



МЕХАНИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 1. С. 35–45

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2026, vol. 26, iss. 1, pp. 35–45

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-35-45>

EDN: <https://elibrary.ru/KZGDYX>

Научная статья

УДК 539.3

Определение постоянной материала при индентировании круговой высокоэластичной мембраны с учётом трения

В. М. Анесян, А. М. Колесников[✉]

Институт математики, механики и компьютерных наук имени И. И. Воровича, Южный федеральный университет, Россия, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, д. 8а

Анесян Валерий Мхитарович, студент

Колесников Алексей Михайлович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории упругости, amkolesnikov@sfedu.ru, <https://orcid.org/0000-0001-7020-1092>, SPIN: 7684-5591, AuthorID: 177832

Аннотация. В работе предлагается метод определения механических свойств высокоэластичного материала методом индентирования тонкой круглой пластинки. Новизной предлагаемого метода является учёт влияния трения в области контакта индентора и образца. Математическая модель основана на теории нелинейно-упругих мембран и модели трения Кулона. Мембрана изготовлена из изотропного несжимаемого материала. Процесс индентирования считается квазистатическим, а деформация мембраны осесимметричной. Задача сводится к краевой задаче для двух систем обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром (неизвестной границей контакта штампа и мембраны). Краевая задача решается методом пристрелки. Численный анализ проведён для неогуксовской модели материала. На основе численных данных кривая «сила вдавливания — перемещение индентора» аппроксимирована полиномиальным выражением. Определение постоянной материала основано на минимизации разницы между экспериментальной кривой «сила — перемещение» и аппроксимирующим выражением. Метод апробирован на экспериментальных данных индентирования тонкой резиновой ленты при различных условиях контакта (без смазки и со смазкой). Для этого проведены эксперименты: по определению коэффициента трения, по индентированию, одноосному и равномерному двухосному растяжению. Значение восстановленной постоянной материала, определённой из опыта по индентированию,



Научный
отдел





близко к результатам классических методов. В случае, если при моделировании трение не учитывать, то значение постоянной материала будет существенно завышенным.

Ключевые слова: высокоэластичная мембрана, индентирование, контактная задача, трение, неогумовый материал, обратная задача, постоянная материала

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 24-21-00125).

Для цитирования: *Анесян В. М., Колесников А. М.* Определение постоянной материала при индентировании круговой высокоэластичной мембраны с учётом трения // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 1. С. 35–45. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-35-45>, EDN: **KZGDYX**

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Determination of a material constant in indentation of a circular hyperelastic membrane accounting for friction

V. M. Anesyan, A. M. Kolesnikov[✉]

Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences named after I. I. Vorovich, Southern Federal University, 8a Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia

Valeriy M. Anesyan

Alexey M. Kolesnikov, amkolesnikov@sdefu.ru, <https://orcid.org/0000-0001-7020-1092>, SPIN: 7684-5591, AuthorID: 177832

Abstract. The paper proposes a method for determining the mechanical properties of a highly elastic material by indenting a thin round plate. The novelty of the proposed method is to take into account the influence of friction in the contact area of the indenter and the specimen. The mathematical model is based on the theory of nonlinear-elastic membranes and the Coulomb friction model. The membrane is made of an isotropic incompressible material. The indentation process is considered quasi-static and the membrane deformation is axisymmetric. The problem is reduced to a boundary value problem for two systems of ordinary differential equations with a parameter (unknown contact boundary of the indenter and membrane). The boundary value problem is solved by the shooting method. Numerical analyses are carried out for the neo-Hookean model of the material. Based on the numerical results, the “indentation force — indenter displacement” curve is approximated by a polynomial expression. The determining of the material constant is based on minimising the difference between the experimental “force — displacement” curve and the approximating expression. The method is validated on experimental data of indentation of a thin rubber band under different contact conditions (without lubrication and with lubrication). For this purpose, experiments were carried out: on determination of the friction coefficient, on indentation, uniaxial and uniform biaxial stretching. The value of the restored material constant determined from the indentation experiment is close to the results of classical methods. In the case when friction is not taken into account during modeling, the value of the material constant will be significantly overestimated.

Keywords: hyperelastic membrane, indentation, contact problem, friction, neo-Hookean material, inverse problem, material constant

Acknowledgements: The work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 24-21-00125).

For citation: Anesyan V. M., Kolesnikov A. M. Determination of a material constant in indentation of a circular hyperelastic membrane accounting for friction. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 1, pp. 35–45 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-35-45>, EDN: **KZGDYX**

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)



Введение

Высокоэластичные мембраны активно исследуются со второй половины XX в. Их отличительными особенностями являются гибкость, растяжимость и пренебрежимо малое сопротивление изгибу. Они востребованы в области инженерии, в медицине, являются частью искусственных и природных конструкций. Для того чтобы эффективно использовать высокоэластичные мембраны, необходимо знать их механические свойства. Для определения механических свойств мембран существуют различные виды испытаний. Одним из методов исследования является вдавливание (индентирование).

Первой работой по исследованию вдавливания сферического штампа в нелинейно-упругую мембрану при больших деформациях является работа [1]. В ней с использованием нелинейной теории безмоментных оболочек рассматривается осесимметричная деформация мембраны. Контакт моделируется как идеальный без учёта трения.

В большинстве исследований для определения механических свойств высокоэластичных мембран из опыта по индентированию основными экспериментальными данными являются сила вдавливания и перемещение индентора [2–5]. В работе [6] предложен метод для определения механических свойств тонких высокоэластичных плёнок по форме деформированной мембраны под действием постоянной нагрузки. В работе [7] для определения механических характеристик материала мембраны предлагаются два подхода, основанные на данных кривой «сила – прогиб» и данных метода трёхмерной корреляции цифровых изображений (3D-DIC).

При моделировании процесса индентирования важным вопросом является описание контактного взаимодействия массивного твёрдого штампа с упругой мембраной. В большинстве исследований это воздействие штампа описывают как распределённое нормальное давление, т.е. пренебрегают влиянием трения [3–7]. В работах [8–10] проведены экспериментальные и теоретические исследования индентирования круговой мембраны с учётом трения в области контакта. Показано, что трение играет существенную роль при индентировании, за исключением малых прогибов и деформаций мембраны в начале процесса индентирования.

В данной работе предлагается метод определения механических свойств тонких высокоэластичных мембран на основе эксперимента по индентированию сферическим штампом с учётом трения.

1. Математическая постановка

Рассматривается круговая мембрана толщины $h \ll r_B$, где r_B — радиус мембраны. В недеформированном состоянии положение точек мембраны можно задать с помощью цилиндрической системы координат $\{r \in [0, r_B], \varphi \in [0, 2\pi], z = 0\}$.

Для осесимметричной деформации положение точек срединной поверхности деформированной мембраны можно записать в той же цилиндрической системе координат $\{R(r), \psi, Z(r)\}$. Главные кратности удлинений λ_i и кривизны κ_i поверхности деформированной мембраны выражаются следующим образом:

$$\lambda_1 = \sqrt{\left(\frac{dR}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{dr}\right)^2}, \quad \lambda_2 = \frac{R}{r},$$

$$\kappa_1 = \frac{1}{\lambda_1} \frac{d\psi}{dr}, \quad \kappa_2 = \frac{\sin \psi}{r\lambda_2}, \quad \tan \psi = \frac{dZ}{dr} \left(\frac{dR}{dr}\right)^{-1}.$$

Здесь $\psi(r)$ — угол наклона касательной к поверхности деформированной мембраны в плоскости RZ .

Уравнения равновесия при осесимметричной деформации имеют вид [10, 11]

$$\frac{d\sigma_1}{dr} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{R} \frac{dR}{dr} + \lambda_1 q_1 = 0, \quad \sigma_1 \kappa_1 + \sigma_2 \kappa_2 + q = 0. \quad (1)$$

Здесь $q_1 = q_1(r)$ и $q = q(r)$ — касательная и нормальная составляющие поверхностной нагрузки, σ_1 и σ_2 — главные усилия в мембране, определяемые для высокоэластичного несжимаемого материала с помощью функции удельной потенциальной энергии $W(\lambda_1, \lambda_2)$ следующим образом:

$$\sigma_1 = \frac{hW_1}{\lambda_2}, \quad \sigma_2 = \frac{hW_2}{\lambda_1}, \quad W_i = \frac{\partial W}{\partial \lambda_i}, \quad W_{ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j}.$$

Отметим, что несжимаемость материала учитывается через изменение толщины мембраны.

1.1. Область контакта

В области контакта мембрана плотно прилегает к индентору радиуса R_0 и повторяет его форму (рис. 1). Тогда её поверхность можно описать следующим образом:

$$R(\psi) = R_0 \sin(\psi), \quad Z(\psi) = R_0(1 - \cos(\psi)), \quad \psi \in [0, \psi_C]. \quad (2)$$

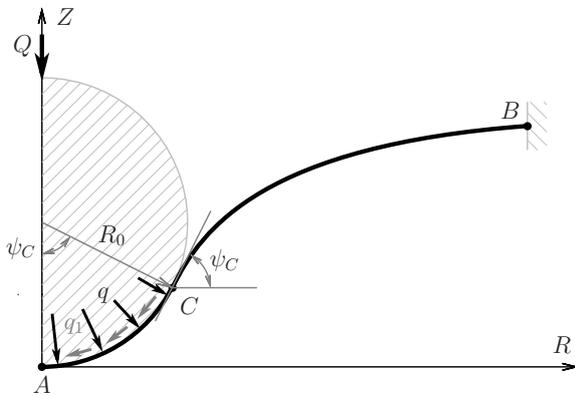


Рис. 1. Сечение мембраны при индентировании
Fig. 1. Membrane cross-section under indentation

Здесь ψ_C — значение параметра ψ в заранее неизвестной точке C , в которой прекращается контакт мембраны и индентора.

В области контакта принимаем, что для касательной компоненты поверхностной нагрузки выполняется закон Кулона в предельном случае сразу во всей области, т. е. $|q_1| = f|q|$. Учитывая направление возможного движения и выражения (2), уравнения равновесия (1) сводятся к дифференциальному уравнению второго порядка для $\psi(r)$ и выражению для нормальной составляющей давления $q(r)$:

$$\frac{d^2 \psi}{dr^2} W_{11} R_0 r + \frac{d\psi}{dr} (W_{12} R_0 \cos \psi - W_1 r f) - W_{12} \frac{R_0}{r} \sin \psi + W_1 - W_2 (\cos \psi + f \sin \psi) = 0,$$

$$q = -\frac{h}{R_0^2} \left(\frac{r}{\sin \psi} W_1 + W_2 \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^{-1} \right).$$

1.2. Область вне контакта

Уравнения равновесия (1) для области мембраны вне контакта с индентором сводятся к системе дифференциальных уравнений [11]:

$$\frac{d\lambda_1}{dr} = -\frac{1}{rW_{11}} \left[(\lambda_1 \cos \psi - \lambda_2) W_{12} - W_2 \cos \psi + W_1 \right], \quad \frac{d\psi}{dr} = -\frac{W_2 \sin \psi}{rW_1},$$

$$\frac{d\lambda_2}{dr} = \frac{1}{r} (\lambda_1 \cos \psi - \lambda_2), \quad \frac{dR}{dr} = \lambda_1 \cos \psi, \quad \frac{dZ}{dr} = \lambda_1 \sin \psi.$$

1.3. Краевая задача

В центре пластины (точка A) на функцию $\psi(r)$ накладываются следующие граничные условия:

$$\psi(0) = 0, \quad \left. \frac{d\psi}{dr} \right|_{r=0} = \gamma.$$



Здесь γ — неизвестная заранее величина, которая характеризует деформацию в точке A . В нулевой точке существует особенность, поэтому в качестве начальной точки берётся малое отступление от нуля ε :

$$\psi(\varepsilon) = \frac{\gamma \cdot \varepsilon}{R_0}, \quad \left. \frac{d\psi}{dr} \right|_{r=\varepsilon} = \frac{\gamma}{R_0}.$$

Данное приближение соответствует состоянию равномерного двухосного растяжения, возникающему в центре мембраны.

В точке B мембрана закреплена:

$$R(r_B) = \alpha r_B, \quad \lambda_2(r_B) = \alpha.$$

Здесь $\alpha \geq 1$ — кратность предварительного натяжения мембраны.

Решения на конце участка AC являются начальными условиями для участка CB :

$$\begin{aligned} R^{CB}(r_C) &= R^{AC}(r_C), & Z^{CB}(r_C) &= Z^{AC}(r_C), \\ \psi^{CB}(r_C) &= \psi^{AC}(r_C), & \lambda_1^{CB}(r_C) &= \lambda_1^{AC}(r_C), & \lambda_2^{CB}(r_C) &= \lambda_2^{AC}(r_C). \end{aligned}$$

При этом граница r_C заранее не известна.

Для системы, состоящей из шарового индентора и участка мембраны AC , уравнение равновесия может быть записано в виде

$$Q = 2\pi R_0 (\sin \psi(r_C))^2 \sigma_1(r_C). \quad (3)$$

Здесь Q — сила вдавливания. Данное условие можно использовать как для определения границы r_C по заданной силе Q , так и для определения силы Q по заданной координате r_C .

Таким образом, поставлена краевая задача о нахождении такого значения параметра γ , при котором $\lambda_2(r_B) = \alpha$.

Для численного решения краевой задачи удобнее задавать границу контакта r_C , затем определять начальное значение γ методом пристрелки. После решения задачи сила вдавливания Q вычисляется из уравнения (3). Численный метод пристрелки реализован авторами на языке программирования *Python*.

2. Результаты моделирования

Теоретические расчёты проводились для неогуковской модели материала. Функция потенциальной энергии в этом случае имеет вид

$$W(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\mu}{2} \left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} - 3 \right). \quad (4)$$

Здесь μ — постоянная материала.

Для демонстрации полученных результатов введём безразмерные параметры

$$Q^* = \frac{Q}{\mu h R_B}, \quad \Delta = \frac{Z(B)}{R_B}, \quad R_0^* = \frac{R_0}{R_B}.$$

Ограничимся рассмотрением прогибов до величины радиуса мембраны. Это соответствует максимальной относительной деформации примерно 100–150%.

На рис. 2 приведены графики зависимости силы Q^* от перемещения индентора Δ при $R_0^* = 0.4$ для предварительно не растянутой мембраны (сплошные линии — $\alpha = 1$) и предварительно растянутой мембраны (штриховые линии — $\alpha = 1.1$). Для начальной стадии индентирования трение оказывает малое влияние на зависимость «сила – прогиб». С ростом прогиба влияние трения увеличивается. При прогибе, равном радиусу мембраны, вдавливающая сила при коэффициенте трения $f = 1.1$ больше силы при $f = 0$ примерно в 1.5 раза.

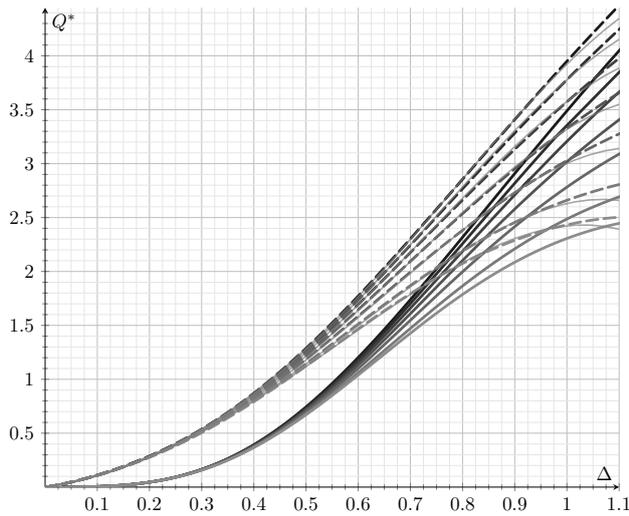


Рис. 2. Зависимость силы вдавливания от перемещения индентора. Сплошные тёмно-серые линии — $\alpha = 1$, штриховые линии — $\alpha = 1.1$, сплошные светло-серые тонкие линии — аппроксимирующая функция для $\alpha = 1.1$. Коэффициент $f = 0, 0.1, 0.3, \dots 1.1$, начиная с нижних кривых

Fig. 2. Dependence of indentation force on indenter displacement. Solid dark grey lines — $\alpha = 1$, dashed lines — $\alpha = 1.1$, solid light grey thin lines — approximation function for $\alpha = 1.1$. Coefficient $f = 0, 0.1, 0.3, \dots 1.1$, starting from the bottom lines

3. Эксперименты

3.1. Определение коэффициента трения

Коэффициент трения определяем по методу, предложенному в работах [11, 12]:

$$f = \frac{F_t}{mg} \frac{\sqrt{2R_b r_s + r_s^2}}{R_b + r_s}.$$

Здесь F_t — тянущая сила, m — масса образца, g — ускорение свободного падения, R_b — радиусы цилиндров основания, r_s — радиус цилиндра образца (рис. 3).

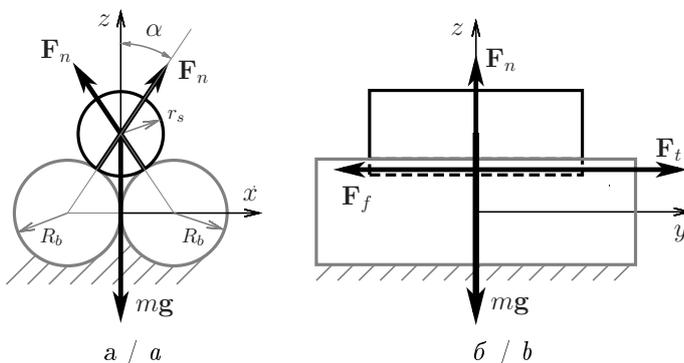


Рис. 3. Схема эксперимента по определению коэффициента трения: a — в плоскости xz ; b — в плоскости скольжения yz
Fig. 3. Scheme of the experiment for determining the coefficient of friction: a is in the plane xz ; b is in the sliding plane yz

На основе результатов численного решения задачи при $R_0 = 0.4R_B$ и $\alpha = 1.1$ зависимость безразмерной силы Q^* от относительного перемещения $\Delta \in [0, 1]$ аппроксимирована соотношением

$$Q_a^*(\Delta, f) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=1}^3 a_{ij} \Delta^j f^i. \quad (5)$$

Коэффициенты a_{ij} определялись методом наименьших квадратов при минимизации разницы между аппроксимирующим выражением (5) и результатами численного решения задачи. Они принимают значения

$$\begin{aligned} a_{01} &= 0.433, & a_{02} &= 5.252, & a_{03} &= -3.227, \\ a_{11} &= 0.027, & a_{12} &= -0.449, & a_{13} &= 2.607, \\ a_{21} &= 0.009, & a_{22} &= 0.089, & a_{23} &= -0.757. \end{aligned}$$

На рис. 2 светло-серыми тонкими линиями показана аппроксимирующая функция (5). Погрешность аппроксимации для $\Delta \in [0; 1]$ и $f \in [0; 1.1]$ составляет менее 2.5%.

Эксперименты проводились на испытательной машине Shimadzu AGS-X со специальной оснасткой. Цилиндры основания и подвижный цилиндр изготовлены методом 3D-печати из фотополимерной смолы Anycubic Eco Clear (Shenzhen Anycubic Technology, Ltd, Китай). Резиновая лента (GZKBAND, Китай) оборачивалась вокруг подвижного цилиндра с небольшим натяжением. Эксперименты проводились для случая сухого контакта (поверхности образца и основания обезжиривались изопропиловым спир-



том) и для случая смазки силиконовым маслом ПМС-200 (ИП Чайников А. Н., г. Нижний Новгород, Россия). В каждом случае проводилось 20 экспериментов продолжительностью 50 секунд. Параметры эксперимента имеют следующие значения:

$$m = 0.299 \text{ кг}, \quad g = 9.8 \text{ м/с}^2, \quad R_b = 36 \text{ мм}, \quad r_s = 36 \text{ мм}.$$

Данными эксперимента является зависимость тянущей силы F_t от времени при постоянной скорости перемещения траверсы 1 мм/с. Выборка трёх экспериментов для каждого случая показана чёрными и серыми кривыми на рис. 4.

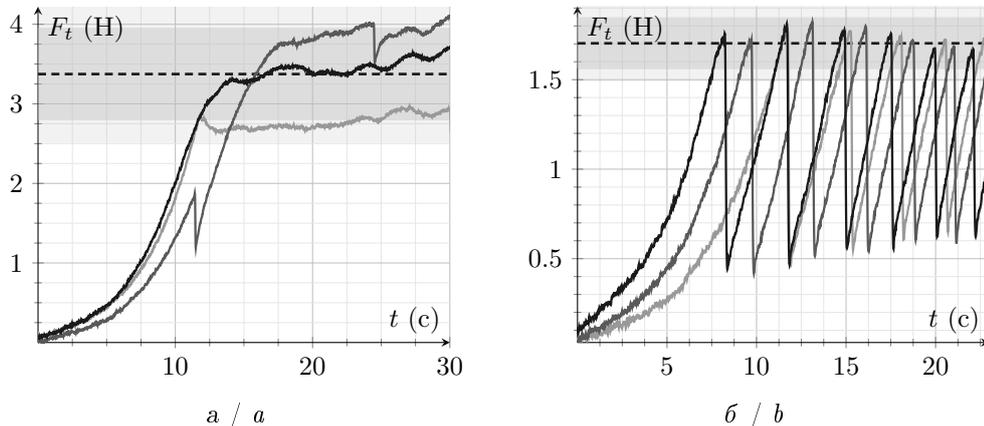


Рис. 4. Зависимость тянущей силы от времени: а — при сухом контакте; б — со смазкой силиконовым маслом

Fig. 4. Dependence of pulling force on time: a is with dry contact; b is with silicone oil lubrication

Для сухого контакта определялась средняя сила по всем экспериментам на некотором промежутке времени (от первого «пика» силы в течение 10 с после него). Для контакта со смазкой средняя сила определялась по значению пиковых величин силы (от первого «пика» в течение 10 с). На рис. 4 средние значения сил по всем экспериментам показаны чёрной штриховой линией, а доверительные интервалы, определяемые по правилу 2σ и 3σ , — серой и светло-серой областями соответственно. Итого получаем значения коэффициента трения с вероятностью 95% (доверительный интервал 2σ):

$$f_{dry} = 1.00 \pm 0.17, \quad \varepsilon = 17\%, \\ f_{so} = 0.50 \pm 0.04, \quad \varepsilon = 8\%.$$

3.2. Одноосное и двухосное растяжение

Для дальнейшей проверки результатов экспериментов по индентированию механические свойства материала определялись из классических опытов по одноосному и равномерному двухосному растяжению. Образцы были изготовлены из резиновой ленты толщиной 0.6 мм. Для одноосного растяжения образцы имели ширину 50 мм, длину 230 мм, рабочую область 150 мм, для равномерного двухосного растяжения — круговую форму радиусом 35 мм.

Эксперименты проводились на испытательной машине Shimadzu AGS-X. Для определения продольной и поперечной деформации использовалась видеосъёмка образцов со специальными контрастными метками с последующей обработкой данных. Растяжение проводилось циклически (пять циклов) до кратности удлинения 2.4 для одноосного и 1.8 для двухосного растяжения. Обработку данных проводили для пятого цикла нагружения. Результаты испытания представлены на рис. 5, 6.

Свойства материала будем описывать неогуковской несжимаемой моделью (4). Из данных о поперечной деформации при одноосном растяжении (рис. 5) видно, что материал близок к несжимаемому, хотя с ростом деформации сильнее отходит от этой модели.

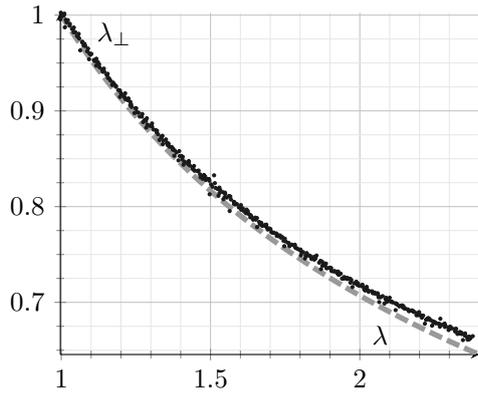


Рис. 5. Зависимость поперечной кратности удлинения от продольной при одноосном растяжении. Чёрные точки — экспериментальные данные, серая штриховая линия — неогуковская несжимаемая модель материала, для которой справедливо $\lambda_{\perp} = \lambda^{-\frac{1}{2}}$

Fig. 5. Dependence of transverse stretch ratio on longitudinal stretch ratio for uniaxial tension. Black dots — experimental data, grey lines — neo-Hookean incompressible material model for which $\lambda_{\perp} = \lambda^{-\frac{1}{2}}$

На основе экспериментальных данных по одноосному и равномерному двухосному растяжению определена постоянная материала μ в трёх вариантах. Обозначим через μ_A значение, полученное на основе данных только одноосного растяжения, μ_B — на основе только равномерного двухосного растяжения, μ_0 — на основе двух экспериментов. Минимизируя разницу между теоретическими и экспериментальными значениями, методом наименьших квадратов получены следующие величины:

$$\mu_A = 0.457, \quad \mu_B = 0.635, \quad \mu_0 = 0.533 \text{ (МПа)}.$$

Теоретическая зависимость напряжений от кратности удлинения показана на рис. 6 серыми линиями. Сплошные линии построены для значения μ_0 , штриховые — μ_A , точечные — μ_B . Как видно из графиков, неогуковская модель несжимаемого материала достаточно хорошо описывает качественные и количественные результаты экспериментов по отдельности. Результаты для двух экспериментов вместе моделью неплохо описываются качественно, но количественная оценка напряжений даёт погрешность до 20%.

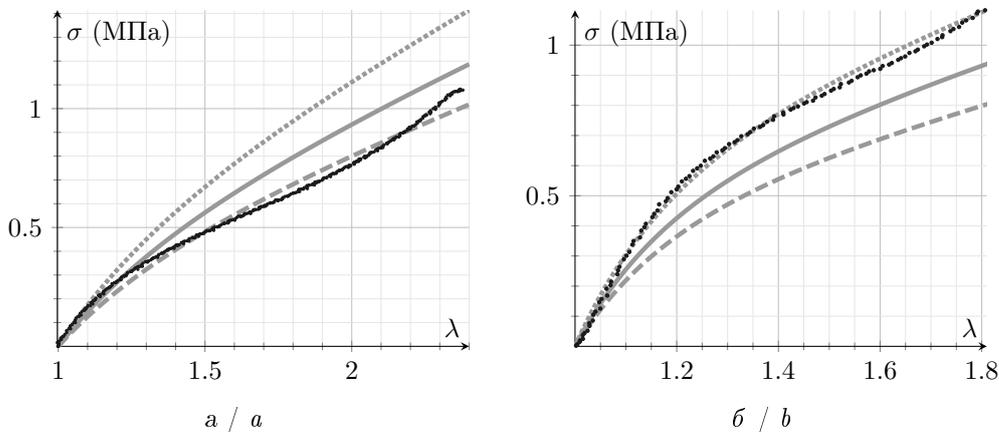


Рис. 6. Диаграмма «напряжение – кратность удлинения»: a — для одноосного растяжения; b — для двухосного растяжения. Чёрные точки — экспериментальные данные, серые линии — неогуковская модель (сплошная линия — μ_0 , штриховая линия — μ_A , точечная линия — μ_B)

Fig. 6. Diagram “stress – stretch ratio”: a is for uniaxial tension; b is for uniform biaxial tension. Black dots — experimental data, grey lines — neo-Hookean model (solid line — μ_0 , dashed line — μ_A , dotted line — μ_B)

3.3. Индентирование

Образцы для индентирования были изготовлены из резиновой ленты. Толщина образца $h = 0.6$ мм, радиус фиксации $R_B = 25$ мм (радиус образца 60 мм). Индентор имеет шарообразную форму радиусом $R_0 = 10$ мм, изготовлен методом 3D-печати из фотополимерной



смолы Anycubic Eco Clear. Испытания проводились при сухом контакте (поверхности образца и индентора обезжиривались изопропиловым спиртом) и при использовании смазки силиконовым маслом ПМС-200.

Эксперименты проводились на испытательной машине Shimadzu AGS-X со специальной оснасткой, позволяющей осуществлять предварительное натяжение образца (рис. 7). Круговая мембрана радиуса $R_D = 60$ мм (толстая серая штриховая линия на рис. 7) зажимается между кольцами 1 и 2. Затем подвижный зажим 3 смещается на заданную величину $d = 10$ мм, прижимая мембрану к основанию 1 и создавая в мембране предварительное растяжение ($\alpha = 1.1 \pm 0.01$) (толстая чёрная сплошная линия на рис. 7).

После этого индентор 4, соединённый с силовой ячейкой и траверсой испытательной машины, опускается вниз с постоянной скоростью 1 мм/с. При испытании фиксируются сила вдавливания Q и перемещение индентора δ .

Эксперименты проводились с пятью мембранами для каждого условия контакта, вдавливание осуществлялось до прогиба, равного радиусу зафиксированного образца, по пять циклов нагрузки и разгрузки в каждом эксперименте. На рис. 8 показан этап нагружения для пятого цикла испытания для пяти экспериментов без смазки (чёрные линии) и со смазкой (серые линии).

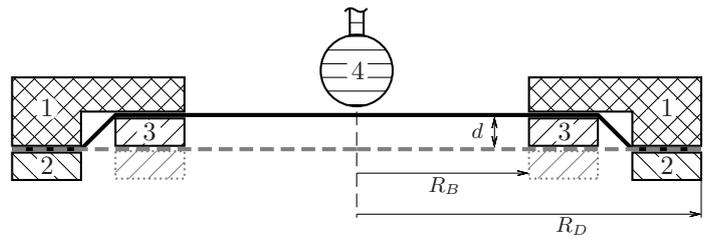


Рис. 7. Схема установки для индентирования
Fig. 7. Device scheme for indentation

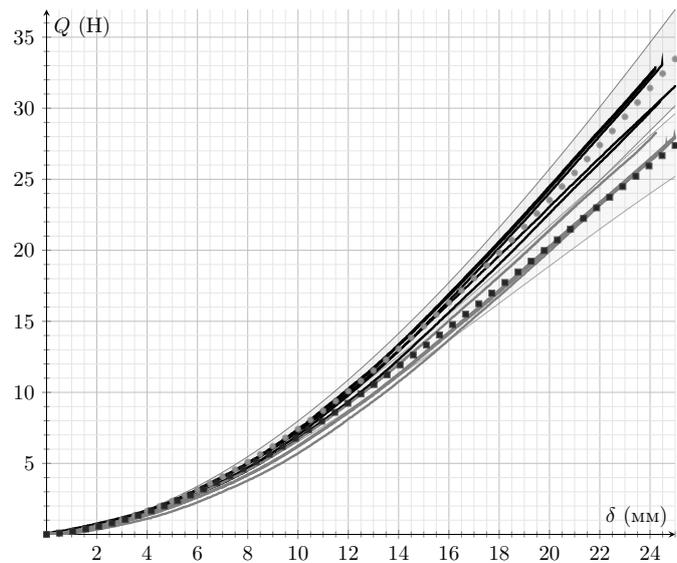


Рис. 8. Зависимость приведённой силы от относительного перемещения индентора. Чёрные линии — сухой контакт, серые линии — контакт со смазкой силиконовым маслом. Серыми кружками обозначена восстановленная теоретическая кривая при $f = 1$. Тёмно-серыми квадратами — восстановленная теоретическая кривая при $f = 0.5$. Светло-серые области — погрешности восстановления

Fig. 8. Dependence of the reduced force on the relative displacement of the indenter. Black lines — dry contact, grey lines — contact with silicone oil lubrication. Grey circles indicate the restored theoretical curve at $f = 1$. Dark grey squares — restored theoretical curve at $f = 0.5$. Light grey areas — restoration errors

4. Определение постоянной материала

Постоянную материала μ будем находить методом наименьших квадратов, минимизируя разность между экспериментальной зависимостью «сила вдавливания — перемещение индентора», представленной массивом точек $\{\delta_i^e, Q_i^e\}$ ($i = 1, \dots, N$, N — количество экспериментальных данных), и аппроксимацией (5) на интервале $\Delta \in [0, 1]$.



Получаем формулу для определения μ :

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^N Q_i^e Q_a^*(\Delta_i^e, f)}{hR_B \sum_{i=1}^N (Q_a^*(\Delta_i^e, f))^2} \left(\Delta_i^e = \frac{\delta_i^e}{R_B} \right).$$

В таблице представлены значения постоянной материала μ , восстановленные по результатам эксперимента на индентирование из предыдущего раздела, и их оценка.

Значения постоянной материала μ (МПа) из опыта по индентированию
Table. Reconstructed values of the material constant μ (MPa) from the indentation experiment

Тип контакта	Сухой контакт	Силиконовое масло
μ , МПа	0.533, 0.568, 0.544, 0.580, 0.576	0.536, 0.536, 0.532, 0.564, 0.526
С учетом трения		
Среднее [min, max]	0.560 [0.527; 0.598]	0.539 [0.513; 0.566]
Без учета трения ($f = 0$)		
Среднее [min, max]	0.758 [0.733; 0.782]	0.656 [0.640; 0.671]

На рис. 8 маркерами показаны кривые «сила вдавливания — перемещение индентора» для средних значений μ (см. таблицу). Серые кружки соответствуют коэффициенту трения $f = 1$, тёмно-серые квадраты — $f = 0.5$. Светло-серые области отмечают возможное положение кривых $Q - \delta$, соответствующее значениям постоянной материала из доверительного интервала.

Заключение

Предложен метод определения постоянной неогукковского материала на основе эксперимента по индентированию с учётом трения. Экспериментально и теоретически показано существенное влияние трения на процесс индентирования. Причём использование смазки снижает трение, но не убирает его полностью.

Метод опробован на экспериментальных данных с резиновой лентой. Экспериментально определён коэффициент трения и проведено индентирование кругового образца без смазки и со смазкой силиконовым маслом. На основе полученных данных определена постоянная неогукковского материала. Значения, полученные при разных условиях контакта, близки.

Постоянная материала, полученная из опыта по индентированию при различных условиях контакта, близка к постоянной, определённой из двух классических опытов. Отметим, что если не учитывать трение, то вычисленные материальные постоянные будут существенно отличаться для разных условий контакта друг относительно друга и от значения, полученного классическими методами.

Список литературы / References

1. Yang W. H., Hsu K. H. Indentation of a circular membrane. *Journal of Applied Mechanics*, 1971, vol. 38, pp. 227–230. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3408747>
2. Scott O. N., Begley M. R., Komaragiri U., Mackin T. J. Indentation of freestanding circular elastomer films using spherical indenters. *Acta Materialia* 2004, vol. 52, iss. 16, pp. 4877–4885. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2004.06.043>
3. Aernouts J., Couckuyt I., Crombecq K., Dirckx J. J. J. Elastic characterization of membranes with a complex shape using point indentation measurements and inverse modelling. *International Journal of Engineering Science*, 2010, vol. 48, iss. 6, pp. 599–611. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2010.02.001>



4. Cloonan A. J., O'Donnell M. R., Lee W. T., Walsh M. T., De Barra E., McGloughlin T. M. Spherical indentation of free-standing acellular extracellular matrix membranes. *Acta Biomaterialia*, 2012, vol. 8, iss. 1, pp. 262–273. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actbio.2011.08.003>
5. Elkut F., Bradley G. R., Krywonos J., Fenwick J., Ren X. J. Numerical study of the mechanics of indentation bending tests of thin membranes and inverse materials parameters prediction. *Computational Materials Science*, 2012, vol. 52, iss. 1, pp. 123–127. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2011.03.025>
6. Liu K. K., Ju B. F. A novel technique for mechanical characterization of thin elastomeric membrane. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 2001, vol. 34, iss. 15, pp. 91–94. DOI: <https://doi.org/10.1088/0022-3727/34/15/102>
7. Garnica-Palafox I. M., Alvarez-Camacho M., Sánchez-Arévalo F. M. Macro- and micromechanical responses of an elastomeric membrane undergoing biaxial tension by indentation. *Journal of Materials Science*, 2019, vol. 54, pp. 14255–14274. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10853-019-03887-w>
8. Selvadurai A. P. S., Yu Q. On the indentation of a polymeric membrane. *Proceedings of the Royal Society A*, 2006, vol. 462, pp. 189–209. DOI: <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2005.1572>
9. Jiang Z., Liu Z., Li Y., Kang G. Indentation and puncture of double-network tough hydrogel membranes. *Polymer Testing*, 2022, vol. 116, art. 107782. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.polymer-testing.2022.107782>
10. Liu J., Zhong D., Yin T., Chen Z., Liu B., Wang P., Qu S., Kang G. Indentation of elastomeric membranes by sphere-tipped indenters: Snap-through instability, shrinkage, and puncture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2022, vol. 167, art. 104973. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2022.104973>
11. Kolesnikov A. M., Shatvorov N. M. Indentation of a circular hyperelastic membrane by a rigid cylinder. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2022, vol. 138, art. 103836. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2021.103836>
12. Stimpson B. A suggested technique for determining the basic friction angle of rock surfaces using core. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, 1981, vol. 18, iss. 1, pp. 63–65. DOI: [https://doi.org/10.1016/0148-9062\(81\)90266-7](https://doi.org/10.1016/0148-9062(81)90266-7)

Поступила в редакцию / Received 14.06.2025

Принята к публикации / Accepted 05.11.2025

Опубликована / Published 02.03.2026