



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 1. С. 46–55

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2026, vol. 26, iss. 1, pp. 46–55

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-46-55>

EDN: <https://elibrary.ru/MCSEEH>

Научная статья

УДК 539.3

О прикладной теории сжатия цилиндра

А. О. Ватульян, М. Н. Узлов 

Институт математики, механики и компьютерных наук имени И. И. Воровича, Южный федеральный университет, Россия, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, д. 8а

Ватульян Александр Ованесович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории упругости, aovatulyan@sfedu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0444-4496>, SPIN: 3865-2040, AuthorID: 3469

Узлов Марк Николаевич, студент, uzlov@sfedu.ru, <https://orcid.org/0009-0002-4789-2643>

Аннотация. В работе рассматривается задача о сжатии упругих цилиндрических образцов под действием торцевых нагрузок. Представлены способы построения приближенных моделей деформирования различного порядка для вытянутых образцов путём введения гипотез о представлении поля перемещений в виде разложения по радиальным полиномам различного порядка с неизвестными коэффициентами-функциями. Приближённые модели построены с помощью использования вариационного принципа Лагранжа. Сформирован упрощённый функционал энергии путём интегрирования по радиальной координате. С помощью вариационного принципа на базе метода Канторовича задача сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с соответствующими краевыми условиями, причём для однородных тел эти системы дифференциальных уравнений имеют постоянные коэффициенты, зависящие от коэффициента Пуассона. Построены решения для упрощённых моделей, показано наличие стержневых и погранслойных решений. Проведена верификация полученных моделей на основе МКЭ при постоянных и переменных значениях параметров Ляме, а также осуществлена серия вычислительных экспериментов, которая показала возможность использования предлагаемых моделей в случае вытянутых образцов, что позволяет оценить их точность и использовать при решении прикладных задач различного типа.

Ключевые слова: вариационный принцип Лагранжа, метод Канторовича, погранслойные решения, неоднородный цилиндр, сжатие цилиндра

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-11-00265-П, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/>) в Южном федеральном университете.

Для цитирования: Ватульян А. О., Узлов М. Н. О прикладной теории сжатия цилиндра // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 1. С. 46–55. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-46-55>, EDN: MCSEEH

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

On the applied theory of compression of an elastic cylinder

A. O. Vatulyan, M. N. Uzlov 

Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences named after I. I. Vorovich, Southern Federal University, 8a Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia

Alexander O. Vatulyan, aovatulyan@sfedu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0444-4496>, SPIN: 3865-2040, AuthorID: 3469

Mark N. Uzlov, uzlov@sfedu.ru, <https://orcid.org/0009-0002-4789-2643>



Abstract. The paper addresses the problem of the compression of elastic cylindrical specimens under axial end loads. Approximate deformation models of various orders are developed for slender specimens by postulating that the displacement field admits an expansion in radial polynomials of different orders whose coefficients are unknown functions of the axial coordinate. The approximate models are derived from Lagrange's variational principle. A reduced energy functional is obtained by integrating the three-dimensional elastic energy over the radial coordinate. Applying the Kantorovich variational method, the problem is then reduced to systems of ordinary differential equations with corresponding boundary conditions; for homogeneous bodies these systems exhibit constant coefficients that depend on Poisson's ratio. Closed-form solutions are constructed for the simplified models, and both rod-like (axial) and boundary-layer solution modes are identified. The proposed models are verified against finite-element simulations for both constant and spatially heterogeneous Lamé parameters, and a series of computational experiments demonstrates that the models may be used for slender specimens to estimate their accuracy and to support the solution of diverse applied problems.

Keywords: variational principle of Lagrange, Kantorovich method, boundary-layer solutions, heterogeneous cylinder, compression of a cylinder

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-11-00265-II, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/>) in Southern Federal University.

For citation: Vatulyan A. O., Uzlov M. N. On the applied theory of compression of an elastic cylinder. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 1, pp. 46–55 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-46-55>, EDN: MCCEEH

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Задачам о равновесии изотропного упругого цилиндра посвящено множество работ. Исследование задач для однородного конечного упругого цилиндра берёт своё начало от работы Файлона [1] и за более чем 100-летнюю историю продолжает интересовать специалистов. При этом отметим, что в последние годы интерес к этим задачам заметно вырос, что связано с ростом числа приложений к задачам для призматических образцов, часто используемых для оценки упругих свойств (модуля Юнга и коэффициента Пуассона), задачам биомеханики, задачам идентификации свойств новых материалов.

Отметим, что наиболее важными являются задачи о нагружении торцов цилиндра. Среди них выделим задачу о действии нормальной нагрузки на торце, когда основание жёстко заземлено. Для задач такого вида со свободной боковой поверхностью особую роль приобретают решения для бесконечного цилиндра или однородные решения [2]. Эти решения зависят от корней некоторого трансцендентного уравнения, при удовлетворении граничных условий на торцах их линейные комбинации приводят к бесконечным алгебраическим системам относительно коэффициентов разложений. В ряде исследований показано, что они являются квази-регулярными или квази-вполне регулярными, и их решение можно строить методом редукции.

Альтернативой такому подходу является использование КЭ-технологий. Отметим, что при интерпретации данных экспериментов и оценке модуля Юнга весьма часто используется стержневая модель [3], которую рекомендуется использовать, когда $\varepsilon = \frac{a}{h} \ll 1$ (a — радиус цилиндра, h — его высота).

Вместе с тем для ряда материалов (например, костная ткань) весьма сложно изготовить длинные образцы и подвергать их сжатию. Поэтому важной проблемой является построение промежуточных моделей, эффективных для значений ($\varepsilon = 0.1 \div 0.5$), для которых можно найти аналитические или полуаналитические решения. Именно этой проблеме и посвящена настоящая работа, где приближенная модель строится на основе использования вариационного принципа Лагранжа [4] в рамках метода Канторовича [5].

1. Постановка задачи

Пусть однородный изотропный цилиндр со свободной боковой поверхностью радиуса a и высоты h подвергается сжатию с помощью приложения к торцу $z = h$ нормальной нагрузки $p(r)$, касательные напряжения на этом торце равны 0 (рис. 1). Будем считать, что торец $z = 0$ жёстко закреплён. Задачу будем рассматривать в осесимметричной постановке.

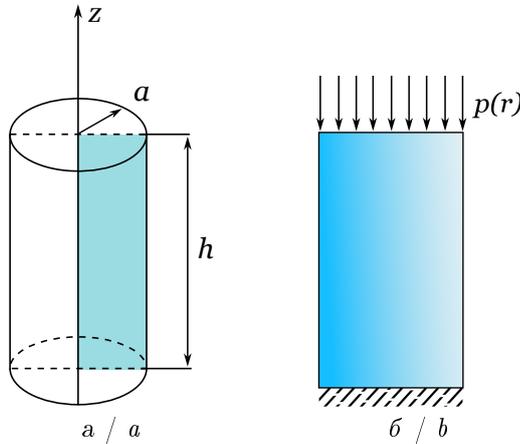


Рис. 1. Однородный изотропный цилиндр со свободной боковой поверхностью: a — геометрические параметры образца; b — схема нагружения

Fig. 1. Homogeneous isotropic cylinder with a free lateral surface: a is the geometric parameters of the sample; b is the loading scheme

где W — удельная потенциальная энергия деформации, A — работа поверхностных сил на торце:

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{2} (\sigma_{rr}\epsilon_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}\epsilon_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}\epsilon_{zz} + 2\sigma_{rz}\epsilon_{rz}), \\
 A &= \int_S p(r)u_z(r, h) dS, \quad S = [0, a] \times [0, 2\pi], \\
 A &= 2\pi (P_0u_0|_{z=h} + P_2u_2|_{z=h}), \\
 P_0 &= \int_0^a p(r)r dr \quad P_2 = \int_0^a p(r)r^2 dr.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Рассмотрим несколько упрощённых моделей, в частности второго порядка, в которой неизвестными являются три функции осевой координаты z :

$$\begin{cases} u_r(r, z) = ru_1(z), \\ u_z(r, z) = u_0(z) + ru_2(z). \end{cases}
 \tag{2}$$

Переход к модели первого порядка осуществляется за счёт равенства нулю функции u_2 :

$$\begin{cases} u_r(r, z) = ru_1(z), \\ u_z(r, z) = u_0(z). \end{cases}
 \tag{3}$$

В рамках (2) найдем компоненты тензоров деформаций и напряжений:

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} = u_1, \quad \epsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r} = u_1, \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = u'_0 + ru'_2,$$

Уравнения равновесия в цилиндрической системе координат имеют вид [6]

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим задачу о сжатии цилиндра при закреплении нижнего торца:

$$\begin{cases} u_z = 0, \quad u_r = 0, \quad r \in [0, a], \quad z = 0, \\ \sigma_{zz} = -p(r), \quad \sigma_{zr} = 0, \quad r \in [0, a], \quad z = h, \\ \sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0, \quad r = a, \quad z \in [0, h]. \end{cases}$$

Построение прикладной теории осуществим, базирясь на вариационном принципе Лагранжа. В рамках общей постановки задачи введём следующий функционал полной потенциальной энергии:

$$\Pi = \int_V W dV - A,$$



$$\varepsilon_{rz} = \varepsilon_{zr} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) = \frac{1}{2} \cdot (ru'_1 + u_2),$$

$$\sigma_{rr} = \Theta\lambda + 2\mu u_1, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \Theta\lambda + 2\mu u_1, \quad \sigma_{zz} = \Theta\lambda + 2\mu(u'_0 + ru'_2), \quad \sigma_{rz} = \sigma_{zr} = \mu(ru'_1 + u_2),$$

где $\Theta = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz} = 2u_1 + u'_0 + ru'_2$, λ, μ — параметры Ламе, которые могут зависеть от осевой координаты.

Тогда удельная потенциальная энергия (1) примет вид

$$W = \frac{1}{2} \cdot [\Theta^2\lambda + 4\mu u_1^2 + 2\mu(u'_0 + ru'_2)^2 + \mu(ru'_1 + u_2)^2].$$

Рассмотрим функционал полной потенциальной энергии:

$$\Pi = \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^a W r dr dz d\varphi - A = \Pi_0 - A.$$

Проинтегрировав в представлении Π_0 по радиальной и угловой координатам, получим её упрощённое представление:

$$\begin{aligned} \Pi_0 = \pi \int_0^h \left[\frac{a^4}{4} \left((\lambda + 2\mu)(u'_2)^2 + \mu(u'_1)^2 \right) + \frac{a^3}{3} \left((2\lambda + 4\mu)u'_0 u'_2 + 4\lambda u_1 u'_2 + 2\mu u'_1 u_2 \right) + \right. \\ \left. + \frac{a^2}{2} \left((4\lambda + 4\mu)u_1^2 + (\lambda + 2\mu)(u'_0)^2 + 4\lambda u_1 u'_0 + \mu u_2^2 \right) \right] dz. \end{aligned}$$

Используя вариационный принцип Лагранжа, варьируя функционал Π_0 , приравнявая к нулю коэффициенты при независимых вариациях $\delta u_0, \delta u_1, \delta u_2$ и считая материальные характеристики постоянными величинами, получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{a}{3}(2\kappa + 4)u''_2 + (\kappa + 2)u''_0 + 2\kappa u'_1 = 0, \\ 2\kappa u'_0 + (4\kappa + 4)u_1 + \frac{a}{3}(4\kappa - 2)u'_2 - \frac{a^2}{2}u''_1 = 0, \\ \frac{a^2}{2}(\kappa + 2)u''_2 + \frac{a}{3}(4\kappa - 2)u'_1 + \frac{a}{3}(2\kappa + 4)u''_0 - u_2 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

со следующими граничными условиями:

$$\begin{cases} \frac{2a}{3}(\kappa + 2)u'_2|_{z=h} + (\kappa + 2)u'_0|_{z=h} + 2\kappa u_1|_{z=h} = \frac{2P_0}{a^2\mu}, \\ \frac{3a}{4}u'_1|_h + u_2|_h = 0, \\ \frac{3a}{4}(\kappa + 2)u'_2|_{z=h} + (\kappa + 2)u'_0|_{z=h} + 2\kappa u_1|_{z=h} = \frac{3P_2}{a^3\mu}, \\ u_i|_{z=0} = 0, \quad i = \overline{0, 2}. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь $\kappa = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2\nu}{1 - 2\nu}$, ν — коэффициент Пуассона.

При постоянных характеристиках возможно построить общее решение краевой задачи (4), (5).

2. Общий вид решения краевой задачи

Решение системы (4) будем искать в виде

$$u_i = A_i e^{az}, \quad i = \overline{0, 2},$$



что приводит к линейной системе относительно A_i :

$$\begin{cases} (\varkappa + 2)q^2 A_0 + 2\varkappa q A_1 + \frac{a}{3}(2\varkappa + 4)q^2 A_2 = 0, \\ 2\varkappa q A_0 + \left((4\varkappa + 4) - \frac{a^2}{2}q^2 \right) A_1 + \frac{a}{3}(4\varkappa - 2)q A_2 = 0, \\ \frac{a}{3}(2\varkappa + 4)q^2 A_0 + \frac{a}{3}(4\varkappa - 2)q A_1 + \left(\frac{a^2}{2}(\varkappa + 2)q^2 - 1 \right) A_2 = 0. \end{cases}$$

Отметим, что нетривиальное её решение существует, когда определитель системы равен нулю, откуда получим бикубическое уравнение следующего вида:

$$q^2 \left((\varkappa^2 + 4\varkappa + 4)a^4 q^4 - (24\varkappa^2 + 66\varkappa + 36)a^2 q^2 + 432\varkappa + 288 \right) = 0. \quad (6)$$

Нетрудно видеть, что (6) имеет кратный нулевой корень $q_{1,2} = 0$ и две пары корней $q_{3,4} = \pm\tau_1$, $q_{5,6} = \pm\tau_2$, где

$$\tau_1 = \frac{(3d_3(d_2 + d_1^{1/2}))^{1/2}}{d_3 a}, \quad \tau_2 = \frac{(3d_3(d_2 - d_1^{1/2}))^{1/2}}{d_3 a},$$

$$d_1 = 16\varkappa^2 - 24\varkappa - 23, \quad d_2 = 4\varkappa + 3, \quad d_3 = \varkappa + 2.$$

Отметим, что эти корни могут быть как вещественными при $d_1 > 0$, так и комплексными при $d_1 < 0$, что определяется параметром \varkappa .

Таким образом, общее решение имеет вид

$$\begin{cases} u_0 = C_1 + \alpha_0 C_2 z + \alpha_1 (C_3 e^{-\tau_1 z} - C_4 e^{\tau_1 z}) + \alpha_2 (C_5 e^{-\tau_2 z} - C_6 e^{\tau_2 z}), \\ u_1 = C_2 + C_3 e^{-\tau_1 z} + C_4 e^{\tau_1 z} + C_5 e^{-\tau_2 z} + C_6 e^{\tau_2 z}, \\ u_2 = \beta_1 (C_3 e^{-\tau_1 z} - C_4 e^{\tau_1 z}) + \beta_2 (C_5 e^{-\tau_2 z} - C_6 e^{\tau_2 z}), \end{cases}$$

где используются обозначения

$$\alpha_0 = -\frac{2(\varkappa + 1)}{\varkappa}, \quad (7)$$

$$\alpha_i = -\frac{(a^2 \tau_i^2 (\varkappa + 2) - 28\varkappa - 16)}{2\tau_i (\varkappa + 2)}, \quad \beta_i = \frac{3(a^2 \tau_i^2 (\varkappa + 2) - 24\varkappa - 16)}{4a\tau_i (\varkappa + 2)}, \quad i = 1, 2.$$

Постоянные C_j определяются из удовлетворения граничным условиям (5), здесь не приводятся в силу громоздкости.

3. Аналитическое решение для модели первого порядка

Отметим, что дальнейшее исследование полученных аналитических зависимостей может быть осуществлено лишь численно, поэтому обратимся к более простой модели первого порядка (3). Перейдём к безразмерным координатам $\xi = \frac{z}{h} : \xi \in [0, 1]$ и $\eta = \frac{r}{h} : \eta \in [0, \varepsilon]$. Обезразмерим нагрузку, введя $p(r) = p_0 \tilde{p}(\eta)$.

Введём обозначение погранслошной функции

$$\zeta(z) = \exp(-\gamma \xi), \quad \gamma = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{(\varkappa + 2)(3\varkappa + 2)}}{\varepsilon(\varkappa + 2)}.$$

Тогда решение соответствующей краевой задачи можно представить в виде

$$\begin{cases} \tilde{u}_0 = C_1 + \alpha_0 C_2 \xi + \alpha_1 (C_3 \zeta(\xi) - C_4 \zeta(-\xi)), \\ \tilde{u}_1 = C_2 + C_3 \zeta(\xi) + C_4 \zeta(-\xi). \end{cases}$$



Отметим, что α_0 определяется формулой (7), а $\alpha_1 = \frac{2\pi}{\gamma(\pi+2)}$.

Выражения для коэффициентов C_j имеют вид

$$C_1 = -\frac{4k\nu^2\tilde{P}_0(\zeta(1) - \zeta(-1))}{\varepsilon^2\gamma(\nu - 1)(\zeta(1) + \zeta(-1))}, \quad C_2 = -\frac{2k\tilde{P}_0\nu}{\varepsilon^2}, \quad C_3 = \frac{2k\zeta(-1)\tilde{P}_0\nu}{\varepsilon^2(\zeta(1) + \zeta(-1))},$$

$$C_4 = \frac{2k\zeta(1)\tilde{P}_0\nu}{\varepsilon^2(\zeta(1) + \zeta(-1))}, \quad k = \frac{p_0}{E}.$$

4. Переменные параметры Ламе

Рассмотрим исходную задачу, предварительно обезразмерив её, считая параметры Ламе функциями осевой координаты: $\lambda(z) = E_0\tilde{\lambda}(\xi)$, $\mu(z) = E_0\tilde{\mu}(\xi)$.

Осуществив операцию варьирования и приравняв к нулю коэффициенты при независимых вариациях $\delta\tilde{u}_0$, $\delta\tilde{u}_1$, $\delta\tilde{u}_2$, уравнения, аналогичные (4), (5), имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{2\varepsilon}{3}((\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})\tilde{u}'_2)' + ((\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})\tilde{u}'_0)' + 2(\tilde{\lambda}\tilde{u}_1)' = 0, \\ -\frac{\varepsilon^2}{2}(\tilde{\mu}\tilde{u}'_1)' + \frac{2\varepsilon}{3}(2\tilde{\lambda}\tilde{u}'_2 - (\tilde{\mu}\tilde{u}_2)') + 4(\tilde{\lambda} + \tilde{\mu})\tilde{u}_1 + 2\tilde{\lambda}\tilde{u}'_0 = 0, \\ \frac{\varepsilon^2}{2}((\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})\tilde{u}'_2)' + \frac{2\varepsilon}{3}(2(\tilde{\lambda}\tilde{u}_1)' - \tilde{\mu}\tilde{u}'_1 + ((\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})\tilde{u}'_0)') - \tilde{\mu}\tilde{u}_2 = 0, \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \frac{2\varepsilon}{3}(\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})\tilde{u}'_2|_{\xi=1} + (\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})\tilde{u}'_0|_{\xi=1} + 2\tilde{\lambda}\tilde{u}_1|_{\xi=1} = \frac{2\tilde{P}_0k}{\varepsilon^2}, \\ \frac{3\varepsilon}{4}\tilde{\mu}\tilde{u}'_1|_{\xi=1} + \tilde{\mu}\tilde{u}_2|_{\xi=1} = 0, \\ \frac{3\varepsilon}{4}(\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})\tilde{u}'_2|_{\xi=1} + (\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})\tilde{u}'_0|_{\xi=1} + 2\tilde{\lambda}\tilde{u}_1|_{\xi=1} = \frac{3\tilde{P}_2k}{\varepsilon^3}, \\ \tilde{u}_i(0) = 0, \quad i = \overline{0, 2}. \end{cases} \quad (9)$$

5. Анализ

Для сравнения полученных результатов приведём графическую иллюстрацию решений краевых задач (4), (5) и (8), (9), а также сравним их с результатами, полученными посредством КЭ пакета FlexPDE.

Особое внимание уделено перемещению $u_r = \eta h \cdot \tilde{u}_1$ на боковой границе образца $\eta = \varepsilon$ с целью изучения погранслоя вблизи торцевой заделки. Проведена серия вычислительных экспериментов по расчёту полей смещений на боковой поверхности цилиндра для различных законов изменения $\lambda = E_0\tilde{\lambda}(\xi)$ и $\mu = E_0\tilde{\mu}(\xi)$.

В качестве примера на рис. 2 представлены смещения для различных моделей.

Из них видно, что модель второго порядка даёт лучшее приближение по отношению к конечноэлементной модели, чем модель первого порядка.

Также нетрудно заметить, что для описания перемещений при постоянных значениях параметров Ламе на участке $\xi \in [0.4, 1]$ можно использовать известную стержневую модель.

Для использования стержневой модели нормативная документация рекомендует выдерживать соотношение $\varepsilon \leq \frac{1}{5}$ ¹. С целью оценки области применения предложенных моделей были проведены расчёты для случая $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Результаты показали, что с ростом параметра ε зона влияния погранслоя увеличивается, но несмотря на это, модели первого и второго порядков достаточно точно отражают структуру перемещений и могут быть использованы при анализе обратной задачи, реконструкции физических характеристик материала цилиндра.

¹ГОСТ 1497-84. Металлы. Методы испытания на растяжение. Введен 1986-01-01. Москва : Стандартинформ, 2005. 35 с.

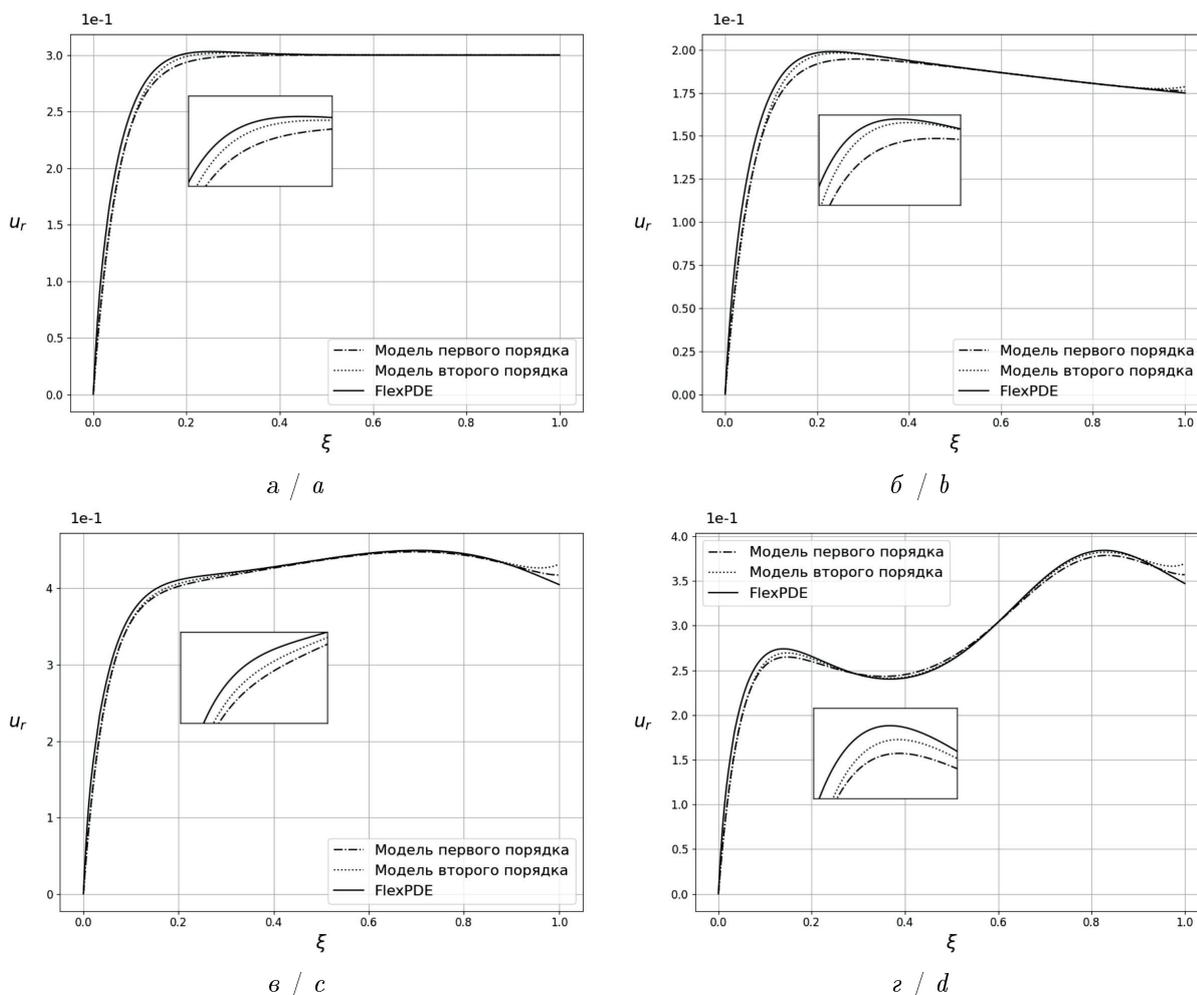


Рис. 2. Перемещения $u_r|_{\eta=\varepsilon}$ при $\varepsilon = \frac{1}{5}$: $a - \tilde{E}(\xi) = 1, \tilde{\nu}(\xi) = 0.3$; $b - \tilde{E}(\xi) = 1 + \xi^2, \tilde{\nu}(\xi) = 0.2 + 0.15\xi^2$;

$$v - \tilde{E}(\xi) = \frac{1}{1 + \xi^2}, \tilde{\nu}(\xi) = 0.4 - 0.2\xi^2; \quad z - \tilde{E}(\xi) = 1 + 0.2 \sin(2\pi\xi), \tilde{\nu}(\xi) = 0.3 + 0.04 \cos(2\pi\xi)$$

Fig. 2. Displacements $u_r|_{\eta=\varepsilon}$ for $\varepsilon = \frac{1}{5}$: $a - \tilde{E}(\xi) = 1, \tilde{\nu}(\xi) = 0.3$; $b - \tilde{E}(\xi) = 1 + \xi^2, \tilde{\nu}(\xi) = 0.2 + 0.15\xi^2$;

$$c - \tilde{E}(\xi) = \frac{1}{1 + \xi^2}, \tilde{\nu}(\xi) = 0.4 - 0.2\xi^2; \quad d - \tilde{E}(\xi) = 1 + 0.2 \sin(2\pi\xi), \tilde{\nu}(\xi) = 0.3 + 0.04 \cos(2\pi\xi)$$

6. Обратная задача

Пусть известны значения перемещений $u_r(\xi), u_z(\xi)$ для набора точек на боковой поверхности образца. Для восстановления упругих свойств материала обратимся к модели первого порядка, для которой система дифференциальных уравнений с граничными условиями примет следующий вид:

$$\begin{cases} \left((\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})\tilde{u}'_0 \right)' + 2(\tilde{\lambda}\tilde{u}_1)' = 0, \\ -\frac{\varepsilon^2}{2}(\tilde{\mu}\tilde{u}'_1)' + 4(\tilde{\lambda} + \tilde{\mu})\tilde{u}_1 + 2\tilde{\lambda}\tilde{u}'_0 = 0, \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} (\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})\tilde{u}'_0|_{\xi=1} + 2\tilde{\lambda}\tilde{u}_1|_{\xi=1} = \frac{2\tilde{P}_0 k}{\varepsilon^2}, \\ \tilde{\mu}\tilde{u}'_1|_{\xi=1} = 0, \\ \tilde{u}_i(0) = 0, \quad i = 0, 1. \end{cases} \quad (11)$$

Анализ задачи (10), (11) свидетельствует о том, что перемещения пропорциональны \tilde{P}_0 ,



поэтому положим в дальнейших расчётах $\tilde{P}_0 = 1$. Из краевой задачи (10), (11) получим следующие соотношения, связывающие искомые параметры Ламе:

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}(\xi) &= \alpha_1(\xi)\tilde{\mu}(\xi) + \beta_1(\xi), \\ \tilde{\mu}'(\xi) &= \alpha_2(\xi)\tilde{\mu}(\xi) + \beta_2(\xi),\end{aligned}\tag{12}$$

где

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -\frac{2\tilde{u}'_0}{\tilde{u}'_0 + 2\tilde{u}_1}, \quad \beta_1 = \frac{2k}{\varepsilon^2(\tilde{u}'_0 + 2\tilde{u}_1)}, \\ \alpha_2 &= \frac{-\varepsilon^2\tilde{u}''_1 + 8\tilde{u}_1(\alpha_1 + 1) + 4\alpha_1\tilde{u}'_0}{\varepsilon^2\tilde{u}'_1}, \quad \beta_2 = \frac{4\beta_1(2\tilde{u}_1 + \tilde{u}'_0)}{\varepsilon^2\tilde{u}'_1}.\end{aligned}$$

Ввиду отсутствия граничного условия для μ исходная задача восстановления является некорректно поставленной [7]. Для преодоления некорректности будем отыскивать μ в параметрической форме [8, 9]:

$$\tilde{\mu}(\xi) = \exp(\Phi(\xi)\mathbf{c}),\tag{13}$$

$\Phi(\xi) = (\varphi_1(\xi), \dots, \varphi_N(\xi))^T$ — вектор линейно независимых функций, $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_N)^T$ — вектор неизвестных коэффициентов.

Введём равномерную сетку $\{\xi_j\}_{j=1}^M$ и потребуем выполнения (13) в узлах ξ_j , что приводит к нелинейной системе относительно \mathbf{c} ($M > N$). При численной реализации система составляется в дискретных узлах ξ_j , выражения невязки $r_j(\mathbf{c})$ для которых примут следующий вид:

$$r_j(\mathbf{c}) = \exp(\Phi(\xi_j)\mathbf{c})(\Phi'(\xi_j)\mathbf{c} - \alpha_2(\xi_j)) - \beta_2(\xi_j), \quad j = \overline{1, M},\tag{14}$$

$\Phi'(\xi) = (\varphi'_1(\xi), \dots, \varphi'_N(\xi))^T$ — вектор производных базисных функций. Для предотвращения численного переполнения при экспоненциальной аппроксимации базисные функции и их производные нормируются.

Для построения решения (12) воспользуемся методом регуляризации А. Н. Тихонова [10], который базируется на минимизации функционала, с добавлением корректирующих слагаемых [11]:

$$\min_{\mathbf{c}} J(\mathbf{c}), \quad J(\mathbf{c}) = \|\mathbf{r}(\mathbf{c})\|_2^2 + \gamma_{reg}\|L\mathbf{c}\|_2^2 + \gamma_{diag}\|\mathbf{c}\|_2^2,\tag{15}$$

$\mathbf{r}(\mathbf{c}) = (r_1(\mathbf{c}), \dots, r_M(\mathbf{c}))^T$ — вектор невязок, γ_{reg} — параметр регуляризации, определяемый с помощью метода L -кривой [12–14], γ_{diag} — коэффициент стабилизации, отвечающий за предотвращение вырождения системы и подавление слишком больших значений c_i , L — регуляризатор второго порядка. Нормальные уравнения для (15) были получены с использованием итеративного метода Гаусса–Ньютона:

$$(J_r^T J_r + \gamma_{reg}L^T L + \gamma_{diag}I)\Delta\mathbf{c} = -J_r^T \mathbf{r}(\mathbf{c}) - \gamma_{reg}L^T L\mathbf{c} - \gamma_{diag}I\mathbf{c},$$

где

$$(J_r)_{jk} = \tilde{\mu}(\xi_j)\varphi'_k(\xi_j) + \tilde{\mu}(\xi_j)(\Phi'(\xi_j)\mathbf{c} - \alpha_2(\xi_j))\varphi_k(\xi_j),$$

I — единичная матрица. Добавление диагонального члена $\gamma_{diag}I$ эквивалентно регуляризации нулевого порядка и обеспечивает численную устойчивость решения.

Для оценки качества реконструкции был проведён ряд численных испытаний для функционально-градиентных материалов при различном M . В качестве базисных функций были выбраны шляпные функции, B -сплайны и полиномы Лежандра. Из анализа данных рис. 3 следует, что при приближении к защемлённой границе наблюдается рост погрешности восстановленных параметров. Отметим, что B -сплайны с P -сплайн штрафом второго порядка позволяют получить хорошие результаты реконструкции.

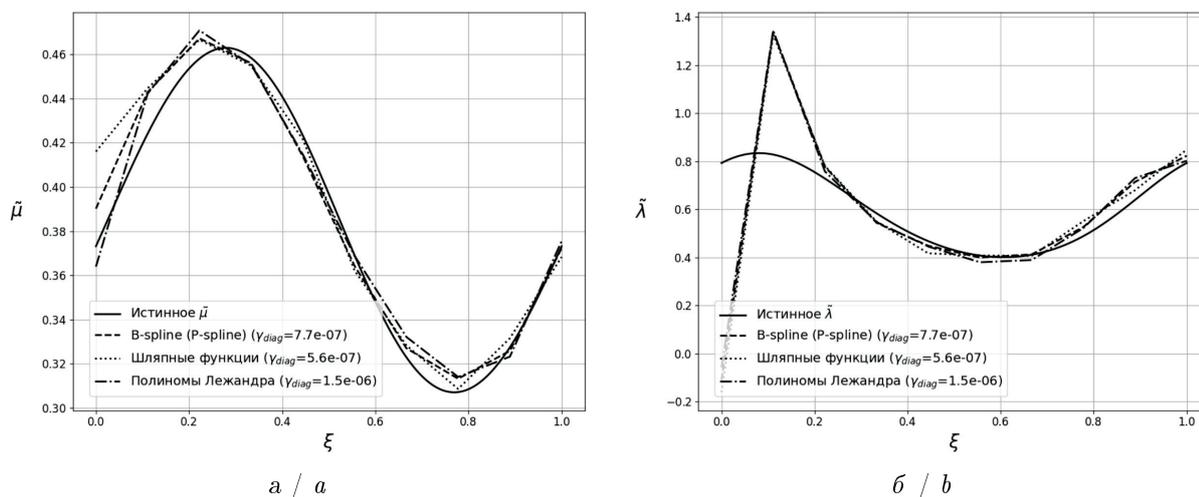


Рис. 3. Реконструкция безразмерных параметров Ламе для случая $\tilde{E} = 1 + 0.2 \sin(2\pi\xi)$, $\tilde{\nu}(\xi) = 0.3 + 0.04 \cos(2\pi\xi)$ при $M = 10$: a — параметр $\tilde{\mu}$; b — параметр $\tilde{\lambda}$
 Fig. 3. Reconstruction of the dimensionless Lamé parameters for the case $\tilde{E} = 1 + 0.2 \sin(2\pi\xi)$, $\tilde{\nu}(\xi) = 0.3 + 0.04 \cos(2\pi\xi)$ at $M = 10$: a is parameter $\tilde{\mu}$; b is parameter $\tilde{\lambda}$

Заключение

Рассмотрена задача о сжатии цилиндра с торцевым защемлением, где параметры Ламе либо постоянные, либо являются гладкими функциями осевой координаты. На основе гипотез относительно полей перемещений построены две приближённые модели: первого и второго порядка. Оценена их эффективность на основе сравнения с КЭ-расчётами. Представлена схема решения обратной задачи. Проведены вычислительные эксперименты.

Список литературы

1. *Filon L. N. G.* On the elastic equilibrium of circular cylinders under certain practical systems of load // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character. 1902. Vol. 198. P. 147–233. DOI: <https://doi.org/10.1098/rsta.1902.0005>
2. *Джанелидзе Г. Ю., Прокоров В. К.* Метод однородных решений в математической теории упругости // Труды IV Всесоюзного математического съезда. Ленинград : Наука, 1964. Т. 2. С. 551–557.
3. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Н.* Теория упругости. Москва : Наука, 1975. 576 с.
4. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. Москва : Наука, 1970. 512 с.
5. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближённые методы высшего анализа. Москва : ГИТТЛ, 1949. 696 с.
6. *Новацкий В.* Теория упругости. Москва : Мир, 1975. 872 с.
7. *Морозов В. А.* Методы регуляризации неустойчивых задач. Москва : Изд-во Московского ун-та, 1987. 216 с.
8. *Hyvönen N., Mustonen L.* Generalized linearization techniques in electrical impedance tomography // Numerische Mathematik. 2018. Vol. 140, iss. 1. P. 95–120. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00211-018-0959-1>
9. *Jin B., Maass P.* An analysis of electrical impedance tomography with applications to Tikhonov regularization // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. 2012. Vol. 18, iss. 4. P. 1027–1048. DOI: <https://doi.org/10.1051/cocv/2011193>
10. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. Москва : Наука, 1979. 288 с.
11. *Engl H. W., Hanke M., Neubauer A.* Regularization of inverse problems. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1996. 321 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-94-009-1740-8>
12. *Hansen P. C.* Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve // SIAM Review. 1992. Vol. 34, iss. 4. P. 561–580. DOI: <https://doi.org/10.1137/1034115>



13. Hansen P. C., O’Leary D. P. The use of the L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems // *SIAM Journal on Scientific Computing*. 1993. Vol. 14, iss. 6. P. 1487–1503. DOI: <https://doi.org/10.1137/0914086>
14. Hansen P. C. *Discrete inverse problems: Insight and algorithms*. Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics, 2010. 213 p. DOI: <https://doi.org/10.1137/1.9780898718836>

References

1. Filon L. N. G. On the elastic equilibrium of circular cylinders under certain practical systems of load. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 1902, vol. 198, pp. 147–233. DOI: <https://doi.org/10.1098/rsta.1902.0005>
2. Dzhanelidze G. Yu., Prokopov V. K. The method of homogeneous solutions in mathematical theory of elasticity. In: *Trudy IV Vsesoyuznogo matematicheskogo s’ezda* [Proceedings of the 4th All-Union Mathematical Congress]. Leningrad, Nauka, 1964, vol. 2, pp. 551–557 (in Russian).
3. Timoshenko S. P., Goodier J. N. *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Moscow, Nauka, 1975. 576 p. (in Russian).
4. Mikhlín S. G. *Variatsionnye metody v matematicheskoi fizike* [Variational methods in mathematical physics]. Moscow, Nauka, 1970. 512 p. (in Russian).
5. Kantorovich L. V., Krylov V. I. *Priblizhennyye metody vysshego analiza* [Approximate methods of higher analysis]. Moscow, GITTL, 1949. 696 p. (in Russian).
6. Novatskii V. *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Moscow, Mir, 1975. 872 p. (in Russian).
7. Morozov V. A. *Metody regulyaryzatsii neustoychivyykh zadach* [Methods for regularizing unstable problems]. Moscow, Moscow University Press, 1987. 216 p. (in Russian).
8. Hyvönen N., Mustonen L. Generalized linearization techniques in electrical impedance tomography. *Numerische Mathematik*, 2018, vol. 140, iss. 1, pp. 95–120. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00211-018-0959-1>
9. Jin B., Maass P. An analysis of electrical impedance tomography with applications to Tikhonov regularization. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 2012, vol. 18, iss. 4, pp. 1027–1048. DOI: <https://doi.org/10.1051/cocv/2011193>
10. Tikhonov A. N., Arsenin V. Ya. *Metody resheniya nekorrektnyykh zadach* [Methods for solving ill-posed problems]. Moscow, Nauka, 1979. 288 p. (in Russian).
11. Engl H. W., Hanke M., Neubauer A. *Regularization of inverse problems*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1996. 321 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-94-009-1740-8>
12. Hansen P. C. Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve. *SIAM Review*, 1992, vol. 34, iss. 4, pp. 561–580. DOI: <https://doi.org/10.1137/1034115>
13. Hansen P. C., O’Leary D. P. The use of the L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 1993, vol. 14, iss. 6, pp. 1487–1503. DOI: <https://doi.org/10.1137/0914086>
14. Hansen P. C. *Discrete inverse problems: Insight and algorithms*. Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2010. 213 p. DOI: <https://doi.org/10.1137/1.9780898718836>

Поступила в редакцию / Received 25.11.2025

Принята к публикации / Accepted 18.12.2025

Опубликована / Published 02.03.2026