, the entire batch instantly leaves the system. If a batch of customers is not formed in the system queue at this moment, the server waits until the required number of customers is received by the system. Using the method of probability generating functions, expressions for the stationary probabilities of the system with batch arrivals and batch services are obtained. The average queue size and the average sojourn time in the system are derived. An approximate method for analyzing systems with batch arrivals and batch services based on a queueing system with ordinary arrivals and batch services is proposed. A comparative analysis of the results of calculations of the characteristics obtained using accurate and approximate methods of analysis of the service system under consideration is carried out.

Keywords: queueing system, batch arrival, batch service

For citation: Sergeeva N. V., Stankevich E. P., Tananko I. E. An approximate method for analyzing a queueing system with batch arrivals and batch services. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 1, pp. 145–155 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-145-155>, EDN: XIYXTG

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Системы массового обслуживания с групповым поступлением и/или групповым обслуживанием находят широкое применение при решении научно-прикладных задач. Например, для решения задачи планирования работы амбулаторных отделений больниц впервые была исследована система обслуживания с пуассоновским потоком и групповым обслуживанием требований одним прибором [1]. В работе [2] рассмотрена система массового обслуживания с общей функцией распределения длительности обслуживания одним прибором и поступлением групп требований через экспоненциально распределенные интервалы времени. Исследованы свойства длительности периода занятости системы, процессы поступления и выхода требований из системы обслуживания, получено распределение вероятностей числа требований в системе.

Другие результаты анализа систем массового обслуживания, в которые требования либо поступают группами, либо обслуживаются группами, можно найти в [3–7]. Исследование систем обслуживания, в которые поступает неординарный поток, а требования прибором обслуживаются группами, приведено в [8, 9]. Для получения стационарных характеристик систем массового обслуживания используют различные методы. Например, в работах [10–12]



применялся метод производящих функций. Так, авторы работ [10, 11] использовали этот метод при вычислении стационарных характеристик систем массового обслуживания с ординарным потоком, многими приборами и групповым обслуживанием. Кроме аппарата производящих функций, для получения стационарных характеристик систем часто применяют преобразование Лапласа [13–15]. Например, в работе [15] для системы $M^X/M/1$ применяется преобразование Лапласа для получения вероятностей переходов процесса Маркова, описывающего эволюцию системы, и затем максимального числа требований в системе. Также для решения задач анализа систем часто применяются матрично-геометрический метод [16] и метод вложенных цепей Маркова [17, 18]. Для вычисления совместных стационарных вероятностей числа требований в системе и размера группы обслуживания в произвольные моменты времени, моменты выхода требований из системы, моменты перед поступлением требований помимо метода вложенных цепей Маркова в работе [17] также применялся метод дополнительных переменных.

К настоящему времени хорошо развит математический аппарат, позволяющий анализировать сети массового обслуживания, которые состоят из систем массового обслуживания с пуассоновским входящим потоком требований и экспоненциальной длительностью обслуживания.

Одна из первых попыток объединить системы массового обслуживания с ординарным потоком и групповым обслуживанием в сеть предпринята в работе [19], в которой предполагается, что размер выходящей после обслуживания группы много меньше, чем количество систем, в которые эти обслуженные требования могут перейти, а также, что вероятности перехода обслуженных требований в системы сравнимы. Тогда вероятность поступления двух и более требований в одну систему мала и ею пренебрегают. Это позволяет сохранить предположение о пуассоновском входящем потоке в каждую систему сети обслуживания. Но если любое из этих предположений не выполняется, то пренебрегать вероятностью поступления двух и более требований, вообще говоря, нельзя. В связи с этим возникает вопрос: насколько будут отличаться характеристики в системах обслуживания, когда предполагается, что в системы обслуживания требования могут поступать только по одному, и когда допускается, что в систему может поступать не только одно требование, а, например, два требования, но с небольшой вероятностью.

В данной работе показано, что систему массового обслуживания с пуассоновским входящим потоком и групповым обслуживанием можно использовать в качестве приближенной модели системы массового обслуживания с групповым входящим потоком и групповым обслуживанием, но с измененной соответствующим образом интенсивностью входного потока.

Работа содержит три раздела. В первом разделе рассматривается одноприборная система массового обслуживания с групповым обслуживанием, в которую в каждый момент времени может поступать либо одно требование, либо только два требования. С помощью аппарата производящих функций получены выражения для стационарных вероятностей состояний системы. Во втором разделе описывается одноприборная система обслуживания с групповым обслуживанием и ординарным потоком. Для этой системы предлагается выражение для пересчета интенсивности потока требований. В третьем разделе приводятся и сравниваются результаты численных экспериментов для обеих систем обслуживания.

1. Описание системы массового обслуживания с групповым входящим потоком и групповым обслуживанием

Рассматривается система массового обслуживания S^X с групповым входящим потоком и групповым обслуживанием. В систему может поступать одно или два требования. Вероятность того, что в систему поступит одно требование, равна q , два требования — $1 - q$. Длительности интервалов времени между последовательными поступлениями требований являются случайными величинами, имеющими экспоненциальное распределение с параметром λ . В системе имеется один обслуживающий прибор и буфер бесконечной емкости. Из

буфера на обслуживание требования выбираются произвольно группой размера b . Если в очереди нет необходимого количества требований, то обслуживающий прибор простаивает до тех пор, пока в очереди не накопится минимум b требований. Длительность обслуживания группы требований имеет экспоненциальное распределение с параметром μ . Состояние системы определяется числом находящихся в ней требований. Диаграмма интенсивностей переходов имеет вид, представленный на рис. 1.

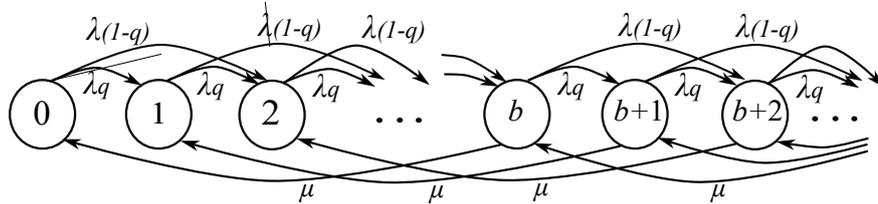


Рис. 1. Диаграмма интенсивностей переходов для системы S^X
 Fig. 1. State transition rate diagram for the system S^X

На основании построенной диаграммы интенсивностей переходов система уравнений равновесия примет вид

$$\begin{cases} \lambda\pi^X(0) = \mu\pi^X(b), \\ \lambda\pi^X(1) = \lambda q\pi^X(0) + \mu\pi^X(b+1), \\ \lambda\pi^X(n) = \lambda q\pi^X(n-1) + \lambda(1-q)\pi^X(n-2) + \mu\pi^X(b+n), \quad 2 \leq n \leq b-1, \\ (\lambda + \mu)\pi^X(n) = \lambda q\pi^X(n-1) + \lambda(1-q)\pi^X(n-2) + \mu\pi^X(b+n), \quad n \geq b, \end{cases} \quad (1)$$

где $\pi^X(n), n = 0, 1, 2, \dots$ — стационарная вероятность пребывания системы S^X в состоянии n .

Для нахождения стационарных вероятностей воспользуемся аппаратом производящих функций [4]. Определим производящую функцию в виде

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi^X(n)z^n. \quad (2)$$

Умножим уравнения системы (1) на z^n и сложим, тогда, применяя (2), получим

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \left(P(z) - \sum_{n=0}^{b-1} \pi^X(n)z^n \right) &= \lambda qz \left(P(z) - \sum_{n=0}^{b-2} \pi^X(n)z^n \right) + \\ + \lambda(1-q)z^2 \left(P(z) - \sum_{n=0}^{b-3} \pi^X(n)z^n \right) &+ \frac{\mu}{z^b} \left(P(z) - \sum_{n=0}^{2b-1} \pi^X(n)z^n \right). \end{aligned}$$

Выделяя производящую функцию из последнего равенства, получим

$$P(z) = \frac{(1 - z^b) \sum_{n=0}^{b-1} \pi^X(n)z^n}{b\psi(1-q)z^{b+2} + b\psi qz^{b+1} - (b\psi + 1)z^b + 1}, \quad (3)$$

где $\psi = \frac{\lambda}{b\mu}$.

Многочлен, стоящий в знаменателе в правой части (3), имеет $b + 2$ корней, одним из которых является единица. Для остальных $b + 1$ корней можно показать, что точно $b - 1$ лежат в круге $|z| < 1$, а оставшиеся, которые обозначим z_1 и z_2 , удовлетворяют условию $|z_1| > 1$ и $|z_2| > 1$. Для этого воспользуемся теоремой Руше и покажем, что если для



функций $|f(z)| = |(b\psi + 1)z^b|$ и $|g(z)| = |b\psi(1 - q)z^{b+2} + b\psi qz^{b+1} + 1|$ на некотором контуре ∂G выполняется неравенство $|f(z)| - |g(z)| > 0$, то в области G функции f и $f + g$ имеют одинаковое количество нулей.

Рассмотрим контур ∂G : $|z| < 1 + \delta$. При условии

$$\psi < \frac{1}{2 - q} \tag{4}$$

выберем вещественное δ такое, что

$$0 < \delta < -\frac{1}{2b} \left(\frac{b(2 - q)}{1 - q} + 1 \right) + \frac{1}{2b} \sqrt{\left(\frac{b(2 - q)}{1 - q} - 1 \right)^2 + \frac{4b}{\psi(1 - q)}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |f(z)| - |g(z)| &\geq (b\psi + 1)(1 + \delta)^b - b\psi(1 - q)(1 + \delta)^{b+2} - b\psi q(1 + \delta)^{b+1} - 1 = \\ &= (1 + \delta)^b (b\psi + 1 - b\psi(1 - q)(1 + \delta)^2 - b\psi q(1 + \delta)) - 1 \geq \\ &\geq (1 + b\delta) (b\psi + 1 - b\psi(1 - q)(1 + \delta)^2 - b\psi q(1 + \delta)) - 1 = \\ &= b\delta(1 - \psi(2 - q) - \psi(b(2 - q) + 1 - q)\delta - b\psi(1 - q)\delta^2). \end{aligned}$$

При соответственном выборе параметров ψ и δ

$$1 - \psi(2 - q) - \psi(b(2 - q) + 1 - q)\delta - b\psi(1 - q)\delta^2 > 0.$$

Устремляя $\delta \rightarrow 0$, получим, что знаменатель (3) имеет точно b нулей в области $|z| \leq 1$, но один корень $|z| = 1$. Таким образом, знаменатель (3) имеет точно $b - 1$ нулей в области $|z| < 1$ и два корня z_1, z_2 — в области $|z| > 1$.

Числитель дроби также представляет собой многочлен относительно z . Одним корнем является $|z| = 1$. Так как функция $P(z)$ должна оставаться ограниченной в области $|z| < 1$, то остальные $b - 1$ корней числителя должны точно совпадать с теми корнями знаменателя, для которых выполняется условие $|z| < 1$. Отсюда следует, что эти два многочлена степени $b - 1$ должны быть пропорциональны с коэффициентом K :

$$K \sum_{n=0}^{b-1} \pi^X(n) z^n = \frac{b\psi(1 - q)z^{b+2} + b\psi qz^{b+1} - (b\psi + 1)z^b + 1}{(1 - z)(z - z_1)(z - z_2)}.$$

Используя это равенство для сокращения общих множителей числителя и знаменателя дроби в правой части равенства (3), получим

$$P(z) = \frac{1 - z^b}{K(1 - z)(z - z_1)(z - z_2)}.$$

Учитывая, что $P(1) = 1$, найдем константу K в виде

$$K = \frac{b}{(1 - z_1)(1 - z_2)}.$$

Окончательно производящая функция примет вид

$$P(z) = \frac{(1 - z^b) \left(1 - \frac{1}{z_1}\right) \left(1 - \frac{1}{z_2}\right)}{b(1 - z) \left(1 - \frac{z}{z_1}\right) \left(1 - \frac{z}{z_2}\right)}. \tag{5}$$

Раскладывая правую часть равенства (5) в ряд по z , получим выражения для стационарных вероятностей состояний в виде

$$\begin{aligned} \pi^X(0) &= \frac{1}{b} \left(1 - \frac{1}{z_1}\right) \left(1 - \frac{1}{z_2}\right), \\ \pi^X(n) &= \frac{\pi^X(0)}{z_1 - z_2} \sum_{k=0}^n \frac{z_1^{k+1} - z_2^{k+1}}{z_1^k z_2^k}, \quad 1 \leq n < b - 1, \\ \pi^X(n) &= \frac{\pi^X(0)}{z_1 - z_2} \sum_{k=n-b+1}^n \frac{z_1^{k+1} - z_2^{k+1}}{z_1^k z_2^k}, \quad n \geq b - 1. \end{aligned} \tag{6}$$

Математическое ожидание числа требований в системе вычислим по формуле

$$\bar{n}^X = P'(1) = \frac{b-1}{2} + \frac{1}{z_1-1} + \frac{1}{z_2-1}. \tag{7}$$

Формула Литтла для математического ожидания длительности пребывания требований в системе имеет вид

$$\bar{u}^X = \frac{\bar{n}^X}{\lambda}, \tag{8}$$

где $\bar{\lambda} = \lambda(2 - q)$.

2. Описание системы массового обслуживания с ординарным входящим потоком и групповым обслуживанием

Рассмотрим систему массового обслуживания S , которая отличается от системы S^X тем, что требования могут поступать только по одному, т.е. входящий поток является пуассоновским.

В этом случае уравнения равновесия будут иметь вид [19]

$$\begin{cases} \lambda\pi(0) = \mu\pi(b), \\ \lambda\pi(n) = \lambda\pi(n-1) + \mu\pi(b+n), & 1 \leq n \leq b-1, \\ (\lambda + \mu)\pi(n) = \lambda\pi(n-1) + \mu\pi(b+n), & n \geq b, \end{cases} \tag{9}$$

где $\pi(n)$ — стационарные вероятности состояний.

Система S функционирует в стационарном режиме, если коэффициент использования системы $\psi = \frac{\lambda}{b\mu} < 1$.

Эволюцию системы можно описать с помощью процесса размножения и гибели [20], представленном на рис. 2.

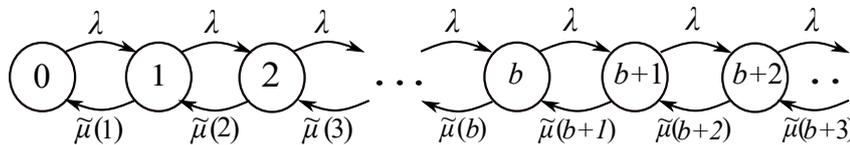


Рис. 2. Процесс размножения и гибели
Fig. 2. Birth–death processes

В этом случае стационарные вероятности определяются формулами [21]

$$\pi(k) = \pi(0) \prod_{n=1}^k \frac{\lambda}{\tilde{\mu}(n)}, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{10}$$



где

$$\pi(0) = \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{n=1}^k \frac{\lambda}{\tilde{\mu}(n)} \right)^{-1}, \tag{11}$$

а интенсивности $\tilde{\mu}(n)$ имеют вид [20]

$$\begin{cases} \tilde{\mu}(n) = \lambda - \mu \frac{\lambda^b}{\tilde{\mu}(n+1) \cdot \dots \cdot \tilde{\mu}(n+b)}, & 1 \leq n \leq b-1, \\ \tilde{\mu}(n) = \lambda + \mu - \mu \frac{\lambda^b}{\tilde{\mu}(n+1) \cdot \dots \cdot \tilde{\mu}(n+b)}, & n \geq b. \end{cases} \tag{12}$$

Используя стационарные вероятности (10), (11), в работе [20] была получена формула для математического ожидания длительности пребывания требования в системе в виде

$$\bar{u}(\lambda) = \frac{b-1}{2\lambda} + \frac{1}{M-\lambda}, \tag{13}$$

где $M = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mu}(n)$ — корень уравнения

$$M^{b+1} - (\lambda + \mu)M^b + \lambda^b \mu = 0,$$

принадлежащий интервалу

$$\left(\frac{b(\lambda + \mu)}{b+1}, \frac{(\lambda + \mu)^{b+1} - \lambda^b \mu}{(\lambda + \mu)^b} \right).$$

3. Численный пример

Рассмотрим систему S^X , в которую может поступить одно требование с вероятностью $q = 0.9$ и два требования с вероятностью $1 - q = 0.1$. Интенсивность входящего потока $\lambda = 5$. Длительность обслуживания имеет экспоненциальное распределение с параметром $\mu = 2$. Также рассмотрим систему S , в которую поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью $\bar{\lambda} = \lambda(2 - q) = 5.5$. Длительность обслуживания в системе S имеет экспоненциальное распределение с параметром $\mu = 2$.

На рис. 3 представлены первые пятнадцать стационарных вероятностей состояний рассмотренных систем обслуживания при $b = 3, 4, 5, 6$. Сплошная линия соответствует стационарным вероятностям $\pi^X(n)$ для системы S^X , которые вычислялись по формулам (10). Пунктирная линия соответствует стационарным вероятностям $\pi(n)$ для системы S и вычислялись по формулам (10), (11), (12).

Для сравнения полученных вероятностей использовалась метрика — расстояние Колмогорова

$$D_n = \max_{i \geq 0} \left| \sum_{k=0}^i \pi^X(k) - \sum_{k=0}^i \pi(k) \right|, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

значения которой приведены в табл. 1. Из представленных данных видно, что отклонение накопленных стационарных вероятностей рассматриваемых систем не превосходит 0.016.

В табл. 2 приведены значения математических ожиданий числа требований и длительностей пребывания требования в системах S^X и S при различных значениях b . Для системы S^X значения \bar{n}^X и \bar{u}^X вычислялись по формулам (7) и (8) соответственно. Для системы S значения $\bar{u}(\bar{\lambda})$ вычислялись по формуле (13). В четвертом и седьмом столбцах таблицы 2 приведены оценки разности в полученных значениях характеристик, вычисленные по

Таблица 1 / Table 1

Расстояние Колмогорова для стационарных вероятностей
Kolmogorov distance for stationary probabilities

b	3	4	5	6
D_n	0.0155	0.0105	0.0078	0.0061

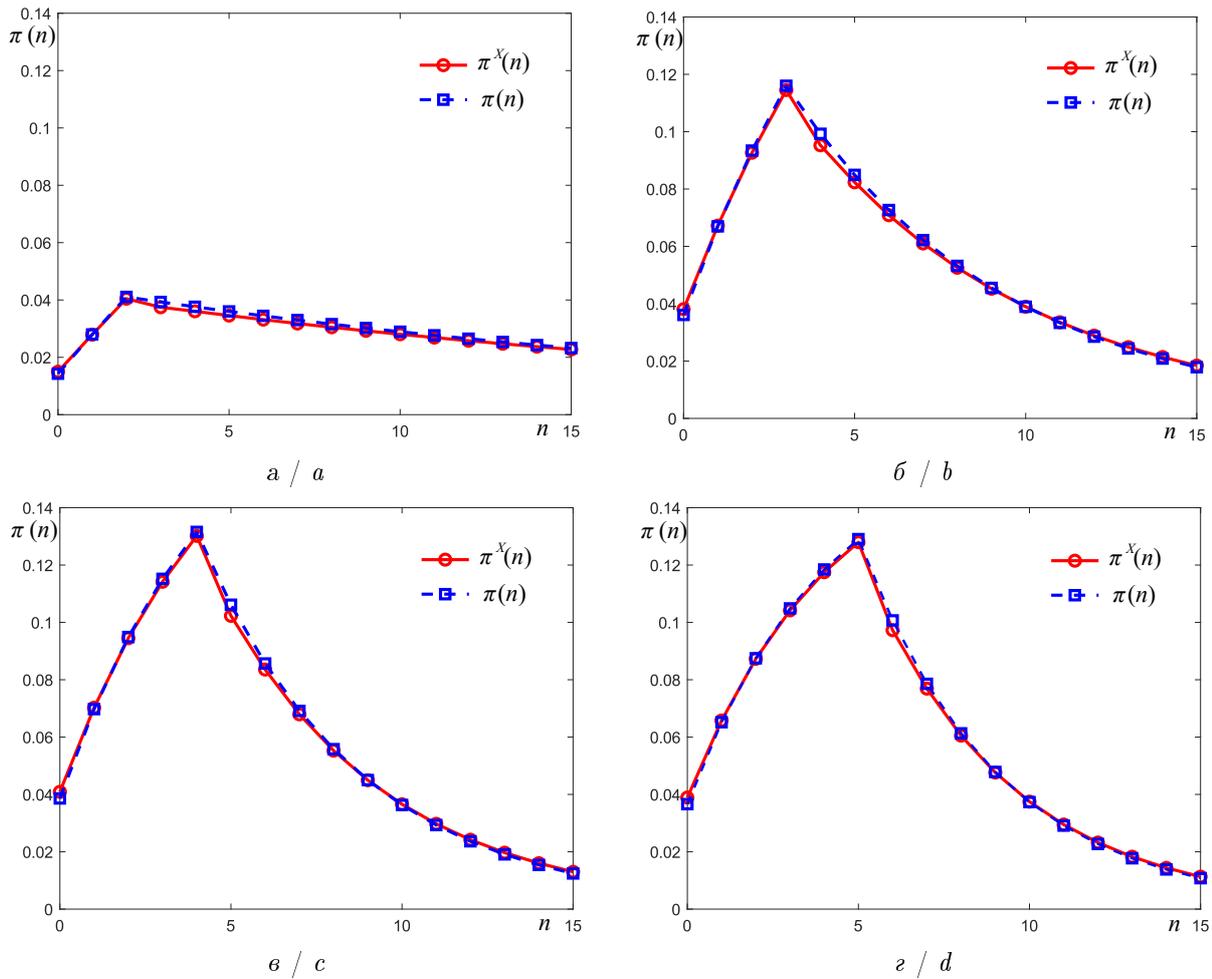


Рис. 3. Стационарные вероятности состояний систем S^X и S при $\lambda = 5, \mu = 2, q = 0.9$: $a - b = 3$; $\bar{b} - b = 4$; $\bar{c} - b = 5$; $\bar{d} - b = 6$ (цвет онлайн)
 Fig. 3. Stationary state probabilities of systems S^X and S for $\lambda = 5, \mu = 2, q = 0.9$: a is $b = 3$; \bar{b} is $b = 4$; \bar{c} is $b = 5$; \bar{d} is $b = 6$ (color online)

формулам $\delta\bar{n} = \frac{|\bar{n}^X - \bar{n}(\bar{\lambda})|}{\bar{n}^X} \cdot 100\%$ и $\delta\bar{u} = \frac{|\bar{u}^X - \bar{u}(\bar{\lambda})|}{\bar{u}^X} \cdot 100\%$ соответственно. Из данных, представленных в табл. 2, видно, что относительная погрешность в полученных значениях не превосходит 5%.

Таблица 2 / Table 2

Характеристики для систем S^X и S при $\lambda = 5, \mu = 2, q = 0.9$
 Characteristics of systems S^X and S for $\lambda = 5, \mu = 2, q = 0.9$

b	\bar{n}^X	$\bar{n}(\bar{\lambda})$	$\delta\bar{n}, \%$	\bar{u}^X	$\bar{u}(\bar{\lambda})$	$\delta\bar{u}, \%$
3	24.3055	23.3212	4.05	4.4192	4.2402	4.05
4	7.6075	7.4259	2.39	1.3832	1.3502	2.39
5	6.2721	6.1807	1.46	1.1404	1.1238	1.46
6	6.1083	6.0517	0.93	1.1106	1.1003	0.93

В табл. 3 приведены значения математического ожидания числа требований и математическое ожидание времени пребывания требования в системах S^X и S при $\lambda = 5, \mu = 2, b = 4$ и различных значениях вероятности q . При этом интенсивность входного потока в систему S вычислялась по формуле $\bar{\lambda} = \lambda(2 - q)$. В четвертом и седьмом столбцах табл. 3 приведены оценки разности в полученных значениях, в последнем столбце приведено расстояние Колмогорова. Для вы-



бренных параметров вероятность поступления одного требования согласно ограничению (4) $q > 0.4$.

Таблица 3 / Table 3

Характеристики для систем S^X и S при $\lambda = 5$, $\mu = 2$, $b = 4$
 Characteristics of systems S^X and S for $\lambda = 5$, $\mu = 2$, $b = 4$

q	\bar{n}^X	$\bar{n}(\bar{\lambda})$	$\delta\bar{u}, \%$	\bar{u}^X	$\bar{u}(\bar{\lambda})$	$\delta\bar{u}, \%$	D_n
0.41	458.4135	399.4987	12.85	57.6621	50.2514	12.85	0.0478
0.50	44.4124	39.4871	11.09	5.9217	5.2649	11.09	0.0442
0.60	21.4109	19.4734	9.05	3.0587	2.7819	9.05	0.0366
0.70	13.7428	12.7920	6.92	2.1143	1.9680	6.92	0.0286
0.80	9.9082	9.4429	4.70	1.6514	1.5738	4.70	0.0200
0.90	7.6075	7.4259	2.39	1.3832	1.3502	2.39	0.0105
0.99	6.2040	6.1890	0.24	1.2285	1.2255	0.24	0.0011

Из данных, представленных в табл. 3, видно, что при увеличении вероятности поступления одного требования относительная погрешность в значениях математического ожидания длительности пребывания требований в системах S^X и S и расстояние Колмогорова уменьшаются. При $q > 0.6$ относительная погрешность математического ожидания длительности пребывания требования в системы не превосходит 10%, а расстояние Колмогорова меньше $D_n < 0.04$. Таким образом, при соответствующем выборе параметров систему с групповым входящим потоком и групповым обслуживанием можно с хорошей точностью аппроксимировать более простой системой с ординарным входящим потоком и групповым обслуживанием.

Заключение

Предлагаемый приближенный метод анализа системы с неординарным потоком и групповым обслуживанием требований может быть использован для решения задач управления процессами функционирования систем потоковой передачи информации, систем грузовых и пассажирских перевозок, систем сборочного производства.

Продолжение исследования может быть связано с разработкой приближенного метода анализа системы с групповым обслуживанием, в которую могут поступать группы требований произвольного размера, а также определения оценки вычислительной эффективности метода анализа.

Список литературы

1. *Bailey N.* On queueing processes with bulk service // Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological). 1954. Vol. 16. P. 80–87.
2. *Gaver D.* Imbedded Markov chain analysis of a waiting-line process in continuous time // The Annals of Mathematical Statistics. 1959. Vol. 30, iss. 3. P. 698–720. DOI: <https://doi.org/10.1214/aoms/1177706200>
3. *Medhi J.* Stochastic models in queueing theory. 2nd ed. San Diego : Elsevier Science, 2002. 482 p.
4. *Клейнрок Л.* Теория массового обслуживания. Москва : Машиностроение, 1979. 432 с.
5. *Bolch G., Greiner S., de Meer H., Trivedi K. S.* Queueing networks and Markov chains: Modeling and performance evaluation with computer science applications. New Jersey : John Wiley & Sons, 2006. 896 p. DOI: <https://doi.org/10.1002/0471791571>
6. *Chaudhry M. L., Templeton J. G. C.* A first course in bulk queues. New York : John Wiley & Sons, 1983. 372 p.
7. *Santhi K., Saravanan R.* Performance analysis of cloud computing bulk service using queueing models // International Journal of Applied Engineering Research. 2017. Vol. 12, iss. 17. P. 6487–6492.



8. Chao X., Miyazawa M., Pinedo M. Queueing networks: Customers, signals and product form solutions. New York : John Wiley & Sons, 1999. 464 p.
9. Ritha W., Sreelekha B. Fuzzy steady state analysis of $M^X/M^{(A,B)}/1$ queue models with random breakdowns // International Journal of Applied Engineering and Technology. 2012. Vol. 2, iss. 2. P. 200–207.
10. Nakamura A., Phung-Duc T. Stationary analysis of infinite server queue with batch service // Performance Engineering and Stochastic Modeling. EPEW ASMTA 2021 / eds.: P. Ballarini, H. Castel, I. Dimitriou, M. Iacono, T. Phung-Duc, J. Walraevens. Cham : Springer, 2021. P. 411–424. (Lecture Notes in Computer Science. Vol. 13104). DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-91825-5_25
11. Nakamura A., Phung-Duc T. Exact and asymptotic analysis of infinite server batch service queues with random batch sizes // Queueing Systems. 2024. Vol. 106. P. 129–158. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-023-09898-4>
12. Gupta G. K., Banerjee A. Steady state analysis of system size-based balking in $M/M^b/1$ queue // International Journal of Mathematics in Operational Research. 2019. Vol. 14, iss. 3. P. 319–337. DOI: <https://doi.org/10.1504/IJMOR.2019.099383>
13. Chen A., Pollett Ph., Li J., Zhang H. Markovian bulk-arrival and bulk-service queues with state-dependent control // Queueing Systems. 2010. Vol. 64. P. 267–304. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-009-9162-5>
14. Chen A., Wu X., Zhang J. Markovian bulk-arrival and bulk-service queues with general state-dependent control // Queueing Systems. 2020. Vol. 95. P. 331–378. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-020-09660-0>
15. Stadge W. Some exact expressions for the bulk-arrival queue $M^X/M/1$ // Queueing Systems. 1989. Vol. 4. P. 85–92. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01150859>
16. Rama G., Ramshankar R., Ramanarayanan R. $M/M/1$ bulk arrival and bulk service queue with randomly varying environment // IOSR Journal of Mathematics. 2014. Vol. 10, iss. 6. P. 58–66. DOI: <https://doi.org/10.9790/5728-10635866>
17. Gupta G. K., Banerjee A. On finite buffer bulk arrival bulk service queue with queue length and batch size dependent service // International Journal of Applied and Computational Mathematics. 2019. Vol. 5. Art. 32. DOI: <https://doi.org/10.1007/s40819-019-0617-z>
18. Bhat U. N. Imbedded Markov chain analysis of single server bulk queues // Journal of the Australian Mathematical Society. 1964. Vol. 4, iss. 2. P. 244–263. DOI: <https://doi.org/10.1017/S1446788700023454>
19. Stankevich E., Tananko I., Pagano M. Optimization of open queueing networks with batch services // Mathematics. 2022. Vol. 10, iss. 16. Art. 3027. DOI: <https://doi.org/10.3390/math10163027>
20. Станкевич Е. П., Тананко И. Е., Пагано М. Анализ системы массового обслуживания с групповым обслуживанием требований // Компьютерные науки и информационные технологии : материалы междунаро. науч. конф. Саратов : Научная книга, 2021. С. 148–151. EDN: PGOIEL
21. Вишневецкий В. М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. Москва : Техносфера, 2003. 506 с.

References

1. Bailey N. On queueing processes with bulk service. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 1954, vol. 16, pp. 80–87.
2. Gaver D. Imbedded Markov chain analysis of a waiting-line process in continuous time. *The Annals of Mathematical Statistics*, 1959, vol. 30, iss. 3, pp. 698–720. DOI: <https://doi.org/10.1214/aoms/1177706200>
3. Medhi J. *Stochastic models in queueing theory*. 2nd ed. San Diego, Elsevier Science, 2002. 482 p.
4. Kleinrock L. *Queueing systems. Vol. I: Theory*. New York, John Wiley & Sons, 1975. 437 p. (ed. Russ.: Moscow, Mashinostroenie, 1979. 432 p.).
5. Bolch G., Greiner S., de Meer H., Trivedi K. S. *Queueing networks and Markov chains: Modeling and performance evaluation with computer science applications*. New Jersey, John Wiley & Sons, 2006. 896 p. DOI: <https://doi.org/10.1002/0471791571>
6. Chaudhry M. L., Templeton J. G. C. *A first course in bulk queues*. New York, John Wiley & Sons, 1983. 372 p.
7. Santhi K., Saravanan R. Performance analysis of cloud computing bulk service using queueing models. *International Journal of Applied Engineering Research*, 2017, vol. 12, iss. 17, pp. 6487–



- 6492.
8. Chao X., Miyazawa M., Pinedo M. *Queueing networks: Customers, signals and product form solutions*. New York, John Wiley & Sons, 1999. 464 p.
 9. Ritha W., Sreelekha B. Fuzzy steady state analysis of $M^X/M^{(A,B)}/1$ queue models with random breakdowns. *International Journal of Applied Engineering and Technology*, 2012, vol. 2, iss. 2, pp. 200–207.
 10. Nakamura A., Phung-Duc T. Stationary analysis of infinite server queue with batch service. In: Ballarini P., Castel H., Dimitriou I., Iacono M., Phung-Duc T., Walraevens J. (eds.) *Performance Engineering and Stochastic Modeling. EPEW ASMTA 2021*. Lecture Notes in Computer Science, vol. 13104. Cham, Springer, 2021, pp. 411–424. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-91825-5_25
 11. Nakamura A., Phung-Duc T. Exact and asymptotic analysis of infinite server batch service queues with random batch sizes. *Queueing Systems*, 2024, vol. 106, pp. 129–158. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-023-09898-4>
 12. Gupta G. K., Banerjee A. Steady state analysis of system size-based balking in $M/M^b/1$ queue. *International Journal of Mathematics in Operational Research*, 2019, vol. 14, iss. 3, pp. 319–337. DOI: <https://doi.org/10.1504/IJMOR.2019.099383>
 13. Chen A., Pollett Ph., Li J., Zhang H. Markovian bulk-arrival and bulk-service queues with state-dependent control. *Queueing Systems*, 2010, vol. 64, pp. 267–304. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-009-9162-5>
 14. Chen A., Wu X., Zhang J. Markovian bulk-arrival and bulk-service queues with general state-dependent control. *Queueing Systems*, 2020, vol. 95, pp. 331–378. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-020-09660-0>
 15. Stadje W. Some exact expressions for the bulk-arrival queue $M^X/M/1$. *Queueing Systems*, 1989, vol. 4, pp. 85–92. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01150859>
 16. Rama G., Ramshankar R., Ramanarayanan R. $M/M/1$ bulk arrival and bulk service queue with randomly varying environment. *IOSR Journal of Mathematics*, 2014, vol. 10, iss. 6, pp. 58–66. DOI: <https://doi.org/10.9790/5728-10635866>
 17. Gupta G. K., Banerjee A. On finite buffer bulk arrival bulk service queue with queue length and batch size dependent service. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 2019, vol. 5, art. 32. DOI: <https://doi.org/10.1007/s40819-019-0617-z>
 18. Bhat U. N. Imbedded Markov chain analysis of single server bulk queues. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 1964, vol. 4, iss. 2, pp. 244–263. DOI: <https://doi.org/10.1017/S144678870023454>
 19. Stankevich E., Tananko I., Pagano M. Optimization of open queueing networks with batch services. *Mathematics*, 2022, vol. 10, iss. 16, art. 3027. DOI: <https://doi.org/10.3390/math10163027>
 20. Stankevich E. P., Tananko I. E., Pagano M. Analysis of a queueing system with group servicing of requirements. *Komp'yuternye nauki i informacionnye tekhnologii* [Computer Science and Information Technologies: Proceedings of the International Scientific Conference]. Saratov, Nauchnaya kniga, 2021, pp. 148–151 (in Russian). EDN: PGOIEL
 21. Vishnevskij V. M. *Teoreticheskie osnovy proektirovaniya komp'yuternyh setey* [Theoretical foundations of computer network design]. Moscow, Tekhnosfera, 2003. 506 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 27.11.2025

Принята к публикации / Accepted 07.12.2025

Опубликована / Published 02.03.2026