



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 1. С. 17–27

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 1, pp. 17–27  
https://mmi.sgu.ru DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-17-27>

EDN: <https://elibrary.ru/HGGRSF>

Научная статья

УДК 512.542

## $\mathfrak{F}^\omega$ -инъекторы конечных групп

М. М. Сорокина<sup>✉</sup>, Д. Г. Новикова

Брянский государственный университет имени академика И. Г. Петровского, Россия, 241036, г. Брянск, ул. Бежицкая, д. 14

**Сорокина Марина Михайловна**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, mmsorokina@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9516-626X>, SPIN: 3565-2217, AuthorID: 441219

**Новикова Диана Геннадьевна**, ассистент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, novikovadg@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-5935-5397>, SPIN: 1482-5618, AuthorID: 1132164

**Аннотация.** Рассматриваются только конечные группы и классы конечных групп.  $\mathfrak{F}$ -инъекторы (Б. Фишер, В. Гашюц, Б. Хартли, 1967) и  $\mathfrak{F}$ -проекторы (В. Гашюц, 1969), где  $\mathfrak{F}$  — некоторый класс групп, относятся к хорошо известным подгруппам в группах, обобщающим свойства силовских и холловых подгрупп. Для непустого множества  $\omega$  простых чисел было введено в рассмотрение понятие  $\mathfrak{F}^\omega$ -проектора группы, обобщающее понятие  $\mathfrak{F}$ -проектора (В. А. Ведерников, М. М. Сорокина, 2016). Используя аналогичный подход, авторами данной статьи были определены  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъекторы в группах. Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектором в  $G$ , если  $H$  —  $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа в  $G$  и для каждой субнормальной  $\omega$ -подгруппы  $K$  группы  $G$  пересечение  $H \cap K$  является  $\mathfrak{F}$ -максимальной подгруппой в  $K$ . В случае, когда  $\omega$  совпадает с множеством всех простых чисел, понятие  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектора совпадает с понятием  $\mathfrak{F}$ -инъектора группы. Целью настоящей работы является изучение свойств  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъекторов в разрешимых группах. В работе используются классические методы доказательств теории конечных групп, а также методы теории классов групп. Решены следующие задачи: установлены свойства существования и сопряженности  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъекторов в разрешимых группах (теорема 1); описаны необходимые и достаточные условия, при которых подгруппа разрешимой группы является ее  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектором (теоремы 2–4). Полученные результаты являются развитием известных теорем об  $\mathfrak{F}$ -инъекторах, они могут быть полезными в дальнейших исследованиях подгруппового строения конечных групп методами теории классов групп.

**Ключевые слова:** группа, конечная группа, разрешимая группа,  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектор группы, класс групп, класс Фиттинга

**Для цитирования:** Сорокина М. М., Новикова Д. Г.  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъекторы конечных групп // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 1. С. 17–27. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-17-27>, EDN: HGGRSF

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## $\mathfrak{F}^\omega$ -injectors of finite groups

M. M. Sorokina<sup>✉</sup>, D. G. Novikova

Bryansk State Academician I. G. Petrovski University, 14 Bezhitskaya St., Bryansk 241036, Russia

**Marina M. Sorokina**, mmsorokina@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9516-626X>, SPIN: 3565-2217, AuthorID: 441219



Diana G. Novikova, novikovadg@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-5935-5397>, SPIN: 1482-5618, AuthorID: 1132164

**Abstract.** Only finite groups and classes of finite groups are considered.  $\mathfrak{F}$ -injectors (B. Fischer, W. Gaschutz, B. Hartley, 1967) and  $\mathfrak{F}$ -projectors (W. Gaschutz, 1969), where  $\mathfrak{F}$  is a class of groups, are well-known subgroups in groups that generalize the properties of Sylow and Hall subgroups. For a non-empty set  $\omega$  of primes the concept of  $\mathfrak{F}^\omega$ -projector of a group (V. A. Vedernikov and M. M. Sorokina, 2016), which generalizes the concept of  $\mathfrak{F}$ -projector, was introduced. Using a similar approach, the authors of this article defined  $\mathfrak{F}^\omega$ -injectors in groups. A subgroup  $H$  of  $G$  is called an  $\mathfrak{F}^\omega$ -injector in  $G$  if  $H$  is an  $\mathfrak{F}$ -maximal subgroup in  $G$  and for every subnormal  $\omega$ -subgroup  $K$  of  $G$  the intersection  $H \cap K$  is an  $\mathfrak{F}$ -maximal subgroup in  $K$ . In the case where  $\omega$  coincides with the set of all primes, the concept of an  $\mathfrak{F}^\omega$ -injector coincides with the concept of an  $\mathfrak{F}$ -injector of a group. The goal of this paper is to study the properties of  $\mathfrak{F}^\omega$ -injectors in soluble groups. The paper uses classical methods of proofs of the theory of finite groups, as well as methods of the theory of classes of groups. The following tasks are solved: the existence and conjugacy of  $\mathfrak{F}^\omega$ -injectors in solvable groups are established (Theorem 1); necessary and sufficient conditions under which a subgroup of a solvable group is its  $\mathfrak{F}^\omega$ -injector are described (Theorems 2–4). Obtained results develop known theorems on  $\mathfrak{F}$ -injectors; they can be useful in further research of the subgroup structure of finite groups using methods of the theory of classes of groups.

**Keywords:** group, finite group, solvable group,  $\mathfrak{F}^\omega$ -injector, class of groups, Fitting class

**For citation:** Sorokina M. M., Novikova D. G.  $\mathfrak{F}^\omega$ -injectors of finite groups. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 1, pp. 17–27 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-17-27>, EDN: HGGRSF

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Рассматриваются только конечные группы. При исследовании подгруппового строения конечных групп средствами теории классов групп важную роль играют подгруппы в группах, определяемые посредством фиксированных классов. К таким подгруппам относятся  $\mathfrak{F}$ -инъекторы в группах, введенные в рассмотрение в совместной работе Б. Фишера, В. Гашюца, Б. Хартли [1].  $\mathfrak{F}$ -инъектор группы  $G$ , где  $\mathfrak{F}$  — непустой класс групп, представляет собой такую ее подгруппу, пересечение которой с любой субнормальной подгруппой  $K$  группы  $G$  является  $\mathfrak{F}$ -максимальной подгруппой в  $K$ .

Понятие  $\mathfrak{F}$ -инъектора является естественным обобщением понятия силовой (холловой) подгруппы группы, а именно силовая  $p$ -подгруппа (холлова  $\pi$ -подгруппа) группы  $G$  — это в точности  $\mathfrak{N}_p$ -инъектор ( $\mathfrak{G}_\pi$ -инъектор) в  $G$  (см., например, [2, p. 68]), где  $\mathfrak{N}_p$  и  $\mathfrak{G}_\pi$  — классы всех  $p$ -групп и всех  $\pi$ -групп соответственно ( $p$  — простое число,  $\pi$  — непустое множество простых чисел). Ключевые свойства  $\mathfrak{F}$ -инъекторов групп для произвольного класса Фиттинга  $\mathfrak{F}$  изложены в [3, Ch. IX] и [4, Ch. 7]. Исследованию  $\mathfrak{F}$ -инъекторов в группах для различных классов групп  $\mathfrak{F}$  посвящены работы Б. Хартли, Дж. Косси, П. Ферстера, Л. А. Шеметкова, Н. Т. Воробьева, В. Го и многих других алгебраистов (например, [5–7]).

Понятие  $\mathfrak{F}$ -инъектора является двойственным к понятию  $\mathfrak{F}$ -проектора группы, введенному в рассмотрение В. Гашюцем в 1969 г. [8]. Данное понятие также является обобщением понятий силовой и холловой подгрупп, но наследует другое их свойство.  $\mathfrak{F}$ -проектор группы  $G$  представляет такую  $\mathfrak{F}$ -подгруппу  $H$  из  $G$ , что фактор-группа  $HN/N$  является  $\mathfrak{F}$ -максимальной в  $G/N$  для любой нормальной подгруппы  $N$  из  $G$ . Многие важные свойства  $\mathfrak{F}$ -проекторов в группах были установлены для случая, когда класс  $\mathfrak{F}$  является локальной формацией (см., например, [9, гл. IV]). Обобщением понятия локальной формации является введенное в рассмотрение в [10] понятие  $\omega$ -локальной формации, где  $\omega$  — непустое множество простых чисел.

В работе [11] в качестве естественного обобщения понятия  $\mathfrak{F}$ -проектора были определены



$\mathfrak{F}^\omega$ -проекторы групп и установлены их свойства (существование, сопряженность, вложение в другие подгруппы) для случая, когда  $\mathfrak{F}$  является  $\omega$ -локальной формацией. Следуя подходу к определению  $\mathfrak{F}^\omega$ -проектора из работы [11], в [12] было введено в рассмотрение понятие  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектора группы и установлены некоторые простейшие свойства таких подгрупп. Настоящая работа посвящена исследованию свойств  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъекторов в разрешимых группах.

Развивая фундаментальные теоремы Силова и Холла (см., например, [3, Ch. A, Eq. (6.2); Ch. I, Eq. (3.3)]), в [1] было доказано существование и сопряженность  $\mathfrak{F}$ -инъекторов в разрешимых группах для класса Фиттинга  $\mathfrak{F}$ , содержащегося в универсуме всех разрешимых групп (см. также [3, Ch. IX, Eq. (1.4)]). В дальнейшем Л. А. Шеметков и, независимо, В. Го для произвольного класса Фиттинга  $\mathfrak{F}$  доказали существование и сопряженность  $\mathfrak{F}$ -инъекторов в группе  $G$  с  $\pi$ -разрешимой фактор-группой  $G/G_{\mathfrak{F}}$  [13, 14] (здесь  $G_{\mathfrak{F}}$  — наибольшая нормальная подгруппа группы  $G$ , принадлежащая классу  $\mathfrak{F}$ ,  $\pi$  — совокупность всех простых делителей порядков всех групп из  $\mathfrak{F}$ ). Исследованию вопросов существования и сопряженности  $\mathfrak{F}$ -инъекторов в неразрешимых группах посвящен ряд статей Н. Т. Воробьева и других авторов (например, [15, 16]).

В настоящей работе для класса Фиттинга  $\mathfrak{F}$  и произвольного непустого множества  $\omega$  простых чисел установлены условия существования и сопряженности  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъекторов в разрешимых группах (теорема 1) и получены критерии  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектора разрешимой группы (теоремы 2–4). В случае, когда  $\omega$  совпадает с множеством всех простых чисел, из данных теорем в качестве следствий вытекают известные результаты о  $\mathfrak{F}$ -инъекторах разрешимых групп.

## 1. Предварительные сведения

Используемые определения и обозначения для групп и классов групп стандартны (см., например, [3, 17]). Приведем лишь некоторые из них. В дальнейшем, символ  $:=$  означает равенство по определению. Запись  $H \leq G$  ( $H < G$ ,  $H \triangleleft G$ ,  $H \triangleleft\triangleleft G$ ) означает, что  $H$  — подгруппа (соответственно собственная, нормальная, субнормальная подгруппы) группы  $G$ ;  $H \times K$  — прямое произведение подгрупп  $H$  и  $K$  группы  $G$ ;  $H \rtimes K$  — полупрямое произведение  $H$  и  $K$ , где  $H \triangleleft G$ ,  $K \leq G$ ;  $1$  — единичная подгруппа (группа);  $G'$  — коммутант группы  $G$ ;  $d(G)$  — степень разрешимости группы  $G$ , т.е. наименьшее натуральное число  $n$ , для которого  $G^{(n)} = 1$ , где  $G^{(n)}$  —  $n$ -й коммутант группы  $G$ ;  $C_n$  — циклическая группа порядка  $n$ ,  $D_n$  — диэдральная группа порядка  $n$ ,  $S_n$  — симметрическая группа степени  $n$ ,  $SL(n, q)$  — специальная линейная группа степени  $n$  над полем из  $q$  элементов.

Пусть  $\mathbb{P}$  — множество всех простых чисел,  $\pi$  — подмножество множества  $\mathbb{P}$ ;  $\pi(G)$  — множество всех простых делителей порядка группы  $G$ . Группа  $G$  называется  $\pi$ -группой ( $\pi'$ -группой,  $\pi d$ -группой), если  $\pi(G) \subseteq \pi$  (соответственно  $\pi(G) \cap \pi = \emptyset$ ,  $\pi(G) \cap \pi \neq \emptyset$ ). Пусть  $\mathfrak{X}$  — непустое множество групп. Тогда  $\pi(\mathfrak{X})$  — объединение множеств  $\pi(G)$  для всех  $G \in \mathfrak{X}$  [9, с. 250].

*Классом групп* называется совокупность групп, содержащая с каждой своей группой и все группы, ей изоморфные. Через  $\mathfrak{G}$  обозначается класс всех конечных групп;  $\mathfrak{A}$  — класс всех конечных абелевых групп;  $\mathfrak{N}$  — класс всех конечных нильпотентных групп;  $\mathfrak{U}$  — класс всех конечных сверхразрешимых групп. *Характеристикой* класса групп  $\mathfrak{F}$  называется множество  $\chi(\mathfrak{F}) = \{ p \in \mathbb{P} \mid \text{в } \mathfrak{F} \text{ существует неединичная } p\text{-группа} \}$  [17, с. 165]. Класс групп  $\mathfrak{F}$  называется *классом Фиттинга*, если выполняются следующие два условия: 1) из  $G \in \mathfrak{F}$  и  $N \triangleleft G$  следует, что  $N \in \mathfrak{F}$  (т.е.  $\mathfrak{F}$  — нормально наследственный класс групп); 2) из  $G = N_1 N_2$ ,  $N_1 \triangleleft G$ ,  $N_2 \triangleleft G$ ,  $N_1, N_2 \in \mathfrak{F}$  следует, что  $G \in \mathfrak{F}$  [9, с. 14].

Пусть  $\mathfrak{F}$  — класс групп. Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется  *$\mathfrak{F}$ -максимальной подгруппой* в  $G$ , если  $H \in \mathfrak{F}$  и из  $H \leq K \leq G$  и  $K \in \mathfrak{F}$  следует, что  $H = K$ . Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется  *$\mathfrak{F}$ -инъектором* группы  $G$ , если для каждой субнормальной подгруппы  $K$  группы  $G$  пересечение  $H \cap K$  является  $\mathfrak{F}$ -максимальной подгруппой в  $K$  ([1, см. также [3, Ch. IX, Eq. (1.2)]).



В следующей лемме представлены используемые далее свойства  $\mathfrak{F}$ -максимальных подгрупп.

**Лемма 1.** 1. Пусть  $\mathfrak{F}$  — класс групп и  $\alpha$  — автоморфизм группы  $G$ . Если  $V$  является  $\mathfrak{F}$ -максимальной подгруппой группы  $G$ , то  $V^\alpha$  является  $\mathfrak{F}$ -максимальной подгруппой в  $G$  [18, гл. 3, лемма 2.6 (б)].

2. Пусть  $\mathfrak{F}$  — класс Фиттинга,  $G$  — разрешимая группа,  $N$  — нормальная подгруппа группы  $G$  с абелевой фактор-группой  $G/N$ . Пусть  $W$  —  $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа из  $N$  и  $V_1, V_2$  —  $\mathfrak{F}$ -максимальные подгруппы группы  $G$ , содержащие  $W$ . Тогда  $V_1$  и  $V_2$  сопряжены в  $G$  ([1], см. также [17, лемма 5.44]).

3. Пусть  $\mathfrak{F}$  — класс Фиттинга и  $G$  — нильпотентная группа. Подгруппа  $H$  группы  $G$  является  $\mathfrak{F}$ -максимальной в  $G$  тогда и только тогда, когда  $H$  —  $\chi(\mathfrak{F})$ -холлова подгруппа в  $G$  [17, теорема 5.47].

## 2. Определение, примеры, простейшие свойства $\mathfrak{F}^\omega$ -инъекторов

**Определение 1.** Пусть  $\mathfrak{F}$  — непустой класс групп,  $\omega$  — непустое множество простых чисел. Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектором группы  $G$ , если  $H$  —  $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа в  $G$  и для каждой субнормальной  $\omega$ -подгруппы  $K$  группы  $G$  пересечение  $H \cap K$  является  $\mathfrak{F}$ -максимальной подгруппой в  $K$ .

**Замечание 1.** Из определения 1 непосредственно следует, что всякий  $\mathfrak{F}$ -инъектор группы является ее  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектором для любого непустого множества  $\omega$ ; обратное неверно. В случае, когда  $\omega$  совпадает с множеством всех простых чисел, понятие  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектора совпадает с понятием  $\mathfrak{F}$ -инъектора группы.

**Пример 1.** Пусть  $\omega$  — непустое множество простых чисел, удовлетворяющее условию  $2 \notin \omega$ ,  $G = \mathbb{S}_4$  и  $H \cong C_3$  — силовская 3-подгруппа группы  $G$ . Подгруппа  $H$  является  $\mathfrak{N}$ -максимальной в  $G$ , но пересечение  $H$  с субнормальной подгруппой  $K \cong C_2 \times C_2$  группы  $G$  совпадает с единичной подгруппой, которая не является  $\mathfrak{N}$ -максимальной в  $K$ . Следовательно,  $H$  не является  $\mathfrak{N}$ -инъектором в  $G$ . Единственной субнормальной  $\omega$ -подгруппой группы  $G$  является ее единичная подгруппа, поэтому  $H$  является  $\mathfrak{N}^\omega$ -инъектором в группе  $G$ .

**Пример 2.** Пусть  $\omega$  — множество простых чисел, удовлетворяющее условию  $2 \in \omega$ ,  $3 \notin \omega$ ,  $G = \mathbb{S}_3 \times C_4$  (см. [19],  $\text{IdGroup}(G) = [24, 5]$ ). В группе  $G$  имеется подгруппа  $H \cong C_2 \times C_4$ , являющаяся  $\mathfrak{N}$ -максимальной в  $G$ , причем пересечение  $H$  с субнормальной подгруппой  $K \cong C_3$  совпадает с единичной подгруппой, которая не является  $\mathfrak{N}$ -максимальной в  $K$ . Следовательно, подгруппа  $H$  не является  $\mathfrak{N}$ -инъектором в  $G$ . Субнормальными  $\omega$ -подгруппами группы  $G$  являются только следующие три подгруппы:  $K_1 = 1$ ,  $K_2 \cong C_2$  и  $K_3 \cong C_4$ . Поскольку  $H \cap K_i = K_i$  —  $\mathfrak{N}$ -максимальная подгруппа в  $K_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , то  $H$  является  $\mathfrak{N}^\omega$ -инъектором в  $G$ .

**Пример 3.** Пусть  $\omega$  — множество простых чисел, удовлетворяющее условию  $\{2, 7\} \subseteq \omega$  и  $3 \notin \omega$ ,  $G = \mathbb{S}_3 \times D_{14}$  (см. [19],  $\text{IdGroup}(G) = [84, 8]$ ),  $H$  — циклическая подгруппа группы  $G$  порядка 14. Тогда  $H$   $\mathfrak{N}$ -максимальна в  $G$ , но не является  $\mathfrak{N}$ -инъектором в  $G$ . Действительно, пересечение  $H$  с субнормальной подгруппой  $K \cong C_{21}$  из  $G$  есть циклическая подгруппа порядка 7, которая не является  $\mathfrak{N}$ -максимальной в  $K$ . Субнормальными  $\omega$ -подгруппами в  $G$  являются только три подгруппы:  $K_1 = 1$ ,  $K_2 \cong C_7$ ,  $K_3 \cong D_{14}$ . Поскольку  $H \cap K_1 = K_1$  —  $\mathfrak{N}$ -максимальная подгруппа в  $K_1$ ,  $H \cap K_2 = K_2$  —  $\mathfrak{N}$ -максимальная подгруппа в  $K_2$  и  $H \cap K_3 = K_2$  —  $\mathfrak{N}$ -максимальная подгруппа в  $K_3$ , то  $H$  является  $\mathfrak{N}^\omega$ -инъектором в  $G$ .

**Пример 4.** Пусть  $\omega$  — множество простых чисел, удовлетворяющее условию  $\{3, 5\} \subseteq \omega$  и  $2 \notin \omega$ ,  $G = (LC_2) \times C_5$ , где  $L \cong SL(2, 3)$  (см. [19],  $\text{IdGroup}(G) = [240, 102]$ ). В группе  $G$  имеется подгруппа  $H \cong (C_3 \times C_4) \times C_5$ , являющаяся  $\mathfrak{U}$ -максимальной в  $G$ , причем пересечение  $H$



с субнормальной подгруппой  $K \cong Q_8 \times C_5$  ( $Q_8$  — группа кватернионов порядка 8) совпадает с подгруппой, изоморфной  $C_{10}$ , которая не является  $\mathfrak{U}$ -максимальной в  $K$ . Следовательно, подгруппа  $H$  не является  $\mathfrak{U}$ -инъектором в  $G$ . Субнормальными  $\omega$ -подгруппами группы  $G$  являются только следующие две подгруппы:  $K_1 = 1$  и  $K_2 \cong C_5$ . Поскольку  $H \cap K_i = K_i$  —  $\mathfrak{U}$ -максимальная подгруппа в  $K_i$ ,  $i = 1, 2$ , то  $H$  является  $\mathfrak{U}^\omega$ -инъектором в  $G$ .

**Пример 5.** Пусть  $\omega$  — произвольное непустое множество простых чисел,  $G$  — такая группа, что  $\pi(G) \cap \omega = \emptyset$ ,  $\mathfrak{F}$  — произвольный непустой класс групп,  $H$  —  $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа группы  $G$ . Поскольку единственной субнормальной  $\omega$ -подгруппой группы  $G$  является ее единичная подгруппа и  $H \cap 1 = 1$  —  $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа в единичной подгруппе, то  $H$  является  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектором в  $G$ . Таким образом, для любого непустого класса групп  $\mathfrak{F}$  и любого непустого множества  $\omega$  в каждой  $\omega'$ -группе любая  $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа является ее  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектором.

Рассмотрим простейшие свойства  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъекторов, используемые в дальнейшем.

**Лемма 2.** Пусть  $\mathfrak{F}$  — непустой класс групп,  $\omega$  — непустое множество простых чисел,  $G$  — группа. Если  $H$  —  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектор группы  $G$ ,  $K$  — субнормальная  $\omega$ -подгруппа группы  $G$ , то  $H \cap K$  является  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектором в  $K$ .

**Доказательство.** Пусть  $H$  —  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектор в  $G$ ,  $K \triangleleft\triangleleft G$ ,  $\pi(K) \subseteq \omega$ ,  $H_1 := H \cap K$ . Установим, что  $H_1$  является  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектором в  $K$ . Согласно определению 1  $H_1$  является  $\mathfrak{F}$ -максимальной подгруппой в  $K$ .

Пусть  $N$  — субнормальная  $\omega$ -подгруппа группы  $K$ . Покажем, что  $H_1 \cap N$  —  $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа в  $N$ . Так как  $N \triangleleft\triangleleft K$  и  $K \triangleleft\triangleleft G$ , то  $N \triangleleft\triangleleft G$  и по определению 1  $H \cap N$  —  $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа в  $N$ . Ввиду равенств  $H_1 \cap N = H \cap K \cap N = H \cap N$  это означает, что  $H_1 \cap N$  является  $\mathfrak{F}$ -максимальной подгруппой в  $N$ . Следовательно, по определению 1  $H_1$  —  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектор в  $K$ .  $\square$

**Лемма 3.** Пусть  $\mathfrak{F}$  — непустой класс групп,  $\omega$  — непустое множество простых чисел,  $G$  — группа. Если  $L$  — нормальная подгруппа группы  $G$  и  $H$  —  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектор в  $L$ , то  $H^g$  является  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектором в  $L$  для любого  $g \in G$ . В частности, если  $H$  —  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектор группы  $G$ , то  $H^g$  является  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектором в  $G$  для любого  $g \in G$ .

**Доказательство.** Пусть  $L \triangleleft G$ ,  $H$  —  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектор в  $L$  и  $g \in G$ . Покажем, что  $H^g$  является  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектором в  $L$ .

Проверим, что  $H^g$  —  $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа в  $L$ . Действительно, так как  $H \in \mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{F}$  — класс групп, то  $H^g \in \mathfrak{F}$ . Пусть  $H^g \leq M \leq L$ , где  $M \in \mathfrak{F}$ . Тогда  $M^{g^{-1}} \in \mathfrak{F}$  и  $H \leq M^{g^{-1}} \leq L^{g^{-1}} = L$ . Поскольку  $H$  —  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектор в  $L$ , то по определению 1  $H$  —  $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа в  $L$  и поэтому  $H = M^{g^{-1}}$ . Следовательно,  $H^g = M$ . Тем самым доказано, что  $H^g$  является  $\mathfrak{F}$ -максимальной подгруппой в  $L$ .

Пусть  $K$  — субнормальная  $\omega$ -подгруппа группы  $L$ . Покажем, что пересечение  $H^g \cap K$  является  $\mathfrak{F}$ -максимальной подгруппой в  $K$ . Пусть  $H^g \cap K \leq R \leq K$ , где  $R \in \mathfrak{F}$ . Установим, что  $H^g \cap K = R$ . Пусть  $K_1 := K^{g^{-1}}$  и  $R_1 := R^{g^{-1}}$ . Тогда

$$(H \cap K_1)^g = H^g \cap K_1^g = H^g \cap K \subseteq R = R_1^g \subseteq K_1^g.$$

Следовательно,  $H \cap K_1 \subseteq R_1 \subseteq K_1$ . Так как  $K_1$  является субнормальной  $\omega$ -подгруппой в  $L$  и  $H$  —  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектор в  $L$ , то по определению 1  $H \cap K_1$  —  $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа в  $K_1$ . Тогда с учетом того, что  $R_1 \in \mathfrak{F}$ , получаем равенство  $H \cap K_1 = R_1$ . Поэтому  $(H \cap K_1)^g = R_1^g$  и, значит,  $H^g \cap K = R$ . Следовательно,  $H^g \cap K$  —  $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа в  $K$ . Тем самым установлено, что  $H^g$  является  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектором в  $L$  для любого  $g \in G$ .  $\square$

**Лемма 4.** Пусть  $\mathfrak{F}$  — непустой класс групп,  $\omega$  — непустое множество простых чисел,  $G$  — группа. Если  $H$  —  $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа группы  $G$  и  $H \cap L$  —  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектор в  $L$  для любой максимальной нормальной  $\omega d$ -подгруппы  $L$  группы  $G$ , то  $H$  является  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектором в  $G$ .

**Доказательство.** Пусть  $H$  —  $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа группы  $G$  и для любой максимальной нормальной  $\omega d$ -подгруппы  $L$  группы  $G$  пересечение  $H \cap L$  является  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектором в  $L$ . Установим, что  $H$  является  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектором в  $G$ .

Пусть  $N$  — субнормальная  $\omega$ -подгруппа группы  $G$ . Покажем, что подгруппа  $H \cap N$  является  $\mathfrak{F}$ -максимальной в  $N$ . Если  $N = G$ , то по условию  $H \cap N = H$  —  $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа в  $N$ .

Пусть  $N < G$ . Тогда в  $G$  существует максимальная нормальная подгруппа  $L_1$ , содержащая  $N$ . Это означает, что  $L_1$  —  $\omega d$ -подгруппа группы  $G$ . Согласно условию подгруппа  $H_1 := H \cap L_1$  является  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектором в  $L_1$ . Так как  $N \triangleleft \triangleleft G$ , то по свойству субнормальных подгрупп  $N \cap L_1 = N$  — субнормальная  $\omega$ -подгруппа в  $L_1$ . Тогда по определению 1  $H_1 \cap N$  является  $\mathfrak{F}$ -максимальной подгруппой в  $N$ . С учетом равенства  $H_1 \cap N = H \cap N$  заключаем, что  $H \cap N$  —  $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа в  $N$ . Отсюда согласно определению 1 следует, что  $H$  является  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектором в  $G$ .  $\square$

### 3. Существование и сопряженность $\mathfrak{F}^\omega$ -инъекторов

**Теорема 1.** Пусть  $\mathfrak{F}$  — непустой класс Фиттинга,  $\omega$  — непустое множество простых чисел. Тогда в каждой разрешимой группе  $G$ , удовлетворяющей условию  $\pi(G') \subseteq \omega$ , существует по крайней мере один  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектор и любые два  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектора группы  $G$  сопряжены в  $G$ .

**Доказательство.** Пусть  $G$  — разрешимая группа и  $\pi(G') \subseteq \omega$ . Докажем теорему индукцией по порядку группы  $G$ . Если  $G = 1$ , то  $G$  является  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектором в  $G$ , и утверждение верно. Пусть  $G \neq 1$ . Тогда по свойству разрешимых групп группа  $G$  отлична от своего коммутанта  $G'$ . Покажем, что  $G'$  удовлетворяет условию теоремы. Действительно, из разрешимости группы  $G$  следует разрешимость  $G'$ . Поскольку  $(G')' \leq G'$ , то  $(G')'$  является  $\omega$ -группой. Так как  $|G'| < |G|$ , то по индукции для  $G'$  утверждение верно, т.е.

$$\begin{aligned} & \text{в } G' \text{ существует по крайней мере один } \mathfrak{F}^\omega\text{-инъектор,} \\ & \text{и любые два } \mathfrak{F}^\omega\text{-инъектора из } G' \text{ сопряжены в } G'. \end{aligned} \tag{1}$$

Пусть  $K$  —  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектор группы  $G'$ . Тогда согласно определению 1  $K$  —  $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа в  $G'$ . В частности,  $K \in \mathfrak{F}$ , и поэтому в  $G$  существует  $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа  $H$ , содержащая  $K$ . Установим, что  $H$  является  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектором в  $G$ .

Пусть  $L$  — произвольная максимальная нормальная подгруппа группы  $G$ . Докажем, что  $H \cap L$  является  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектором в  $L$ . Так как  $L' \leq G'$ , то  $\pi(L') \subseteq \omega$  и, следовательно, по индукции для  $L$  утверждение верно.

Пусть  $R$  —  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектор группы  $L$ . Так как  $G/L$  — абелева группа, то  $G' \subseteq L$  и согласно лемме 2  $R \cap G'$  является  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектором в  $G'$ . Ввиду (1) подгруппы  $R \cap G'$  и  $K$  сопряжены в  $G'$ , т.е. существует такой элемент  $x \in G'$ , что  $(R \cap G')^x = K$ . Так как  $R \in \mathfrak{F}$ , то  $R^x \in \mathfrak{F}$ , и поэтому в группе  $G$  существует  $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа  $T$  такая, что  $R^x \subseteq T$ . Из  $K = R^x \cap G' \subseteq R^x$  получаем, что  $K \subseteq T$ .

Поскольку  $H$  и  $T$  —  $\mathfrak{F}$ -максимальные подгруппы в  $G$ , содержащие  $K$ , и  $K$  —  $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа в  $G'$ , то согласно п. 2 леммы 1  $H$  и  $T$  сопряжены в  $G$ , т.е.  $H = T^y$  для некоторого элемента  $y \in G$ .

Так как  $R$  —  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектор в  $L$ , то по лемме 3  $R^x$  является  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектором в  $L$ . Следовательно,  $R^x$  —  $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа в  $L$ . Поскольку  $T \cap L \triangleleft T$ ,  $T \in \mathfrak{F}$  и класс  $\mathfrak{F}$  нормально наследственен, то  $T \cap L \in \mathfrak{F}$ . Тогда из  $R^x \subseteq T \cap L \subseteq L$  следует, что  $R^x = T \cap L$  и, значит,  $(R^x)^y = (T \cap L)^y = T^y \cap L = H \cap L$ . По лемме 3  $(R^x)^y$  является  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектором в  $L$ . Тем самым доказано, что  $H \cap L$  —  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектор в  $L$ .

Итак,  $H$  —  $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа группы  $G$ , и нами установлено, что для любой максимальной нормальной подгруппы  $L$  группы  $G$  пересечение  $H \cap L$  является  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектором в  $L$ . Тогда по лемме 4  $H$  является  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектором группы  $G$ .



Покажем, что любые два  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектора группы  $G$  сопряжены в  $G$ . Пусть  $H_1$  и  $H_2$  —  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъекторы группы  $G$ . По лемме 2  $H_1 \cap G'$  и  $H_2 \cap G'$  являются  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъекторами в  $G'$ . В силу (1) подгруппы  $K$  и  $H_1 \cap G'$  сопряжены в  $G'$ , т.е.  $K = (H_1 \cap G')^{g_1}$  для некоторого элемента  $g_1 \in G'$ . Поэтому  $K \subseteq H_1^{g_1}$ . Аналогично  $K \subseteq H_2^{g_2}$  для некоторого элемента  $g_2 \in G'$ . Ввиду п. 1 леммы 1  $H_1^{g_1}$  и  $H_2^{g_2}$  —  $\mathfrak{F}$ -максимальные подгруппы в  $G$ . Тогда согласно п. 2 леммы 1  $H_1^{g_1}$  и  $H_2^{g_2}$  сопряжены в  $G$  и, следовательно,  $H_1$  и  $H_2$  сопряжены в  $G$ .  $\square$

В случае, когда  $\omega = \mathbb{P}$ , из теоремы 1 вытекает следующий известный результат.

**Следствие 1** ([1], см. также [17, теорема 5.45]). *Пусть  $\mathfrak{F}$  — непустой класс Фиттинга. Тогда в каждой разрешимой группе  $G$  существует по крайней мере один  $\mathfrak{F}$ -инъектор и любые два  $\mathfrak{F}$ -инъектора группы  $G$  сопряжены в  $G$ .*

**Замечание 2.** Для произвольного класса Фиттинга  $\mathfrak{F}$ , ввиду замечания 1, из факта существования  $\mathfrak{F}$ -инъекторов в разрешимых группах формально следует существование  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъекторов в разрешимых группах (поскольку всякий  $\mathfrak{F}$ -инъектор группы является ее  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектором для любого множества  $\omega$ ). В этой связи ценность теоремы 1 заключается, прежде всего, в установлении факта сопряженности  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъекторов в разрешимых группах.

#### 4. Критерии $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектора разрешимой группы

Используя теорему 1, для непустого класса Фиттинга  $\mathfrak{F}$  установим необходимые и достаточные условия, при которых подгруппа  $H$  разрешимой группы  $G$  является  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектором в  $G$ .

**Теорема 2.** *Пусть  $\mathfrak{F}$  — непустой класс Фиттинга,  $\omega$  — непустое множество простых чисел,  $G$  — разрешимая группа, удовлетворяющая условию  $\pi(G') \subseteq \omega$ . Подгруппа  $H$  группы  $G$  является  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектором в  $G$  тогда и только тогда, когда  $H$  —  $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа группы  $G$  и  $H \cap G' — \mathfrak{F}^\omega$ -инъектор в  $G'$ .*

**Доказательство.** *Достаточность.* Пусть  $H$  —  $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа группы  $G$  и  $H_1 := H \cap G' — \mathfrak{F}^\omega$ -инъектор в  $G'$ . Докажем, что  $H$  является  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектором в  $G$ . Так как  $G$  — разрешимая группа и  $\pi(G') \subseteq \omega$ , то по теореме 1 в  $G$  существует по крайней мере один  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектор. Пусть  $K — \mathfrak{F}^\omega$ -инъектор группы  $G$ . Тогда по лемме 2  $K_1 := K \cap G'$  является  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектором в  $G'$ . Поскольку  $\pi((G')') \subseteq \omega$ , то по теореме 1 подгруппы  $H_1$  и  $K_1$  сопряжены в  $G'$ , т.е. существует элемент  $g \in G'$  такой, что  $H_1 = (K_1)^g = K^g \cap G'$ . Таким образом,  $H_1 \subseteq H$  и  $H_1 \subseteq K^g$ .

Согласно определению 1 подгруппа  $H_1$  является  $\mathfrak{F}$ -максимальной в  $G'$ . Аналогично  $K — \mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа в  $G$  и п. 1 леммы 1 подгруппа  $K^g$  также является  $\mathfrak{F}$ -максимальной в  $G$ . Тогда в силу п. 2 леммы 1  $H$  и  $K^g$  сопряжены в  $G$ , т.е.  $H = (K^g)^x$  для некоторого элемента  $x \in G$ . Так как  $K — \mathfrak{F}^\omega$ -инъектор в  $G$ , то с учетом леммы 3 подгруппа  $H$  также является  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектором группы  $G$ .

*Необходимость.* Пусть  $H — \mathfrak{F}^\omega$ -инъектор группы  $G$ . Тогда по определению 1  $H — \mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа в  $G$ . Так как  $G' —$  субнормальная  $\omega$ -подгруппа в  $G$ , то по лемме 2 пересечение  $H \cap G'$  является  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектором в  $G'$ .  $\square$

**Следствие 2** ([17, теорема 5.46]). *Пусть  $\mathfrak{F}$  — непустой класс Фиттинга,  $G$  — разрешимая группа. Подгруппа  $H$  группы  $G$  является  $\mathfrak{F}$ -инъектором в  $G$  тогда и только тогда, когда  $H — \mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа группы  $G$  и  $H \cap G' — \mathfrak{F}$ -инъектор в  $G'$ .*

**Теорема 3.** *Пусть  $\mathfrak{F}$  — непустой класс Фиттинга,  $\omega$  — непустое множество простых чисел,  $1 = G_n \triangleleft G_{n-1} \triangleleft \dots \triangleleft G_1 \triangleleft G_0 = G$  — ряд группы  $G$  с абелевыми факторами и  $\pi(G_1) \subseteq \omega$ . Подгруппа  $H$  группы  $G$  является  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектором в  $G$  тогда и только тогда, когда  $H \cap G_i — \mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа в  $G_i$  для всех  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ .*



**Доказательство.** *Достаточность.* Пусть  $H \cap G_i$  —  $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа в  $G_i$  для любого  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Тогда  $H \cap G_0 = H$  —  $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа в  $G$ . Индукцией по порядку группы  $G$  докажем, что  $H$  является  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектором группы  $G$ . Если  $G = 1$ , то  $H = G$  —  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектор группы  $G$ . Пусть  $G \neq 1$ . Можем считать, что  $G_i \neq G_{i-1}$  для любого  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Покажем, что подгруппа  $G_1$  удовлетворяет условию теоремы. Действительно,  $1 = G_n \triangleleft G_{n-1} \triangleleft \dots \triangleleft G_2 \triangleleft G_1$  — ряд группы  $G_1$  с абелевыми факторами. Из  $\pi(G_1) \subseteq \omega$  следует, что  $\pi(G_2) \subseteq \omega$ . Пусть  $H_1 := H \cap G_1$ . Покажем, что  $H_1 \cap G_i$  —  $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа в  $G_i$  для любого  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Пусть  $1 \leq i \leq n$ . Тогда  $H_1 \cap G_i = H \cap G_1 \cap G_i = H \cap G_i$  —  $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа в  $G_i$  по условию. Таким образом, группа  $G_1$  удовлетворяет условию теоремы. Следовательно, по индукции  $H_1$  является  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектором в  $G_1$ .

Так как  $G/G_1$  — абелева группа, то  $G' \subseteq G_1$ . Тогда  $G'$  — субнормальная  $\omega$ -подгруппа в  $G_1$  и по лемме 2  $H_1 \cap G'$  —  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектор в  $G'$ . Отсюда с учетом равенства  $H_1 \cap G' = H \cap G'$  по теореме 2 получаем, что  $H$  является  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектором группы  $G$ .

*Необходимость.* Пусть  $H$  —  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектор группы  $G$ . Тогда согласно определению 1  $H = H \cap G_0$  —  $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа в  $G_0$ . Пусть  $1 \leq i \leq n$ . Так как  $G_i$  — субнормальная  $\omega$ -подгруппа группы  $G$ , то по определению 1  $H \cap G_i$  является  $\mathfrak{F}$ -максимальной подгруппой в  $G_i$ .  $\square$

**Следствие 3** ([17, следствие 1 теоремы 5.46]). Пусть  $\mathfrak{F}$  — класс Фиттинга и  $1 = G_n \triangleleft G_{n-1} \triangleleft \dots \triangleleft G_1 \triangleleft G_0 = G$  — ряд группы  $G$  с абелевыми факторами  $G_i/G_{i+1}$ . Подгруппа  $H$  является  $\mathfrak{F}$ -инъектором группы  $G$  тогда и только тогда, когда  $H \cap G_i$  —  $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа в  $G_i$  для всех  $i$ .

**Следствие 4.** Пусть  $\mathfrak{F}$  — непустой класс Фиттинга,  $\omega$  — непустое множество простых чисел,  $G$  — разрешимая группа, удовлетворяющая условию  $\pi(G') \subseteq \omega$ . Если  $H$  —  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектор группы  $G$  и  $H \leq K \leq G$ , то  $H$  является  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектором в подгруппе  $K$ .

**Доказательство.** Пусть  $H$  —  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектор группы  $G$  и  $H \leq K \leq G$ . Установим, что  $H$  является  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектором в  $K$ . Пусть  $d(G) = n$ ,  $G_0 = G$  и  $G_i := G^{(i)}$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Тогда  $1 = G_n \triangleleft G_{n-1} \triangleleft \dots \triangleleft G_1 \triangleleft G_0 = G$  — ряд группы  $G$  с абелевыми факторами. Пусть  $K_i := K \cap G_i$ ,  $i = \overline{0, n}$ . Тогда  $K_i \triangleleft K_{i-1}$  и

$$K_{i-1}/K_i = (K \cap G_{i-1})/(K \cap G_i) \cong (K \cap G_{i-1})G_i/G_i \leq G_{i-1}/G_i$$

для любого  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Поэтому  $1 = K_n \triangleleft K_{n-1} \triangleleft \dots \triangleleft K_1 \triangleleft K_0 = K$  — ряд группы  $K$  с абелевыми факторами. Так как  $K_1 \leq G_1 = G'$ , то  $\pi(K_1) \subseteq \omega$ .

Покажем, что  $H \cap K_i$  —  $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа в  $K_i$  для всех  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Поскольку  $H$  —  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектор группы  $G$ , то  $H$  является  $\mathfrak{F}$ -максимальной подгруппой в  $G$ . Отсюда с учетом условия  $H \leq K \leq G$  следует, что  $H = H \cap K_0$  —  $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа в  $K = K_0$ .

Пусть  $i \in \{1, \dots, n\}$  и  $H \cap K_i \leq M_i \leq K_i$ , где  $M_i \in \mathfrak{F}$ . Так как  $G_i$  — субнормальная  $\omega$ -подгруппа группы  $G$ , то по определению 1  $H \cap K_i = H \cap K \cap G_i = H \cap G_i$  —  $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа группы  $G_i$ . Из  $H \cap K_i \leq M_i \leq G_i$  получаем, что  $H \cap K_i = M_i$ . Следовательно,  $H \cap K_i$  является  $\mathfrak{F}$ -максимальной подгруппой в  $K_i$ . Тогда по теореме 3  $H$  является  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектором группы  $K$ .  $\square$

**Следствие 5** ([17, следствие 3 теоремы 5.46]). Пусть  $\mathfrak{F}$  — непустой класс Фиттинга,  $G$  — разрешимая группа. Если  $H$  —  $\mathfrak{F}$ -инъектор группы  $G$  и  $H \leq K \leq G$ , то  $H$  является  $\mathfrak{F}$ -инъектором в подгруппе  $K$ .

**Теорема 4.** Пусть  $\mathfrak{F}$  — непустой класс Фиттинга,  $\omega$  — непустое множество простых чисел,  $G$  — группа с нильпотентным коммутантом  $G'$ , удовлетворяющая условию  $\pi(G') \subseteq \omega$ . Подгруппа  $H$  группы  $G$  является  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектором в  $G$  тогда и только тогда, когда  $H$  —  $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа группы  $G$ , которая содержит  $\chi(\mathfrak{F})$ -холлову подгруппу из  $G'$ .



**Доказательство. Необходимость.** Пусть  $H$  —  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектор группы  $G$ . Тогда согласно определению 1  $H$  —  $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа в  $G$ .

Покажем, что  $H$  содержит  $\chi(\mathfrak{F})$ -холлову подгруппу из  $G'$ . Так как  $\pi(G') \subseteq \omega$ , то по лемме 2 подгруппа  $H_1 := H \cap G'$  является  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектором в  $G'$  и, значит,  $H_1$  —  $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа в  $G'$ . Поскольку  $G' \in \mathfrak{N}$ , то согласно п. 3 леммы 1  $H_1$  —  $\chi(\mathfrak{F})$ -холлова подгруппа в  $G'$ . Таким образом,  $H$  содержит  $\chi(\mathfrak{F})$ -холлову подгруппу из  $G'$ .

**Достаточность.** Пусть  $H$  —  $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа группы  $G$ , которая содержит  $\chi(\mathfrak{F})$ -холлову подгруппу группы  $G'$ . Покажем, что  $H$  является  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектором в  $G$ .

Так как  $G$  — разрешимая группа и  $\pi(G') \subseteq \omega$ , то по теореме 1  $G$  обладает  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектором  $K$ . Согласно лемме 2  $K_1 := K \cap G'$  является  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектором в  $G'$  и, значит,  $K_1$  —  $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа в  $G'$ . Тогда в силу п. 3 леммы 1  $K_1$  —  $\chi(\mathfrak{F})$ -холлова подгруппа группы  $G'$ . Так как  $G' \in \mathfrak{N}$ , то  $K_1$  — единственная  $\chi(\mathfrak{F})$ -холлова подгруппа в  $G'$  и по условию  $K_1 \subseteq H$ .

Так как  $H$  и  $K$  —  $\mathfrak{F}$ -максимальные подгруппы в  $G$ , содержащие  $K_1$ , то согласно п. 2 леммы 1 подгруппы  $H$  и  $K$  сопряжены в  $G$ , т.е.  $H = K^g$  для некоторого элемента  $g \in G$ . По лемме 3 подгруппа  $K^g$  является  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектором в  $G$  и, значит,  $H$  —  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектор в  $G$ .  $\square$

**Следствие 6** ([17, теорема 5.48]). Пусть  $\mathfrak{F}$  — непустой класс Фиттинга,  $G$  — группа с нильпотентным коммутантом  $G'$ . Подгруппа  $H$  группы  $G$  является  $\mathfrak{F}$ -инъектором в  $G$  тогда и только тогда, когда  $H$  —  $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа группы  $G$ , которая содержит  $\chi(\mathfrak{F})$ -холлову подгруппу из  $G'$ .

Из теоремы 4 и следствия 6 непосредственно вытекает следующий результат.

**Следствие 7.** Пусть  $\mathfrak{F}$  — непустой класс Фиттинга,  $\omega$  — непустое множество простых чисел,  $G$  — разрешимая группа, удовлетворяющая условию  $\pi(G') \subseteq \omega$ . Если  $G' \in \mathfrak{N}$ , то всякий  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектор группы  $G$  является ее  $\mathfrak{F}$ -инъектором.

Условие  $\pi(G') \subseteq \omega$  в следствии 7 является существенным, его нельзя опустить. Действительно, в примерах 2 и 3 класс групп  $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$  есть класс Фиттинга, рассматриваемые группы являются разрешимыми и коммутант каждой из них нильпотентен, но не является  $\omega$ -группой (в примере 2  $G' \cong C_3$ ; в примере 3  $G' \cong C_{21}$ ). При этом в каждой из рассматриваемых групп имеется  $\mathfrak{N}^\omega$ -инъектор, не являющийся  $\mathfrak{N}$ -инъектором.

## Заключение

В работе решены следующие задачи:

1) для произвольного непустого класса Фиттинга  $\mathfrak{F}$  и произвольного непустого множества  $\omega$  простых чисел доказано, что в любой конечной разрешимой группе, коммутант которой является  $\omega$ -группой, существуют  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъекторы и любые два из них являются сопряженными в группе (теорема 1);

2) для произвольного непустого класса Фиттинга  $\mathfrak{F}$  и произвольного непустого множества  $\omega$  простых чисел установлены необходимые и достаточные условия, при которых подгруппа разрешимой группы является ее  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъектором (теоремы 2–4).

Теорема 1 развивает основной результат работы [1]. Приведенные следствия теорем 2–4 представляют известные результаты о  $\mathfrak{F}$ -инъекторах групп (см., например, [17, гл. 5]). Полученные результаты могут быть полезными в дальнейших исследованиях подгруппового строения конечных групп методами теории классов групп.

## Список литературы

1. Fischer B., Gaschütz W., Hartley B. Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen // Mathematische Zeitschrift. 1967. Bd. 102. S. 337–339. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01111070>
2. Guo W. The theory of classes of groups. Beijing ; New York : Science Press, 2000. 259 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-94-011-4054-6>



3. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin ; New York : Walter de Gruyter, 1992. 890 p. DOI: <https://doi.org/10.1515/9783110870138>
4. Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M. Classes of finite groups. Netherlands : Springer, 2006. 386 p. (Mathematics and Its Applications. Vol. 584). DOI: <https://doi.org/10.1007/1-4020-4719-3>
5. Förster P. Nilpotent injectors in finite groups // Bulletin of the Australian Mathematical Society. 1985. Vol. 32, iss. 2. P. 293–297. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0004972700009965>
6. Шеметков Л. А. Некоторые свойства инъекторов в конечных группах // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. Вопросы алгебры. 1999. № 1 (15). С. 5–13.
7. Guo W., Vorob'ev N. T. On injectors of finite soluble groups // Communications in Algebra. 2008. Vol. 36, iss. 9. P. 3200–3208. DOI: <https://doi.org/10.1080/00927870802103560>, EDN: XLZDTD
8. Gaschütz W. Selected topics in the theory of soluble groups. Lectures given at the 9th Summer Research Institute of the Australian Mathematical Society. Canberra, 1969. 98 p.
9. Шеметков Л. А. Формации конечных групп. Москва : Наука, 1978. 272 с.
10. Скиба А. Н., Шеметков Л. А. Кратно  $\omega$ -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Математические труды. 1999. Т. 2, № 2. С. 114–147.
11. Ведерников В. А., Сорокина М. М.  $\mathfrak{F}$ -проекторы и  $\mathfrak{F}$ -покрывающие подгруппы конечных групп // Сибирский математический журнал. 2016. Т. 57, № 6. С. 1224–1239. DOI: <https://doi.org/10.17377/smzh.2016.57.603>, EDN: XBEDHB
12. Новикова Д. Г., Сорокина М. М. Об одном свойстве  $\mathfrak{F}^\omega$ -инъекторов конечных групп // Теоретические и прикладные аспекты естественно-научного образования в эпоху цифровизации : материалы III Междунар. науч.-практ. конф., Брянск, 11–12 апреля 2024 г. Брянск : РИСО БГУ, 2024. С. 148–150. EDN: FXIKPC
13. Шеметков Л. А. О подгруппах  $\pi$ -разрешимых групп // Конечные группы: Труды Гомельского семинара / под ред. Л. А. Шеметкова. Минск : Наука и техника, 1975. С. 207–212.
14. Guo W. Injectors of Finite Groups // Chinese Annals of Mathematics, Series A. 1997. Vol. 18, iss. 2. P. 145–148.
15. Инь С., Ян Н., Воробьев Н. Т. О проблеме существования и сопряженности инъекторов частично  $\pi$ -разрешимых групп // Сибирский математический журнал. 2018. Т. 59, № 3. С. 535–543. DOI: <https://doi.org/10.17377/smzh.2018.59.305>, EDN: IUBQRG
16. Воробьев Н. Т., Волкова Е. Д. Инъекторы конечных  $\sigma$ -разрешимых групп // Проблемы физики, математики и техники. 2023. № 1 (54). С. 75–84. DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2023\\_1\\_54\\_75](https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_75), EDN: RSKBWR
17. Монахов В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск : Вышэйшая школа, 2006. 207 с.
18. Ведерников В. А. Элементы теории классов групп. Смоленск : СГПИ, 1988. 96 с.
19. GAP. The GAP Small Groups Library. Version 4.12.2. URL: [www.gap-system.org](http://www.gap-system.org) (дата обращения: 20.07.2025).

## References

1. Fischer B., Gaschutz W., Hartley B. Injectors of finite solvable groups. *Mathematische Zeitschrift*, 1967, vol. 102, pp. 337–339 (in German). DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01111070>
2. Guo W. *The theory of classes of groups*. Beijing, New York, Science Press, 2000. 259 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-94-011-4054-6>
3. Doerk K., Hawkes T. *Finite soluble groups*. Berlin, New York, Walter de Gruyter, 1992. 890 p. DOI: <https://doi.org/10.1515/9783110870138>
4. Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M. *Classes of finite groups*. Mathematics and Its Applications, vol. 584. Netherlands, Springer, 2006. 386 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/1-4020-4719-3>
5. Förster P. Nilpotent injectors in finite groups. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 1985, vol. 32, iss. 2, pp. 293–297. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0004972700009965>
6. Shemetkov L. A. Some properties of injectors in finite groups. *Izvestiya Gomel'skogo gosudarstvennogo universiteta imeni F. Skoriny. Voprosy algebr* [Proceedings of Francisk Skorina Gomel State University. Issues of Algebra], 1999, iss. 1 (15), pp. 5–13 (in Russian).
7. Guo W., Vorob'ev N. T. On injectors of finite soluble groups. *Communications in Algebra*, 2008, vol. 36, iss. 9, pp. 3200–3208. DOI: <https://doi.org/10.1080/00927870802103560>, EDN: XLZDTD
8. Gaschütz W. *Selected topics in the theory of soluble groups*. Lectures given at the 9th Summer Research Institute of the Australian Mathematical Society. Canberra, 1969. 98 p.



9. Shemetkov L. A. *Formatsii konechnykh grupp* [Formations of finite groups]. Moscow, Nauka, 1978. 272 p. (in Russian).
10. Skiba A. N., Shemetkov L. A. Multiply  $\omega$ -local formations and fitting classes of finite groups. *Siberian Advances in Mathematics*, 2000, vol. 10, iss. 2, pp. 112–141.
11. Vedernikov V. A., Sorokina M. M.  $\mathfrak{F}$ -projectors and  $\mathfrak{F}$ -covering subgroups of finite groups. *Siberian Mathematical Journal*, 2016, vol. 57, iss. 6, pp. 957–968. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0037446616060033>, EDN: YUUVGZN
12. Novikova D. G., Sorokina M. M. On one property of  $\mathfrak{F}^\omega$ -injectors of finite groups. *Teoreticheskie i prikladnye aspekty estestvenno-nauchnogo obrazovaniya v epokhu tsifrovizatsii* [Theoretical and Applied Aspects of Natural Science Education in the Era of Digitalization]: Materials of the III International Science-Pract. Conf., Bryansk, April 11–12, 2024. Bryansk, RISO BSU, 2024, pp. 148–150 (in Russian). EDN: FXIKPC
13. Shemetkov L. A. On subgroups of  $\pi$ -soluble groups. In: *Konechnye gruppy: Trudy Gomel'skogo seminara* [Shemetkov L. A. (ed.) Finite groups. Proceedings of the Gomel seminar]. Minsk, Nauka i tekhnika, 1975, pp. 207–212 (in Russian).
14. Guo W. Injectors of finite groups. *Chinese Annals of Mathematics, Series A*, 1997, vol. 18, iss. 2, pp. 145–148.
15. Yin X., Yang N., Vorobev N. T. On the problem of existence and conjugacy of injectors of partially  $\pi$ -soluble groups. *Siberian Mathematical Journal*, 2018, vol. 59, iss. 3, pp. 420–426. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0037446618030059>, EDN: XZGGTB
16. Vorob'ev N. T., Volkova E. D. Injectors of finite  $\sigma$ -soluble groups. *Problems of Physics, Mathematics, and Engineering*, 2023, iss. 1 (54), pp. 75–84 (in Russian). DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2023\\_1\\_54\\_75](https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_75), EDN: RSKBWR
17. Monakhov V. S. *Vvedenie v teoriyu konechnykh grupp i ikh klassov* [Introduction to the theory of finite groups and their classes]. Minsk, Vysheyshaya shkola, 2006. 207 p. (in Russian).
18. Vedernikov V. A. *Elementy teorii klassov grupp* [Elements of the theory of classes of groups]. Smolensk, SSPI Publ., 1988. 96 p. (in Russian).
19. GAP. The GAP Small Groups Library. Version 4.12.2. Available at: [www.gap-system.org](http://www.gap-system.org) (accessed July 20, 2025).

Поступила в редакцию / Received 20.07.2025

Принята к публикации / Accepted 17.10.2025

Опубликована / Published 02.03.2026