



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 1. С. 56–67

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 1, pp. 56–67

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-56-67>

EDN: <https://elibrary.ru/MLCWLX>

Научная статья

УДК 617.713:539.3-004.942

## Особенности использования алгоритмов оптимизации для персонализации геометрических и биомеханических параметров модели роговицы

Лэ Ван Хоанг

Волгоградский государственный технический университет, Россия, 400005, г. Волгоград, пр. Ленина, д. 28

Лэ Ван Хоанг, аспирант кафедры сопротивления материалов, [hoangle.vol@gmail.com](mailto:hoangle.vol@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0002-1536-3061>, SPIN: 7569-2232, AuthorID: 1194083

**Аннотация.** Рассмотрены особенности персонификации конечно-элементной модели роговицы для диагностики ее биомеханических свойств при кератоконусе и прогнозирования результатов лечения. Ключевая проблема существующих моделей — использование усредненных параметров, не учитывающих индивидуальные особенности пациента и сложную структуру зон сниженной жесткости при кератоконусе. На основе клинических данных 256 глаз, полученных с помощью топографа Pentacam AXL и тонометра Corvis ST, разработана методика построения персонализированных 3D-моделей в COMSOL Multiphysics. Для описания поведения роговицы использована гиперупругая модель материала Yeoh, показавшая наименьшую погрешность при моделировании. При решении различных задач применены специализированные алгоритмы оптимизации: метод внутренней точки (ИРОРТ) — для определения корректной недеформированной конфигурации роговицы под внутриглазным давлением; алгоритм Левенберга–Марквардта — для идентификации параметров материала здоровой ткани по данным динамической пневмотонометрии; алгоритм Нелдера–Мида — для определения характеристик локальных областей сниженной жесткости, моделирующих кератоконус, по данным кератотопографии. Разработанная модель обеспечивает высокую точность персонализации биомеханических свойств и перспективна для планирования индивидуализированного лечения кератоконуса: среднеквадратичное отклонение геометрических параметров менее 0.1%, коэффициент корреляции расчетных и экспериментальных параметров деформации 0.94.

**Ключевые слова:** кератоконус, роговица, пациент-ориентированная модель, метод конечных элементов, гиперупругость, алгоритмы оптимизации, метод внутренней точки, алгоритм Левенберга–Марквардта, алгоритм Нелдера–Мида

**Благодарности:** Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 25-25-00303, <https://rscf.ru/project/25-25-00303/>).

**Для цитирования:** Лэ Ван Хоанг. Особенности использования алгоритмов оптимизации для персонализации геометрических и биомеханических параметров модели роговицы // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 1. С. 56–67. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-56-67>, EDN: MLCWLX

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Article

## Features of using optimization algorithms for personalizing the geometric and biomechanical parameters of the cornea model

Le Van Hoang

Volgograd State Technical University, 28 Lenin Ave., Volgograd 400005, Russia

Le Van Hoang, hoangle.vol@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-1536-3061>, SPIN: 7569-2232, AuthorID: 1194083

**Abstract.** This study explores the personalization of a 3D finite element model of the cornea for diagnosing its biomechanical properties in keratoconus and predicting treatment outcomes. A key limitation of existing models is their reliance on averaged parameters, which fail to account for individual patient variations and the presence/distribution of areas of reduced stiffness in keratoconus. Using clinical data from 256 eyes obtained with Pentacam AXL and Corvis ST, a methodology for building personalized 3D models in COMSOL Multiphysics was developed. The hyperelastic Yeoh material model, demonstrating the lowest error, was used. Specialized optimization algorithms were applied for different tasks. The Interior Point Optimizer (IPOPT) determined the undeformed configuration under intraocular pressure. The Levenberg-Marquardt algorithm identified the material parameters of healthy tissue based on Corvis ST dynamic tonometry data. Finally, the Nelder-Mead algorithm characterized local areas of reduced stiffness using corneal topography data. The model provides high accuracy, with root mean square deviation between modeled and measured geometric parameters below 0.1% and a correlation coefficient of 0.94 between modeled and measured deformation parameters.

**Keywords:** keratoconus, cornea, patient-specific model, finite element method (FEM), hyperelasticity, optimization algorithms, Interior Point Optimizer, Levenberg-Marquardt algorithm, Nelder-Mead algorithm

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 25-25-00303, <https://rscf.ru/project/25-25-00303/>).

**For citation:** Le Van Hoang. Features of using optimization algorithms for personalizing the geometric and biomechanical parameters of the cornea model. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 1, pp. 56–67 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-56-67>, EDN: MLCWLX

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

### Введение

Кератоконус — прогрессирующее невоспалительное заболевание роговицы, характеризующееся нарушением структуры коллагеновых фибрилл, локальным истончением и коническим выпячиванием роговицы. Оно преимущественно поражает молодых и людей среднего возраста, вызывая ухудшение зрения из-за неправильного астигматизма и высокой близорукости [1–3].

Точная диагностика биомеханических свойств роговицы при кератоконусе является критически важной задачей для понимания патогенеза заболевания и оценки его прогрессирования. Современные методы диагностики, включающие топографию роговицы с помощью Шаймпфлюг-анализаторов и бесконтактную тонометрию, обеспечивают высокоточные данные о геометрии роговицы и ее деформационных характеристиках [4, 5].

Применение компьютерного моделирования позволяет количественно оценивать биомеханические параметры роговицы на основе клинических данных. Исследования в области биомеханического моделирования роговицы делятся на несколько направлений, где роговица представляется как гиперупругая изотропная или анизотропная оболочка с зонами различной жесткости [6–9]. Например, в работах А. Пандольфи [9] анизотропные свойства роговицы описаны с использованием модифицированной модели Хольцапфеля, а Бао и др. [7]



использовали модель Огдена для описания механического поведения стромы роговицы и склеры, рассматривая их как гиперэластичный, изотропный и практически несжимаемый материал с различными характеристиками.

Однако существующие модели [1–9] имеют ряд ограничений для клинического применения. Для повышения диагностической ценности моделей важно более точно учитывать индивидуальные вариации биомеханических свойств роговицы, особенно локальное снижение жесткости ткани на различных стадиях кератоконуса. Это позволит улучшить точность расчетной диагностики и прогнозирования послеоперационных результатов.

Цель работы заключается в разработке алгоритмов персонализации 3D-конечно-элементной модели роговицы для цифровой диагностики индивидуальных биомеханических свойств при кератоконусе и прогнозирования эффективности лечения на основе данных клинического обследования пациента.

## 1. Экспериментальные данные и задачи исследования

Экспериментальные данные исследования включали результаты комплексного клинического обследования 256 глаз, разделенных на четыре группы в зависимости от стадии заболевания. Контрольную группу составили 174 глаза здоровых пациентов с нормальной роговицей различной рефракции, группы с кератоконусом включали: I стадия — 16 глаз, II стадия — 20 глаз, III стадия — 46 глаз.

Для получения топографических и томографических данных использовался Шаймпфлюг-анализатор Pentacam AXL (OCULUS Optikgerate GmbH, Германия), сканирующий роговицу с разрешением свыше 19 000 точек, с регистрацией карт высот, пахиметрии, кривизны и элевации задней поверхности. Биомеханические параметры определялись тонометром Corvis ST, измеряющим деформацию роговицы под воздушным импульсом. Верификация моделей осуществлялась с помощью оптической когерентной томографии роговицы высокого разрешения. Для оценки точности модели было проведено исследование локальной адаптации сетки, включающее постепенное уточнение сетки в местах с наибольшими ошибками. Критерием достижения сеточной сходимости служила амплитуда перемещения роговицы менее чем на 1% при дальнейшем увеличении плотности сетки.

Для определения биомеханических и геометрических параметров роговицы при кератоконусе исследование разделено на два этапа: 1) создание персонализированной 3D-модели роговицы с учетом внутриглазного давления и воздушного импульса на бесконтактном тонометре для определения недеформированной конфигурации и граничных условий; 2) идентификация свойств материала роговицы, включая параметры гиперупругой модели для интактных участков и зон пониженной жесткости при кератоконусе. На каждом этапе разработаны алгоритмы многопараметрической оптимизации для минимизации отклонений между расчетными и экспериментальными кератотопографическими и биомеханическими данными.

## 2. Основные уравнения и граничные условия

Геометрическая модель роговицы формируется на основе топографических и томографических данных кератотопографа Pentacam AXL. Исходные данные включают координаты точек передней и задней поверхностей роговицы в виде двумерных массивов (примерно 9300 и 7300 точек соответственно) [10, 11]. Трехмерная модель создается в COMSOL Multiphysics с использованием линейной интерполяции экспериментальных данных, где граничные поверхности аппроксимируются по заданным высотным координатам. Для решения задач задаются уравнения квазистатического равновесия

$$\nabla \cdot (FS)^T + f_V = 0,$$

где  $\nabla$  — оператор набла;  $T$  — символ транспонирования;  $f_V$  — вектор объемных сил;  $S$  — второй тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа;  $F$  — градиент деформации.



Материал роговицы считается гиперупругим, его закон деформирования задается соотношением функции плотности энергии упругой деформации  $W_s$  и второго тензора напряжений Пиолы – Кирхгофа  $S$  [12]:

$$S = S_{\text{ext}} + \frac{\partial W_s}{\partial E}, \quad (1)$$

где  $S_{\text{ext}}$  — тензор внешних (дополнительных) напряжений;  $E$  — тензор деформации Грина – Лагранжа.

Функция  $W_s$  может учитывать соотношения, соответствующие различным механизмам деформирования материала, [13]:

$$W_s = W_{\text{iso}} + W_{\text{vol}}, \quad (2)$$

где  $W_s$  — плотность энергии упругой деформации;  $W_{\text{iso}}$  — изотропная часть удельной энергии упругой деформации;  $W_{\text{vol}}$  — энергия объемной упругой деформации.

Общая постановка рассматриваемых задач задается системой уравнений равновесия и уравнений совместности деформаций в виде, приведенном в [10, 11], физическими соотношениями (1), (2), а также граничными условиями, заданными на соответствующих поверхностях  $\Gamma$  роговицы (рис. 1).

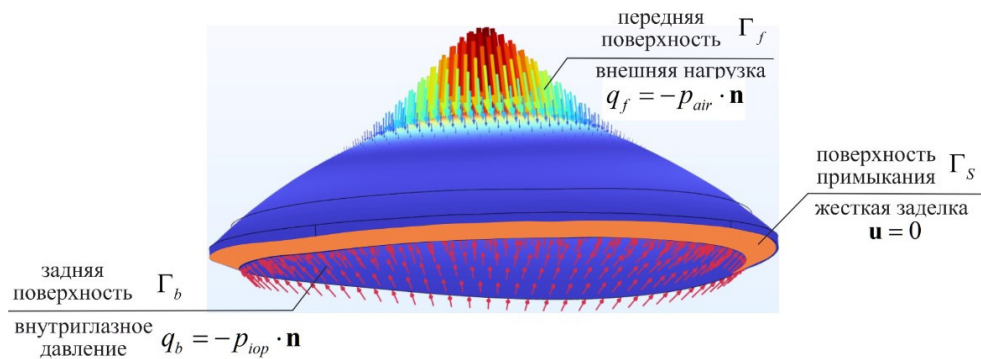


Рис. 1. Общий вид сечения геометрической модели роговицы, схема нагружения и закрепления граничных поверхностей при обследовании на приборе CORVIS (цвет онлайн)

Fig. 1. General view of the cross-section of the corneal geometric model, loading and boundary surface fixation scheme during examination with the CORVIS (color online)

1. Отсутствие перемещений на поверхностях  $\Gamma_S$ , примыкающей к склере:

$$u = 0, \quad \Gamma \in \Gamma_S. \quad (3)$$

2. Действие на задней поверхности роговицы поверхностно распределенной нагрузки интенсивностью  $q_b$  (вдоль составляющих вектора нормали  $n$ ):

$$S \cdot n = q_b, \quad \Gamma \in \Gamma_b. \quad (4)$$

3. Действие на передней поверхности роговицы поверхностно распределенной нагрузки интенсивностью  $q_f$

$$S \cdot n = q_f, \quad \Gamma \in \Gamma_f. \quad (5)$$

### 3. Алгоритмы и методы решения задачи

#### 3.1. Алгоритм построения начальной конфигурации модели роговицы

Экспериментальная геометрия роговицы, полученная на топографе Pentacam in vivo, отражает ее деформированное состояние под воздействием внутриглазного давления (ВГД).

Прямое использование такой конфигурации некорректно, поскольку приложение ВГД вызовет смещение точек от экспериментальных позиций. Исключение ВГД для сохранения экспериментальной геометрии устраняет соответствующие напряжения, снижая точность анализа.

В программном комплексе COMSOL Multiphysics для решения задачи используется модуль оптимизации геометрии передней и задней поверхностей роговицы. Критерий оптимизации заключается в соответствии поверхностей роговицы при воздействии ВГД экспериментальным данным координат с прибора топографии Pentacam. Тестовые расчеты показали, что наименьшая погрешность для различных алгоритмов оптимизации трехмерной модели [14] достигается при использовании метода внутренней точки (IPOINT – Interior Point Optimizer).

Согласно алгоритму исходная геометрия, полученная из данных кератотопографии пациента, итерационно корректируется в недеформированном состоянии, чтобы при воздействии ВГД деформированная конфигурация роговицы соответствовала экспериментальным данным с заданной точностью  $\epsilon$ . Целевая функция при этом определяется следующим образом:

$$F_x(y, z) = \int_{\Gamma_b} |X_s(y, z) - X_p(y, z)| dS + \int_{\Gamma_f} |X_s(y, z) - X_p(y, z)| dS \rightarrow \min, \quad (6)$$

где  $X_s(y, z)$  – экспериментальные высоты поверхности роговицы при топографии Pentacam;  $X_p(y, z)$  – соответствующие расчетные высоты поверхности роговицы.

Процедура идентификации начального состояния роговицы представлена на рис. 2.

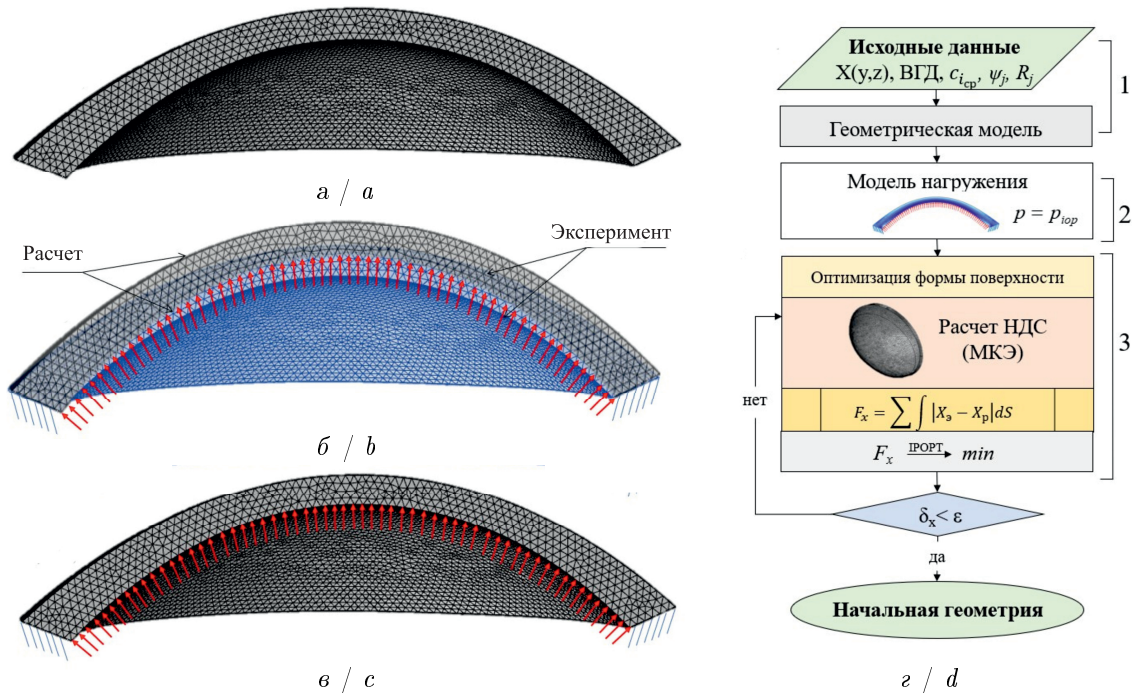


Рис. 2. Нахождение исходной формы роговицы: *a* – модель роговицы без давления; *b* – модель роговицы под действием ВГД с погрешностью  $\delta > 0.1\%$ ; *c* – модель роговицы под действием ВГД с погрешностью  $\delta < 0.1\%$ ; *d* – схема определения начального состояния роговицы (цвет онлайн)

Fig. 2. Determination of the initial corneal shape: *a* is the cornea model without pressure; *b* is the cornea model under the influence of IOP with an error  $\delta > 0.1\%$ ; *c* is the cornea model under the influence of IOP with an error  $\delta < 0.1\%$ ; *d* is the scheme for determining the initial state of the cornea (color online)



Она включает следующие шаги:

1) на основе данных кератотопографии (Pentacam AXL) создается индивидуальная 3D-модель роговицы (рис. 2, а) с заданием геометрических параметров (шаг 1, рис. 2, з):  $c_i = c_{i_{cp}}, \psi_j = R_j = 0$ ;

2) задается воздействие ВГД на заднюю поверхность  $\Gamma_b$  роговицы по (4), определяя форму под ВГД (шаг 2, рис. 2, д), которая может не совпадать с экспериментальными данными (рис. 2, б);

3) проводится оптимизация формы (шаг 3, рис. 2, з) методом внутренней точки по (7) с ограничениями  $D_{\max} = 0.2$  мм,  $R_{\min} = 0.02$  мм.

Начальная геометрия считается найденной, когда суммарное отклонение (6) расчетных и экспериментальных координат достигает  $\delta_x < \varepsilon = 0.1\%$  (рис. 2, в). Напряжения обнуляются, модель нагружается ВГД для расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) и обновления конфигурации поверхностей роговицы.

### 3.2. Алгоритм определения биомеханических свойств материала роговицы

Выбор модели гиперупругости (2) производится по результатам сопоставления расчетной амплитуды перемещения роговицы под действием пневматического импульса и экспериментальных данных обследования пациентов на пневмотонометре.

По результатам исследования в качестве базовой принята модель Yeoh, в рамках которой составляющие функции  $W_s$  в (2) могут быть записаны в виде

$$W_s = (1 - \psi_{kc}) \cdot [c_1(\bar{I}_1 - 3) + c_2(\bar{I}_1 - 3)^2 + c_3(\bar{I}_1 - 3)^3] + \frac{1}{2}\kappa(J_{el} - 1)^2, \quad (7)$$

где  $c_1, c_2, c_3$  — эмпирические параметры модели;  $\bar{I}_1$  — первый инвариант (след) тензора  $\bar{C}$ ;  $\bar{C}$  — изохорный упругий правый тензор деформации Коши–Грина;  $J_{el}$  — упругая объемная деформация;  $\kappa$  — модуль объемной упругости;  $\psi_{kc}$  — суммарное снижение жесткости в зоне кератоконуса.

Персонализация параметров ( $c_i$ ) модели материала (7) проводится на основе согласования расчетных данных о деформациях роговицы и клинических данных обследования пациента на пневмотонометре типа Corvis ST. Решается задача минимизации методом наименьших квадратов целевой функции, представляющей собой сумму квадратов отклонений расчетных значений от экспериментальных для амплитуды и скорости смещения в алексе:

$$F_{x_A}(c_i) = \sum [DA_s(t) - DA_p(t, c_i)]^2 \rightarrow \min, \quad (8)$$

где  $DA$  — перемещения точек роговицы при бесконтактной тонометрии во времени.

Минимизация выполняется при помощи алгоритма Левенберга–Марквардта для всех временных шагов путем поиска коэффициентов, обеспечивающих наилучшее соответствие расчетных кривых экспериментальным данным.

Для моделирования кератоконуса используется система локальных областей, для которых в выражении (7) задаются коэффициенты снижения жесткости материала (рис. 3) [11]:

$$\psi_{kc} = \sum \psi_j \cdot \exp \left[ \theta_{j_x} x^2 / a_{j_x}^2 + \theta_{j_y} y^2 / a_{j_y}^2 + \theta_{j_z} z^2 / a_{j_z}^2 \right], \quad (9)$$

где  $x_j, y_j, z_j$  — локальная система координат, связанная с центром  $j$ -й зоны пониженной жесткости — точкой  $S_j$ ;  $\psi_j$  — максимальное относительное снижение жесткости в точке  $S_j$ ;  $a_j, b_j, c_j$  — параметры, устанавливающие градиент изменения свойств по рассматриваемой области вдоль соответствующей оси.

Приняты следующие значения коэффициентов в (9):  $\theta_{j_x} = \theta_{j_y} = \theta_{j_z} = -0.693$ ;  $a_{j_x} = a_{j_y} = a_{j_z} = R_j$ , что соответствует 50%-му снижению значений функции  $\psi_j$  на расстоянии  $R_j$  от точки  $S_j$ .



Центры областей пониженной жесткости располагаются в пяти опорных точках: апексе ( $A_{pex}$ ), минимальной пахиметрии ( $P_{min}$ ), наибольшей задней элевации ( $e_{max}$ ), максимальной интенсивности деформаций ( $\varepsilon_{max}$ ), максимальной кривизны передней поверхности ( $K_{max}$ ), а также в 14 промежуточных — равноудаленных от опорных (всего 19 точек  $S_j$ ). За счет этого создается реалистичное распределение свойств в патологически измененной роговице (рис. 3, в).

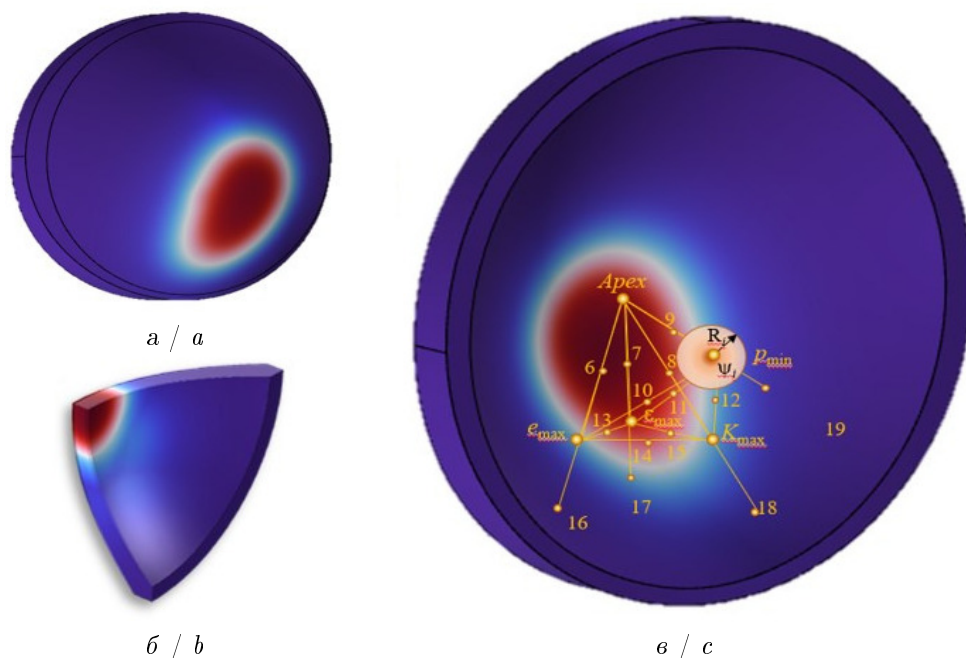


Рис. 3. Многоочаговая модель зоны пониженной жесткости в области кератоконуса в объеме роговицы по ее передней (а), задней (в) поверхностям и в сечениях по толщине (б) (цвет онлайн)

Fig. 3. The multifocal model of the zone of reduced stiffness in the area of keratoconus in the volume of the cornea along its anterior (a), posterior (c) surfaces and in the sections along the thickness (b) (color online)

Для определения параметров зоны кератоконуса (максимальное снижение жесткости и эффективный радиус  $R_j$ ) на основе данных тангенциальной кривизны передней поверхности роговицы был выбран алгоритм Нелдера – Мида. Это решение основано на сравнительном анализе (таблица), показавшем, что данный метод обеспечивает наименьшую погрешность в определении для условно здоровых роговиц ( $0.021 \pm 0.026$ ) и роговиц с кератоконусом (I стадия —  $0.077 \pm 0.028$ ; II стадия —  $0.186 \pm 0.047$ ; III стадия —  $0.394 \pm 0.01$ ) по сравнению с альтернативными алгоритмами оптимизации (COBYLA, BOBYQA, ММА и IPOPT).

Погрешность алгоритмов оптимизации параметров зоны пониженной жесткости  
Table. The error of the algorithms for optimizing the parameters of the reduced stiffness zone

Пац.	COBYLA		BOBYQA		Нелдер-Мид	
	$\psi_{max}^{cp} \pm \Delta\psi$	$R_k^{cp} \pm \Delta R_k$	$\psi_{max}^{cp} \pm \Delta\psi$	$R_k^{cp} \pm \Delta R_k$	$\psi_{max}^{cp} \pm \Delta\psi$	$R_k^{cp} \pm \Delta R_k$
Здор.	$0.147 \pm 0.075$	$3.31 \pm 0.46$	$0.106 \pm 0.072$	$2.72 \pm 1.03$	$0.021 \pm 0.026$	$2.62 \pm 0.53$
I ст.	$0.112 \pm 0.071$	$2.44 \pm 0.46$	$0.124 \pm 0.063$	$2.29 \pm 0.83$	$0.077 \pm 0.028$	$1.94 \pm 0.80$
II ст.	$0.347 \pm 0.147$	$2.52 \pm 1.52$	$0.231 \pm 0.031$	$2.80 \pm 1.20$	$0.186 \pm 0.047$	$1.75 \pm 0.69$
III ст.	$0.450 \pm 0.150$	$1.94 \pm 0.94$	$0.408 \pm 0.108$	$3.00 \pm 0.59$	$0.394 \pm 0.01$	$1.77 \pm 1.06$

При решении задачи выделяются ключевые этапы: определение области максимальной кривизны на топографической карте роговицы; задание начальных параметров зоны кератоконуса для моделирования его влияния на деформации роговицы; определение значений



$\psi_j$  и  $R_j$  методом Нелдера – Мида путем минимизации целевой функции, отражающей отклонение расчетной тангенциальной кривизны передней поверхности роговицы от данных кератотопографа Pentacam AXL:

$$F_K(\psi_j, R_j) = \sum [K_{t_s}(y, z) - K_{t_p}(y, z, \psi_j, R_j)]^2 \rightarrow \min, \quad (10)$$

где  $K_t$  — кривизна передней поверхности роговицы в зависимости от максимального относительного снижения жесткости  $\psi_j$  и радиуса  $R_j$ .

Полученный результат валидируется из сопоставления с объективными клиническими показателями — максимальное снижение упругих коэффициентов  $\psi_{\max}$ , максимальный эффективный радиус  $R_k$ .

На основе методов оптимизации, реализованных в COMSOL Multiphysics, разработан алгоритм расчета биомеханических параметров роговицы по формуле (7). Алгоритм состоит из двух модулей: определение параметров интактной ткани (рис. 4, блок А) и идентификация характеристик зон пониженной жесткости при кератоконусе (рис. 4, блок Б). Эта схема (рис. 4) учитывает нелинейную гиперупругость материала и индивидуальную геометрию роговицы.

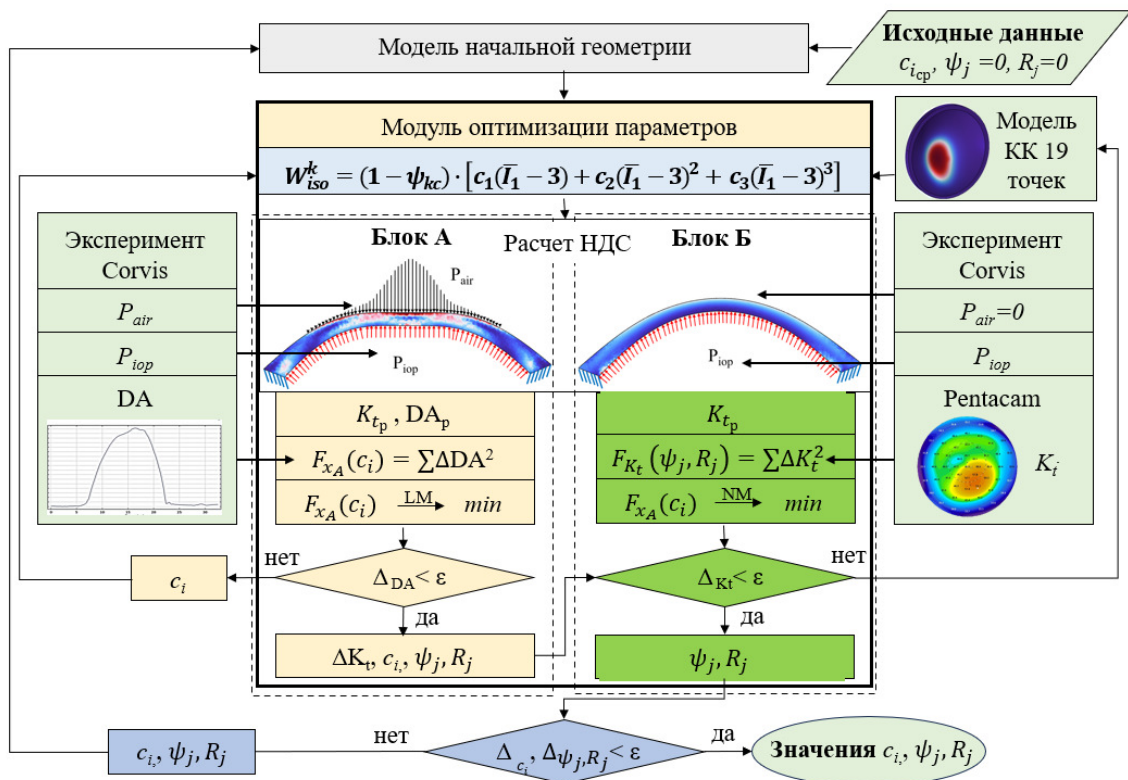


Рис. 4. Процедура определения биомеханических параметров роговицы  
 Fig. 4. Procedure for determining the biomechanical parameters of the cornea

В первом приближении механические характеристики материала назначаются по результатам серии предварительных расчетов как средние для здоровых роговиц ( $c_1 = 0.225$  МПа;  $c_2 = -28.3$  МПа;  $c_3 = 2460$  МПа,  $\psi_{kc} = 0$ ). Устанавливается начальное недеформированное состояние роговицы (см. рис. 3), производится ее нагружение ВГД и определяется начальное НДС материала.

### 3.3. Определение биомеханических параметров роговицы в здоровой части

На основе установленной конфигурации и начального напряженно-деформированного состояния роговицы решается обратная задача (3)–(5) о деформациях под воздействием воз-



душного импульса при тонометрии на приборе Corvis ST. Для минимизации целевой функции (8) с использованием параметров  $c_i$  применяется алгоритм Левенберга – Марквардта, при этом для здоровой роговицы параметры  $\psi_j, R_j$  принимаются равными нулю. На следующем этапе параметры здоровой ткани ( $c_i$ ) и предварительные характеристики зон кератоконуса ( $\psi_j, R_j$ ), полученные в блоке А (см. рис. 4), используются в блоке Б для обеспечения согласованности расчетов. Значения  $\psi_j, R_j$  задаются на основе клинических данных, учитывающих интенсивность деформаций, стадию кератоконуса и размер зоны минимальной толщины роговицы [13].

### 3.4. Поиск параметров в зоне пониженной жесткости кератоконуса

В блоке Б алгоритма (см. рис. 4) уточняются параметры  $\psi_j$  и  $R_j$  в формуле (7) с использованием многоочаговой модели кератоконуса (см. рис. 3), где радиус и степень снижения жесткости определяются для 19 локальных областей вокруг 5 ключевых точек роговицы (38 параметров). Обратная задача решается методом Нелдера – Мида путем минимизации целевой функции (10), отражающей отклонение расчетной тангенциальной кривизны от клинических данных. Затем коэффициенты модели Yeoh ( $c_1, c_2, c_3$ ) рекалибруются в блоке А с помощью алгоритма Левенберга – Марквардта. Окончательная верификация модели проводится путем сравнения расчетных и экспериментальных данных тонометра Corvis ST: максимальной амплитуды деформации, времени ее достижения, скорости деформации и распределения деформаций по роговице. Разработанный итерационный процесс (Блок А → Блок Б → Рекалибровка → Верификация) обеспечивает точное определение биомеханических параметров роговицы, учитывая индивидуальные особенности, и позволяет прогнозировать эффективность лечения кератоконуса.

## 4. Полученные результаты и их обсуждение

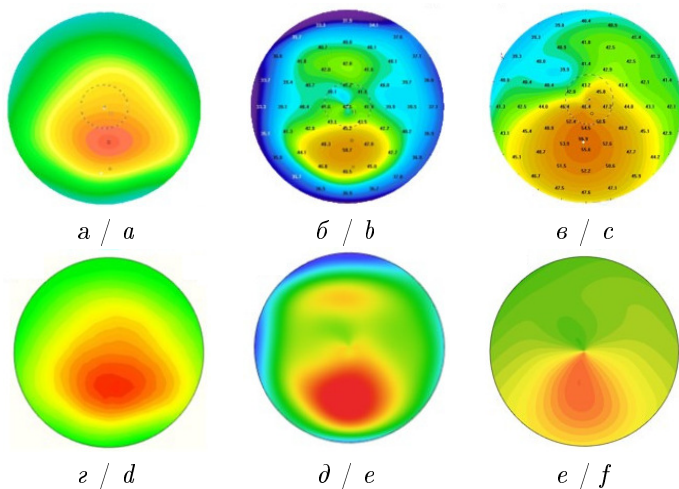


Рис. 5. Сопоставление экспериментальных (верхний ряд) и расчетных (нижний ряд) карт для передней поверхности роговицы:  $a, d$  — карты толщины;  $b, d$  — карты тангенциальной кривизны;  $c, e$  — карты сагиттальной кривизны (цвет онлайн)

Fig. 5. Comparison of experimental maps with calculated maps for the anterior corneal surface:  $a, d$  are the maps of thickness;  $b, e$  are maps tangential curvature;  $c, f$  are the sagittal curvature maps (color online)

Разработанная методика построения пациент-специфической трехмерной МКЭ-модели роговицы была верифицирована путем сравнения расчетных данных с клиническими измерениями для группы пациентов (различные стадии кератоконуса и здоровые роговицы). Анализ показал высокую точность соответствия геометрических параметров. Оптимизация недеформированной конфигурации алгоритмом IPOPT (радиус фильтра 0.02 мм, ограничение на максимальное перемещение 0.2 мм) требовала 48–56 итераций.

На рис. 5 приводятся экспериментальные и расчетные карты толщины, тангенциальной и сагиттальной кривизны передней поверхности роговицы левого глаза пациента Д. с кератоконусом II стадии.



При сравнении смоделированной геометрии передней поверхности роговицы с данными топографии Pentacam AXL (рис. 6) среднеквадратичное отклонение составило менее 0.1%, с максимальными отклонениями до 2 мкм в периферических зонах, что соответствует точности оборудования.

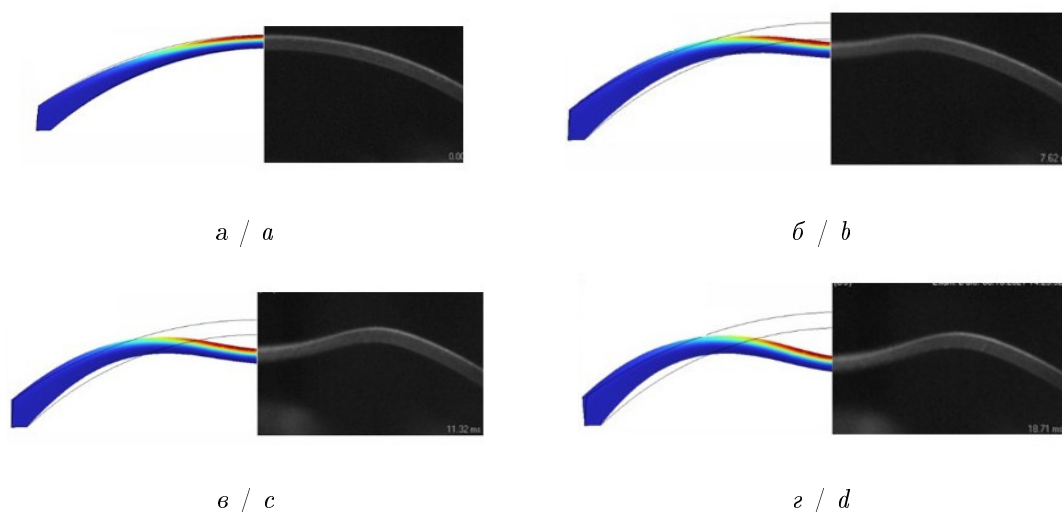


Рис. 6. Картины деформаций в сечении роговицы при:  $a$  — 0 мс;  $b$  — 7.62 мс;  $c$  — 11.3 мс;  $d$  — 18.7 мс (цвет онлайн)

Fig. 6. Deformation patterns in the section of the cornea at:  $a$  is for 0 ms;  $b$  is for 7.62 ms;  $c$  is for 11.3 ms;  $d$  is for 18.7 ms (color online)

Для задней поверхности отклонение составило менее 0.15%. Модель точно воспроизводит временные характеристики деформации роговицы, включая время, амплитуду и скорость восстановления формы, с коэффициентами корреляции 0.94 для здоровых роговиц и 0.91 для роговиц с кератоконусом, а максимальные отклонения не превышали 8.0%. Сравнение профилей роговицы с данными тонометра Corvis ST показало, что квазистатическая модель, игнорирующая колебания, обеспечивает точность амплитуды деформации в апексе до 1.0% благодаря оптимизационным алгоритмам, что делает ее эффективной для определения биомеханических свойств роговицы. Предложенная модель роговицы с использованием алгоритмов оптимизации ее параметров по общей точности соответствует известным решениям [1–9, 13], а по ряду параметров, таких как точность реконструкции координат поверхности и толщины роговицы (до 2 мкм), а также амплитуды ее перемещения при нагружении (с погрешностью до 3.0%), показывает статистически значимое улучшение.

## Выводы

Разработанная методика персонализации конечно-элементной 3D-модели роговицы при кератоконусе базируется на комплексном алгоритме численного анализа клинических данных (топографии Pentacam AXL и тонометра Corvis ST) пациента с помощью поэтапной итерационной процедуры. Последовательное определение параметров, начиная с недеформированной геометрии роговицы, затем свойств здоровой ткани и наконец параметров патологической области, позволяет корректно разделить влияние каждого фактора, избежать неопределенности в результатах и использовать для каждого из этапов наиболее эффективные методы оптимизации.

Выбор алгоритма оптимизации для персонализации модели роговицы напрямую зависит от специфики решаемой подзадачи. Для построения персонализированной модели роговицы на этапе определения недеформированной конфигурации, когда требуется оптимизация тысяч параметров при жестких ограничениях, наибольшую эффективность показал алгоритм внутренней точки IPOPT. Алгоритм Левенберга – Марквардта оптимально подходит



для идентификации параметров здоровой ткани на основе данных динамического отклика, чему соответствует небольшое количество искомых коэффициентов и минимизация гладкой функции. В то же время алгоритм Нелдера – Мида продемонстрировал наибольшую точность для параметризации зон кератоконуса (38 параметров по  $\psi_j$  и  $R_j$ ), где требуется работа с зашумленными топографическими данными. Финальная рекалибровка выполняется повторно методом Левенберга – Марквардта для согласования глобальных параметров модели.

### Список литературы

1. Flecha-Lescún J., Calvo B., Zurita J., Ariza-Gracia M. Á. Template-based methodology for the simulation of intracorneal segment ring implantation in human corneas // *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*. 2018. Vol. 17, iss. 4. P. 923–938. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10237-018-1013-z>
2. Cavas-Martínez F., Fernández-Pacheco D. G., De la Cruz-Sánchez E., Nieto Martínez J., Fernández Cañavate F. J., Vega-Estrada A., Plaza-Puche A. B., Alió J. L. Geometrical custom modeling of human cornea *in vivo* and its use for the diagnosis of corneal ectasia // *PLoS ONE*. 2014. Vol. 9, iss. 10. Art. e110249. DOI: <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0110249>
3. Elsheikh A., Whitford C., Hamarashid R., Kassem W., Joda A., Buechler P. Stress free conguration of the human eye // *Medical Engineering & Physics*. 2013. Vol. 35, iss. 2. P. 211–216. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.medengphy.2012.09.006>
4. Ariza-Gracia M. Á., Zurita J., Piñero D. P., Calvo B., Rodríguez-Matas J. F. Automatized patient-specific methodology for numerical determination of biomechanical corneal response // *Annals of Biomedical Engineering*. 2016. Vol. 44, iss. 5. P. 1753–1772. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10439-015-1426-0>
5. Eliasy A., Chen K. J., Vinciguerra R., Lopes B. T., Abass A., Vinciguerra P., Ambrósio R. Jr., Roberts C. J., Elsheikh A. Determination of corneal biomechanical behavior in-vivo for healthy eyes using CorVis ST tonometry: Stress-strain index // *Frontiers in Bioengineering and Biotechnology*. 2019. Vol. 7. Art. 105. DOI: <https://doi.org/10.3389/fbioe.2019.00105>
6. Nambiar M. H., Liechti L., Studer H., Roy A. S., Seiler T. G., Buechler P. Patient-specific finite element analysis of human corneal lenticules: An experimental and numerical study // *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*. 2023. Vol. 147. Art. 106141. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2023.106141>
7. Bao F., Wang J., Cao S., Liao N., Shu B., Zhao Y., Li Y., Zheng X., Huang J., Chen S., Wang Q., Elsheikh A. Development and clinical verification of numerical simulation for laser in situ keratomileusis // *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*. 2018. Vol. 83. P. 126–134. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2018.04.016>
8. Ebrahimian A., Mosaddegh P., Bagheri N. M., Pirhadi S. A simple numerical approach to mimic MyoRing surgery in keratoconus corneas based on optical coherence tomography // *EC Ophthalmology*. 2019. Vol. 10, iss. 5. P. 345–356.
9. Pandolfi A., Simonini I., Annaidh A. Ni. Numerical estimation of stress and refractive power maps in healthy and keratoconus eyes // *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*. 2022. Vol. 131. Art. 105252. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2022.105252>
10. Solodkova E. G., Maliugin B. E., Zaharov I. N., Le V. H., Fokin V. P., Balalin S. V., Lobanov E. V. Identification of the model parameters in cornea with keratoconus in terms of the numerical-experimental study of corneal geometry and mechanical behavior // *Russian Journal of Biomechanics*. 2023. Vol. 27, iss. 3. P. 53–64. DOI: <https://doi.org/10.15593/RJBiomech/2023.3.05>
11. Солодкова Е. Г., Малюгин Б. Э., Захаров И. Н., Багмутов В. П., Фокин В. П., Балалин С. В., Лобанов Е. В., Лэ В. Х. Разработка комплекса математических моделей биомеханических параметров роговицы с диагностированным кератоконусом до и после лечения кросслинкингом роговичного коллагена // *Российский журнал биомеханики*. 2022. Т. 26. № 3. С. 10–28. DOI: <https://doi.org/10.15593/RZhBiomech/2022.3.01>, EDN: HCQFDP
12. Holzapfel G. A. *Nonlinear solid mechanics: A continuum approach for engineering*. Chichester [etc.], John Wiley & Sons, LTD, 2000. 455 p.
13. Pandolfi A., Holzapfel G. A. Three-dimensional modeling and computational analysis of the human cornea considering distributed collagen fibril orientations // *Journal of Biomechanical Engineering*. 2008. Vol. 130, iss. 6. Art. 061006. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.2982251>
14. Ермакова Е. В., Рыжковская М. И. Влияние радиуса фильтра на оптимизацию формы обо-



лочки в COMSOL MULTIPHYSICS // Вестник гражданских инженеров. 2024. № 4. С. 23–34.  
DOI: <https://doi.org/10.23968/1999-5571-2024-21-4-23-34>, EDN: JKNEYK

## References

1. Flecha-Lescún J., Calvo B., Zurita J., Ariza-Gracia M. Á. Template-based methodology for the simulation of intracorneal segment ring implantation in human corneas. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, 2018, vol. 17, iss. 4, art. 923–938. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10237-018-1013-z>
2. Cavas-Martínez F., Fernández-Pacheco D. G., De la Cruz-Sánchez E., Nieto Martínez J., Fernández Cañavate F. J., Vega-Estrada A., Plaza-Puche A. B., Alió J. L. Geometrical custom modeling of human cornea *in vivo* and its use for the diagnosis of corneal ectasia. *PLoS ONE*, 2014, vol. 9, iss. 10, art. e110249. DOI: <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0110249>
3. Elsheikh A., Whitford C., Hamarashid R., Kassem W., Joda A., Büchler P. Stress free conguration of the human eye. *Medical Engineering & Physics*, 2013, vol. 35, iss. 2, pp. 211–216. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.medengphy.2012.09.006>
4. Ariza-Gracia M. Á., Zurita J., Piñero D. P., Calvo B., Rodríguez-Matas J. F. Automatized patient-specific methodology for numerical determination of biomechanical corneal response. *Annals of Biomedical Engineering*, 2016, vol. 44, iss. 5, pp. 1753–1772. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10439-015-1426-0>
5. Eliasy A., Chen K. J., Vinciguerra R., Lopes B. T., Abass A., Vinciguerra P., Ambrósio R. Jr., Roberts C. J., Elsheikh A. Determination of corneal biomechanical behavior *in-vivo* for healthy eyes using CorVis ST tonometry: Stress-strain index. *Frontiers in Bioengineering and Biotechnology* 2019, vol. 7, art. 105. DOI: <https://doi.org/10.3389/fbioe.2019.00105>
6. Nambiar M. H., Liechti L., Studer H., Roy A. S., Seiler T. G., Büchler P. Patient-specific finite element analysis of human corneal lenticules: An experimental and numerical study. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 2023, vol. 147, art. 106141. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2023.106141>
7. Bao F., Wang J., Cao S., Liao N., Shu B., Zhao Y., Li Y., Zheng X., Huang J., Chen S., Wang Q., Elsheikh A. Development and clinical verification of numerical simulation for laser *in situ* keratomileusis. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 2018, vol. 83, pp. 126–134. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2018.04.016>
8. Ebrahimian A., Mosaddegh P., Bagheri N. M., Pirhadi S. A simple numerical approach to mimic MyoRing surgery in keratoconus corneas based on optical coherence tomography. *EC Ophthalmology*, 2019, vol. 10, iss. 5, pp. 345–356.
9. Pandolfi A., Simonini I., Annaidh A. Ni. Numerical estimation of stress and refractive power maps in healthy and keratoconus eyes. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 2022, vol. 131, art. 105252. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2022.105252>
10. Solodkova E. G., Maliugin B. E., Zaharov I. N., Le V. H., Fokin V. P., Balalin S. V., Lobanov E. V. Identification of the model parameters in cornea with keratoconus in terms of the numerical-experimental study of corneal geometry and mechanical behavior. *Russian Journal of Biomechanics*, 2023, vol. 27, iss. 3, pp. 53–64. DOI: <https://doi.org/10.15593/RJBiomech/2023.3.05>
11. Solodkova E. G., Malyugin B. E., Zakharov I. N., Bagmutov V. P., Fokin V. P., Balalin S. V., Lobanov E. V., Le V. H. Development of a set of mathematical models of corneal biomechanical parameters with diagnosed keratoconus before and after treatment with corneal collagen cross-linking. *Russian Journal of Biomechanics*, 2022, vol. 26, iss. 3, pp. 6–22. DOI: <https://doi.org/10.15593/RJBiomech/2022.3.01>
12. Holzapfel G. A. *Nonlinear solid mechanics: A continuum approach for engineering*. Chichester [etc.], John Wiley & Sons, LTD, 2000. 455 p.
13. Pandolfi A., Holzapfel G. A. Three-dimensional modeling and computational analysis of the human cornea considering distributed collagen fibril orientations. *Journal of Biomechanical Engineering*, 2008, vol. 130, iss. 6, art. 061006. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.2982251>
14. Ermakova E. V., Rynkovskaya M. I. The effect of the filter radius on the shape optimization of a shell in COMSOL MULTIPHYSICS. *Bulletin of Civil Engineers*, 2024, iss. 4, pp. 23–34 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.23968/1999-5571-2024-21-4-23-34>, EDN: JKNEYK

Поступила в редакцию / Received 02.09.2025

Принята к публикации / Accepted 05.11.2025

Опубликована / Published 02.03.2026