



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 1. С. 68–80

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2026, vol. 26, iss. 1, pp. 68–80

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-68-80>

EDN: <https://elibrary.ru/MLDMKY>

Научная статья

УДК 519.634

Некоторые особенности начального этапа кавитационного движения кругового цилиндра под свободной поверхностью тяжелой жидкости

М. В. Норкин

Институт математики, механики и компьютерных наук имени И. И. Воровича, Южный федеральный университет, Россия, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, д. 8а

Норкин Михаил Викторович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики и математической физики, norkinmi@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9508-5996>, SPIN: 1638-4892, AuthorID: 110093

Аннотация. Рассматривается задача о начальном этапе вертикального и кавитационного движения кругового цилиндра под свободной поверхностью идеальной, несжимаемой, тяжелой жидкости. Изучается динамика образующейся присоединенной каверны на малых временах с учетом пограничных решений в точках отрыва. Данная задача считается корректно поставленной, если в точках отрыва выполняется условие Кутты–Жуковского, а давление в жидкости является положительной величиной. В общем случае задача рассматривается с учетом искусственной кавитации. При этом важную роль играет динамика точек отрыва, для учета которой делается специальная замена переменных, фиксирующая их положение. Исследуется вопрос о возможности представления решения преобразованной задачи в виде асимптотического разложения по целым степеням малого времени. Показывается, что искомое разложение, содержащее первые два члена асимптотики, существует только для определенных физических ситуаций. В случае самого простого закона искусственной кавитации, когда давление в каверне является постоянной величиной, эти ситуации характеризуются вполне определенным числом Фруда, которое равно единице. В общем случае степенную структуру решения преобразованной задачи на малых временах можно сохранить, если во втором асимптотическом приближении провести сглаживание соответствующей граничной функции. В работе уделяется большое внимание поведению внутренней свободной границы жидкости (границы каверны) вблизи точки отрыва. Показывается, что в главном приближении по времени эта граница подходит к точке отрыва под прямым углом (возникает корень квадратный из разности соответствующих угловых координат). Уточнение этого главного приближения для более умеренных времен приводит к различным картинам течения жидкости вблизи точки отрыва. В одних случаях сглаживающая квадратный корень кривая выходит из точки отрыва и располагается от нее только по одну сторону. В других случаях кривая вблизи точки отрыва расположена по разные стороны от нее.

Ключевые слова: идеальная несжимаемая жидкость, присоединенная каверна, точки отрыва, малые времена, асимптотика, пограничные решения, число Фруда, давление в каверне

Для цитирования: Норкин М. В. Некоторые особенности начального этапа кавитационного движения кругового цилиндра под свободной поверхностью тяжелой жидкости // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 1. С. 68–80. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-68-80>, EDN: MLDMKY

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Article

Some features of the initial stage of cavitation motion of a circular cylinder under the free surface of a heavy liquid

M. V. Norkin

Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences named after I. I. Vorovich, Southern Federal University, 8a Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia

Mikhail V. Norkin, norkinmi@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9508-5996>, SPIN: 1638-4892, AuthorID: 110093

Abstract. The problem of the initial stage of vertical and cavitation motion of a circular cylinder under the free surface of an ideal, incompressible, heavy fluid is considered. The dynamics of the attached cavity at short times is studied taking into account the boundary layer solutions at the separation points. The problem is considered to be correctly stated if the Kutta–Zhukovsky condition is satisfied at the separation points and the pressure in the liquid is a positive value. In the general case, the problem is considered taking into account artificial cavitation. In this case, an important role is played by the dynamics of the separation points, for which a special change of variables is made, fixing their position. The question of the possibility of representing the solution of the transformed problem as an asymptotic expansion in integer powers of short time is investigated. It is shown that the desired expansion containing the first two terms of the asymptotics exists only for certain physical situations. In the case of the simplest law of artificial cavitation, when the pressure in the cavity is a constant, these situations are characterized by a well-defined Froude number, which is equal to unity. In the general case, the power structure of the solution of the transformed problem at small times can be preserved if the corresponding boundary function is smoothed in the second asymptotic approximation. In this paper, much attention is paid to the behavior of the internal free boundary of the fluid (the boundary of the cavity) near the separation point. It is shown that in the leading approximation in time, this boundary approaches the separation point at a right angle (the square root of the difference of the corresponding angular coordinates arises). Refinement of this leading approximation for more moderate times leads to different patterns of fluid flow near the separation point. In some cases, the curve smoothing the square root comes out of the separation point and is located only on one side of it. In other cases, the curve near the separation point is located on different sides of it.

Keywords: ideal incompressible fluid, attached cavity, separation points, small times, asymptotics, boundary layer solutions, Froude number, cavity pressure

For citation: Norkin M. V. Some features of the initial stage of cavitation motion of a circular cylinder under the free surface of a heavy liquid. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 1, pp. 68–80 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-68-80>, EDN: MLDMKY

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Исследование начальной стадии движения твердого тела в жидкости, имеющей свободные границы, проводится в основном аналитическими методами, среди которых важную роль играет асимптотический анализ на малых временах. Большинство работ в этом направлении посвящено проблеме генерации волн движущимся в жидкости телом (подробная библиография приводится в [1, 2]). При этом считается, что явление кавитации представляет собой отдельную задачу и поэтому при анализе волновой картины не учитывается. Первые исследования по динамике кавитационного отрыва жидкости от тела на малых временах были проведены в статье [3], где рассматривалась задача о горизонтальном ударе кругового цилиндра, полупогруженного в жидкость. В ней положение точки отрыва после



удара определялось из условия Кутты – Жуковского, а давление в жидкости не должно было опускаться ниже некоторой маленькой положительной величины p_d , где p_d — давление насыщенных паров жидкости или газа. В дальнейшем этот результат был перенесен на задачу о горизонтальном разгоне кругового цилиндра под свободной поверхностью тяжелой жидкости [4]. В главном асимптотическом приближении при малых временах была сформулирована задача с односторонними ограничениями, обобщающая классическую модель удара с отрывом, поставленную в [5], на случай больших ускорений цилиндра (удару соответствуют бесконечно большие ускорения). Учет второго асимптотического приближения позволил определить формы присоединенных каверн в широком временном диапазоне.

В настоящей работе результаты статьи [4] обобщаются на случай вертикального движения кругового цилиндра в жидкости. В отличие от предыдущих работ автора, при рассмотрении конкретных примеров условие Кутты – Жуковского в точках отрыва обеспечивается не за счет выбора их положения в каждый момент времени, а за счет специального закона движения цилиндра. При этом динамика точек отрыва на малых временах задается произвольным образом. Осуществляется переход к преобразованной задаче, в которой положения точек отрыва являются фиксированными. Для этой задачи изучается вопрос о возможности представления ее решения в виде асимптотического разложения по целым степеням малого времени. Поскольку решение этого вопроса существенно зависит от выполнения условия Кутты – Жуковского в точках отрыва, то можно говорить о поиске таких физических ситуаций, при которых строго выполняется данное условие.

Такой вопрос изучался в статье [6] при дополнительном упрощающем предположении о неподвижности точек отрыва (в этом случае техническая работа сильно упрощается). Интересно отметить, что сформулированное с учетом динамики точек отрыва условие регулярности, обеспечивающее выполнение условия Кутты – Жуковского, совпадает с аналогичным условием работы [6]. При нарушении условия регулярности структуру решения задачи также можно сохранить, если во втором асимптотическом приближении провести сглаживание соответствующей граничной функции в маленьких окрестностях точек отрыва. Кроме этого, изучается поведение внутренней свободной границы жидкости (границы каверны) вблизи точки отрыва. Объясняется случай, когда свободная граница вблизи точки отрыва находится от нее по разные стороны. В задачах удара и разгона этот случай не рассматривался.

Среди близких работ, в которых важную роль играет явление кавитации, отметим следующие задачи: проникания тел в жидкость с учетом отрыва частиц жидкости от их поверхностей [7]; подводного старта ракет кавитационным способом [8]; экспериментальное изучение кавитации при ударном взаимодействии твердых тел с жидкостью [9, 10]. Общие принципы кавитационных течений при взаимодействии твердых тел с жидкостью изложены в [11, 12].

1. Постановка задачи

Исследуется плоская задача о начальном этапе движения кругового цилиндра под свободной поверхностью идеальной, несжимаемой, тяжелой жидкости. Предполагается, что движение цилиндра происходит из состояния покоя вдоль вектора силы тяжести по полиномиальному закону. При определенных условиях сразу после начала движения наблюдается отрыв частиц жидкости от поверхности тела и образуется присоединенная каверна. Существенное влияние на отрыв оказывают два фактора — начальное ускорение цилиндра и искусственная кавитация. Предполагается, что непосредственно перед началом движения на границе цилиндра (в предполагаемой зоне отрыва) создается определенное давление газа, поступающего со стороны тела. В случае больших значений давления газа кавитация может начинаться даже при небольшом начальном ускорении цилиндра. Требуется изучить



динамику каверны на малых временах с учетом погранслоинных решений в точках отрыва. Математическая постановка задачи, записанная в безразмерных переменных в подвижной системе координат, связанной с цилиндром, имеет вид (рис. 1, 2):

$$\Delta\Phi = 0, \quad R \in \Omega(t), \tag{1}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \dot{h}(t)n_y, \quad R \in S_{11}(t), \tag{2}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \dot{h}(t)\frac{\partial\Phi}{\partial y} + 0.5(\nabla\Phi)^2 + Fr^{-2}(y + h(t) - H) - 0.5\chi = 0, \quad R \in S_{12}(t), \tag{3}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \dot{h}(t)\sin\theta = \frac{\partial\eta}{\partial\theta}\dot{\theta}(t) + \frac{\partial\eta}{\partial t}, \quad R \in S_{12}(t), \tag{4}$$

$$\dot{\theta}(t) = r^{-2}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} - r^{-1}\dot{h}(t)\cos\theta,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \dot{h}(t)\frac{\partial\Phi}{\partial y} + 0.5(\nabla\Phi)^2 + Fr^{-2}\xi(x, t) = 0, \quad R \in S_2(t), \tag{5}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial t}, \quad R \in S_2(t), \tag{6}$$

$$\nabla\Phi \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty, \tag{7}$$

$$\Phi(x, y, 0) = 0, \quad \eta(\theta, 0) = 0, \quad \xi(x, 0) = 0, \tag{8}$$

$$h(t) = -0.5t^2 - 0.25pt^4. \tag{9}$$

Задача (1)–(9) содержит следующие характерные физические величины:

$$Fr = \sqrt{\frac{w}{g}}, \quad \chi = 2\frac{p_a - p_c}{\rho wa}.$$

где Fr — число Фруда, связанное с начальным ускорением цилиндра w ; g — ускорение силы тяжести; χ — безразмерная разность давлений на внешней свободной поверхности и в каверне; ρ — плотность жидкости; p_a — атмосферное давление; p_c — давление в каверне (допускается зависимость p_c от времени и угловой координаты); a — радиус цилиндра.

Безразмерные переменные вводятся с помощью равенств (штрихами помечаются размерные величины):

$$t' = \sqrt{\frac{a}{w}}t, \quad x' = ax, \quad y' = ay, \\ \Phi' = a\sqrt{wa}\Phi, \quad p' = \rho wap.$$

Связь неподвижных координат X, Y с подвижными x, y устанавливается при помощи соотношений: $X = x, Y = y + h(t)$, где $h(t)$ — закон движения цилиндра. Картина течения жидкости является симметричной относительно оси y , которая направлена против вектора силы тяжести. Начало подвижной системы координат находится в центре цилиндра.

В работе также используются следующие обозначения: $\Omega(t)$ — область, занятая жидкостью; $S_{11}(t)$ — часть поверхности цилиндра, на которой происходит безотрывное обтекание; $S_{12}(t)$ — внутренняя свободная граница жидкости; $S_2(t)$ — внешняя свободная поверхность

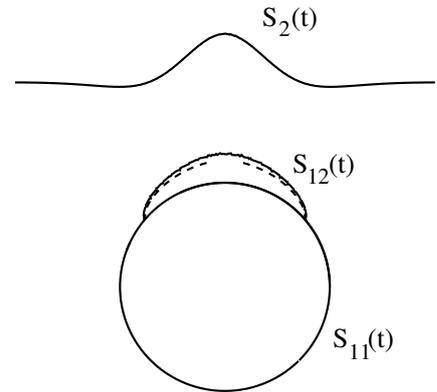


Рис. 1. Согласование погранслоинных решений (пунктирные линии) с внешним разложением при $t = 0.4$. Случай, когда кривая расположена только по одну сторону от точки отрыва. Условие регулярности выполнено

Fig. 1. Agreement of boundary layer solutions (dashed lines) with the outer expansion at $t = 0.4$. The case when the curve is located only on one side of the separation point. The regularity condition is satisfied

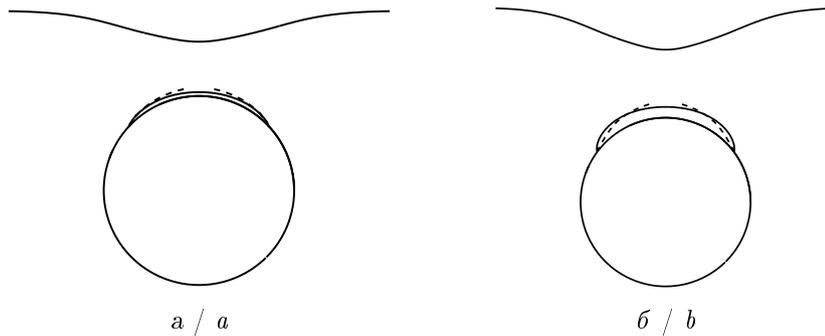


Рис. 2. Согласование погранслойных решений с внешним разложением: а — при $t = 0.4$; б — при $t = 0.6$. Случай, когда кривая расположена только по одну сторону от точки отрыва. Условие регулярности нарушено

Fig. 2. Agreement of boundary layer solutions with the outer expansion: а is at $t = 0.4$; б is at $t = 0.6$. The case when the curve is located only on one side of the separation point. The regularity condition is violated

($y = H$ — ее невозмущенный уровень); $\theta_s(t)$, $\pi - \theta_s(t)$ — угловые координаты симметричных точек отрыва; r, θ — полярные координаты ($x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$); $R = (x, y)$.

Формы внутренней и внешней свободных границ жидкости определяются с помощью равенств:

$$r = 1 + \eta(\theta, t), \quad y = H + \xi(x, t) - h(t).$$

Объясним смысл параметра p в законе движения цилиндра. При $p > 0$ цилиндр движется быстрее, чем при чистом разгоне ($p = 0$). Благодаря этому становятся интересными и физически оправданными случаи, когда точки отрыва движутся в разные стороны (для движения точек отрыва в разные стороны при $p = 0$ необходимо искусственно создать большое давление в каверне, которое уменьшается с увеличением p). Однако при заданном p и фиксированных остальных параметрах задачи закон движения точек отрыва на малых временах не является произвольным. Положение точек отрыва в каждый момент времени выбирается таким образом, чтобы в них выполнялось условие Кутты–Жуковского. Последнее равносильно специальному выбору начального ускорения точки отрыва $2c_1$. Таким образом, по заданному p определяется величина c_1 . Можно поставить и обратную задачу, в которой по известному c_1 находится p . Как будет показано ниже, величины p и c_1 связаны простым линейным соотношением, и, следовательно, перейти от одной постановки задачи к другой весьма просто. Отметим, что при рассмотрении конкретных примеров заданной считается величина c_1 . По ней однозначно определяется p из условия Кутты–Жуковского. Для остальных p корректного с физической точки зрения решения задачи не существует, так как нарушается условие Кутты–Жуковского. Таким образом, при произвольном законе движения цилиндра (в случае заданной динамики точек отрыва) решения не существует.

2. Асимптотический анализ на малых временах

Поскольку отрыв жидкости происходит сразу по конечному участку поверхности тела, то можно считать, что в начальный момент времени уже имеются две симметричные точки отрыва с угловыми координатами $\theta_s = \theta_s(0)$, $\pi - \theta_s$. Чтобы учесть динамику точек отрыва при $t > 0$, предлагается сделать замену переменной по угловой координате, фиксирующую их положение:

$$\alpha = \frac{\pi - 2\theta_s}{\pi - 2\theta_s(t)} [\theta - \theta_s(t)] + \theta_s.$$

При такой замене точки отрыва с угловыми координатами $\theta_s(t)$, $\pi - \theta_s(t)$ перейдут в точки с угловыми координатами θ_s , $\pi - \theta_s$, соответствующие их начальному положению.



Решение преобразованной задачи будем искать в виде следующих асимптотических разложений:

$$\varphi(\alpha, r, t) = t\varphi_0(\alpha, r) + t^3\varphi_1(\alpha, r) + \dots, \quad (10)$$

$$\zeta(\alpha, t) = t^2\zeta_0(\alpha) + t^4\zeta_1(\alpha) + \dots, \quad (11)$$

$$\xi(x, t) = t^2\xi_0(x) + t^4\xi_1(x) + \dots, \quad (12)$$

$$\theta_s(t) = \theta_s + c_1t^2 + \dots, \quad (13)$$

где введены новые обозначения:

$$\varphi(\alpha, r, t) = \Phi(r \cos \theta(\alpha, t), r \sin \theta(\alpha, t), t), \quad \zeta(\alpha, t) = \eta(\theta(\alpha, t), t).$$

В дальнейшем считаем, что величина χ имеет следующее представление:

$$\chi = \chi_0 + t^2\chi_1 + t^2\chi_2f(\theta).$$

Поскольку на малых временах $\theta \sim \alpha$, то в рассматриваемом асимптотическом приближении $f(\theta)$ можно заменить на $f(\alpha)$. В качестве $f(\alpha)$ можно взять любую четную относительно $\alpha = 0.5\pi$ функцию, производная которой имеет корневые особенности в точках отрыва. Дальнейшие рассуждения удобно провести для конкретной функции $f(\alpha) = \zeta_0(\alpha) \sin \alpha$.

Подставляя (10)–(13) в преобразованную задачу, осуществляя стандартную процедуру переноса краевых условий с возмущенных участков границы области на их первоначально невозмущенный уровень и приравнивая величины при одинаковых степенях t , приходим для определения функций φ_0 и φ_1 к смешанным краевым задачам в области $\Omega(0)$ (во всех математических постановках на бесконечности ставится условие затухания). Задача для φ_0 дополняется граничными условиями типа неравенств, которые не являются прямым следствием проведенных рассуждений:

$$\Delta\varphi_0 = 0, \quad R \in \Omega(0); \quad \varphi_0 = 0, \quad y = H, \quad (14)$$

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial r} = -\sin \alpha, \quad 0.5\chi_0 + Fr^{-2}(H - \sin \alpha) - \varphi_0 \geq 0, \quad R \in S_{11}(0), \quad (15)$$

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial r} \geq -\sin \alpha, \quad 0.5\chi_0 + Fr^{-2}(H - \sin \alpha) - \varphi_0 = 0, \quad R \in S_{12}(0). \quad (16)$$

Неравенство в (15) означает, что в главном приближении по времени давление в зоне контакта не может опускаться ниже давления в каверне (получается на основании интеграла Коши – Лагранжа). Неравенство в (16) является следствием того факта, что внутренняя свободная граница жидкости не может входить внутрь твердого тела. Для получения последнего неравенства нужно в соотношение $\zeta(\alpha, t) \geq 0$ подставить разложение (11), затем разделить обе части на t^2 и устремить t к нулю. В результате приходим к соотношению $\zeta_0(\alpha) \geq 0$, которое равносильно неравенству в (16). Явное выражение для функции $\zeta_0(\alpha)$ получается на основании асимптотического анализа кинематического уравнения внутренней свободной границы жидкости. На основе решения задачи (14)–(16) определяются первоначальная зона отрыва частиц жидкости $S_{12}(0)$ и угловые координаты симметричных точек отрыва: θ_s и $\pi - \theta_s$. Важной особенностью задачи с односторонними ограничениями является регулярность ее решения в точках отрыва. Отсюда следует выполнение условия Кутты – Жуковского в главном асимптотическом приближении по времени. Заметим, что на основании неравенства в (15) условие положительности давления также будет выполнено. Таким образом, в главном приближении важные физические условия выполняются.

Для функции φ_1 возникает уравнение Пуассона, которое сводится к уравнению Лапласа при помощи замены, предложенной при исследовании задачи о вертикальном ударе плавающего кругового цилиндра [13]:

$$\varphi_1 = c \frac{\partial\varphi_0}{\partial\alpha}(\alpha - 0.5\pi) + u, \quad c = -\frac{2c_1}{\pi - 2\theta_s},$$

где функция u определяется решением следующей задачи:

$$\Delta u = 0, \quad R \in \Omega(0), \quad (17)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -p \sin \alpha, \quad R \in S_{11}(0), \quad (18)$$

$$3u = k_1 \zeta_0(\alpha) \sin \alpha - 4\zeta_0^2(\alpha) - 0.5(1 - Fr^{-2})^2 \cos^2 \alpha + k_2, \quad R \in S_{12}(0), \quad (19)$$

$$k_1 = 1 - Fr^{-2} + 0.5\chi_2, \quad k_2 = 0.5(1 + Fr^{-2}) + 0.5\chi_1,$$

$$3u = -c \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} x (\alpha - 0.5\pi) - 0.5 \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} (\xi_0(x) + 1.5) - Fr^{-2} \xi_0(x), \quad y = H. \quad (20)$$

Для коэффициентов асимптотических разложений (11)–(12) справедливы равенства, которые выполняются при $r = 1$ и $y = H$ соответственно:

$$2\zeta_0(\alpha) = \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + \sin \alpha,$$

$$4\zeta_1(\alpha) = \frac{\partial u}{\partial r} + p \sin \alpha + 4c(\alpha - 0.5\pi)\zeta_0'(\alpha) - 2\zeta_0^2(\alpha) - (1 - Fr^{-2})(\zeta_0(\alpha) \cos \alpha)',$$

$$2\xi_0(x) = \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}, \quad 4\xi_1(x) = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial y} c(\alpha - 0.5\pi)H.$$

Дальнейшие рассуждения основаны на предположении о том, что производная функция φ_1 по α со стороны зоны контакта (так же, как и нормальная производная этой функции со стороны зоны отрыва) имеет корневые особенности в точке отрыва. Используя представление функции u в виде

$$u = pv + w + cq,$$

выберем параметр $p = p(c_1)$ в законе движения цилиндра так, чтобы коэффициент при указанном растущем члене обратился в ноль. В результате дело сводится к вычислению пределов:

$$p = -a_2^{-1} (c[(\theta_s - 0.5\pi)a_1 + a_4] + a_3),$$

$$a_1 = \lim_{\alpha \rightarrow \theta_s - 0} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \alpha^2} \sqrt{\theta_s - \alpha}, \quad a_2 = \lim_{\alpha \rightarrow \theta_s - 0} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \sqrt{\theta_s - \alpha},$$

$$a_3 = \lim_{\alpha \rightarrow \theta_s - 0} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \sqrt{\theta_s - \alpha}, \quad a_4 = \lim_{\alpha \rightarrow \theta_s - 0} \frac{\partial q}{\partial \alpha} \sqrt{\theta_s - \alpha}.$$

Отметим, что для справедливости проведенных рассуждений необходимо потребовать, чтобы граничная функция в (19) была непрерывно дифференцируемой в точках отрыва. Анализ этой функции показывает, что сама она является непрерывной в этих точках, а ее первая производная имеет в них корневые особенности. Эти особенности содержатся только в первом слагаемом этой функции. Таким образом, если потребовать, чтобы коэффициент k_1 обратился в ноль, то рассматриваемая граничная функция будет непрерывно дифференцируемой в точках отрыва. В результате приходим к условию регулярности

$$1 - Fr^{-2} + 0.5\chi_2 = 0.$$

Это условие оправдывает степенной характер вторых членов асимптотических разложений (10)–(13). В случае самого простого закона искусственной кавитации, когда $\chi_1 = 0$ и $\chi_2 = 0$, условие регулярности принимает вид $Fr = 1$. Отметим, что в этом случае давление в каверне является постоянной величиной и χ можно интерпретировать как число кавитации.

Здесь интересно провести сравнение с горизонтальным разгоном цилиндра. Используя результаты статьи [4], можно убедиться в том, что при горизонтальном разгоне цилиндра



не удастся получить условие регулярности в простой физической форме, потому что одного числа Фруда не хватает, чтобы обеспечить регулярность соответствующей граничной функции сразу в двух несимметричных точках отрыва. Это можно сделать только при очень специальном законе искусственной кавитации.

При нарушении условия регулярности степенной характер вторых членов разложений (10)–(13) также можно сохранить, если сгладить граничную функцию (19) в маленьких окрестностях точек отрыва. Наконец заметим, что при численной реализации используется слабая вариационная постановка задачи в интегральной форме, которая сама по себе осуществляет сглаживание. Таким образом, при численной реализации можно даже не менять вид функции (19). Последнее подтверждается хорошей работой численных алгоритмов для различных примеров. Обратим внимание на то, что аналогичные рассуждения справедливы и при горизонтальном разгоне цилиндра [4].

3. Решения типа пограничного слоя

В этом параграфе будут использоваться следующие асимптотические формулы ($\alpha \rightarrow \theta_s + 0$):

$$\zeta_0(\alpha) \sim \beta\sqrt{\alpha - \theta_s}, \quad \zeta'_0(\alpha) \sim \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha - \theta_s}}, \quad 4\zeta_1(\alpha) \sim \frac{\beta \cdot \beta_1}{\sqrt{\alpha - \theta_s}}, \quad (21)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} + t \sin \alpha \sim t \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + \sin \alpha \right) \sim 2\beta t \sqrt{\alpha - \theta_s}, \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial \alpha} \sim -Fr^{-2} \cos \theta_s, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} \sim 2c_1 t, \quad (22)$$

где производные функций φ и φ_0 берутся при $r = 1$, коэффициент β находится численно на основе первой формулы (21), а коэффициент β_1 имеет вид

$$\beta_1 = c_1 - 0.5(1 - Fr^{-2}) \cos \theta_s.$$

Рассмотрим преобразованное кинематическое уравнение внутренней свободной границы жидкости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \dot{h}(t) \sin \theta(\alpha, t) &= \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \right)^{-1} \dot{\theta}(t) + \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \right)^{-1} \frac{\partial \theta}{\partial t}, \\ \dot{\theta}(t) &= [1 + \zeta(\alpha, t)]^{-2} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \right)^{-1} - \dot{h}(t) (1 + \zeta(\alpha, t)) \cos \theta(\alpha, t) \right]. \end{aligned}$$

Учитывая (21)–(22), приведем последнее уравнение к виду

$$2\beta t \sqrt{\alpha - \theta_s} = -2t\beta_1 \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} + \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \quad (23)$$

Решение уравнения (23), содержащего только одну неизвестную функцию $\zeta(\alpha, t)$, будем искать в форме

$$\zeta(\alpha, t) = \beta t^3 H(\tau) + \dots, \quad \tau = \frac{\alpha - \theta_s}{t^2}. \quad (24)$$

Подставляя этот проект решения в (23), переходя всюду к погранслошной переменной τ и приравнивая величины при одинаковых степенях t (при t^2), приходим в главном асимптотическом приближении к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка с нулевым начальным условием и условием срачивания с внешним разложением на бесконечности:

$$(\tau + \beta_1)H'(\tau) - 1.5H(\tau) = -\sqrt{\tau}, \quad H(0) = 0, \quad H(\tau) \sim \sqrt{\tau} + \frac{\beta_1}{4\sqrt{\tau}} + \dots, \tau \rightarrow \infty.$$

В дальнейшем важную роль играет знак параметра β_1 . При $\beta_1 < 0$ решение последней задачи имеет вид

$$H(\tau) = \frac{2}{3|\beta_1|} \tau^{1.5}, 0 < \tau < |\beta_1|; \quad H(\tau) = \frac{2}{3|\beta_1|} [\tau^{1.5} - (\tau - |\beta_1|)^{1.5}], \quad |\beta_1| < \tau < \infty. \quad (25)$$

Решения типа пограничного слоя (24)–(25) встречаются во многих работах автора [3, 4, 6, 13]. Они очень хорошо согласуются с внешним разложением в широком диапазоне изменения угловой координаты, а также в широком временном диапазоне. Таким образом, случай $\beta_1 < 0$ никаких сомнений не вызывает, поэтому основное внимание нужно сосредоточить на случае $\beta_1 > 0$. Сразу отметим, что здесь решение обыкновенного дифференциального уравнения для функции $H(\tau)$, удовлетворяющее нулевому начальному условию, не может рассматриваться в качестве погранслоя, так как соответствующая кривая оказывается внутри круга. При этом другое решение этого уравнения, удовлетворяющее условию срачивания, существует и очень хорошо согласуется с внешним разложением (11):

$$H(\tau) = \frac{2}{3\beta_1} [(\tau + \beta_1)^{1.5} - \tau^{1.5}]. \quad (26)$$

При $\alpha = \theta_s$ между последним решением и границей тела возникает зазор, который означает, что внутренняя свободная граница жидкости продолжается за точку отрыва. Решение типа пограничного слоя при $\alpha < \theta_s$ может быть получено с помощью рассуждений, аналогичных тем, которые проводились при $\alpha > \theta_s$ ($\beta_1 < 0$). Отличие состоит в том, что вместо первой асимптотической формулы в (22) нужно использовать граничное условие в зоне контакта (15) (в главном приближении точки, принадлежащие свободной границе, сносятя вдоль радиуса в зону контакта на границе тела). В результате возникает уравнение (23), левая часть которого равна нулю. Его решение будем искать в форме (24), где в выражении для погранслоя переменной τ нужно поставить знак минус. В качестве дополнительного условия формулируется условие гладкой стыковки (класса C^1) с решением (24), (26) при $\alpha = \theta_s$. Искомое решение имеет вид

$$\zeta(\alpha, t) = \frac{2\beta}{3\beta_1} t^3 (\beta_1 - \tau_1)^{1.5}, \quad \tau_1 = \frac{\theta_s - \alpha}{t^2}. \quad (27)$$

Заметим, что кривая, определяемая решением (27), касается границы тела в точке с угловой координатой $\alpha = \theta_s - \beta_1 t^2$ (здесь также имеет место стыковка класса C^1). Таким образом, функция (27) является естественным продолжением решения (24), (26) в область $\alpha < \theta_s$. Обратим внимание на то, что в этом случае точка отрыва оказывается внутри каверны. Однако рассуждения, основанные на выполнении условия Кутты–Жуковского, здесь сохраняются, так как в главном приближении кривая подходит к точке отрыва под прямым углом, без поворота свободной границы (возникает корень квадратный из разности соответствующих угловых координат). Построенные выше погранслоя решения подправляют это главное приближение для более умеренных времен. Остановимся на этом вопросе более подробно. Переходя в решении (24), (26) от переменной τ к переменной t и используя формулу Тейлора при малых t , придем к разложению

$$\zeta(\alpha, t) = \beta t^2 \sqrt{\alpha - \theta_s} + \frac{\beta\beta_1}{4} t^4 (\alpha - \theta_s)^{-0.5} + \dots$$

Видно, что функция $\zeta(\alpha, t)$ хорошо согласуется (срачивается) с первым членом этого разложения при достаточно малых t во внешности некоторой окрестности точки отрыва. При этом указанная окрестность может быть сделана сколь угодно малой за счет малости t . Аналогичным образом ведет себя решение (24), (25) при достаточно малых t . Можно провести другие рассуждения, показывающие, что интересующая нас функция (корень



квадратный) может быть получена как решение дифференциального уравнения внутренней свободной границы жидкости, но при рассмотрении более низких порядков по времени (что неудивительно, так как речь идет о самом главном приближении). Функцию $\zeta(\alpha, t)$ будем искать в виде

$$\zeta(\alpha, t) = \beta t^\gamma H(\tau) + \dots, \quad \tau = \frac{\alpha - \theta_s}{t^\delta}. \quad (28)$$

Подставляя (28) в (23), переходя к погранслошной переменной τ и ограничиваясь только главным приближением, получим равенство, в которое входят слагаемые, имеющие следующие порядки малости по t : $t^{0.5\delta+1}$, $t^{\gamma+1-\delta}$, $t^{\gamma-1}$. В самой хорошей ситуации, когда все показатели равны, придем к случаям, рассмотренным выше. Далее рассмотрим случаи, когда среди указанных показателей совпадают только два из них, а слагаемое, отвечающее третьему показателю, имеет более высокий порядок малости по t . Из трех возможных случаев подходящим оказывается только один, который с учетом условия срачивания приводит к решению вида ($0.5\delta + 1 = \gamma - 1$, $\gamma + 1 - \delta > \gamma - 1$):

$$\zeta(\alpha, t) = \beta t^2 \sqrt{\alpha - \theta_s}. \quad (29)$$

Таким образом, есть все основания считать, что функция (29) является главным асимптотическим приближением для формы внутренней свободной границы жидкости при любом β_1 . В следующем приближении по времени картина течения жидкости вблизи точки отрыва существенно зависит от параметра β_1 . При $\beta_1 < 0$ кривая подходит к точке отрыва по касательной, находясь от нее только по одну сторону. В случае $\beta_1 > 0$ кривая продолжается за точку отрыва и подходит к границе тела также по касательной (в этом случае точка отрыва оказывается внутри каверны).

Вкратце остановимся на численной реализации. Для численного решения задачи с односторонними ограничениями (14)–(16) применяется специальный итерационный метод последовательного уточнения неизвестных заранее зон отрыва и контакта частиц жидкости. Ранее такой подход был применен для решения классических задач об отрывном ударе твердых тел, плавающих на поверхности жидкости [14]. В качестве начального приближения в этом итерационном процессе выбирается решение смешанной задачи (14)–(16), без учета неравенств, с такой маленькой зоной $S_{12}(0)$, в окрестности которой нарушается динамическое условие в виде неравенства (14). Как показывают численные расчеты, при плавном удалении от точки раздела краевых условий левая часть этого неравенства убывает, достигает отрицательного минимума, а затем возрастает до положительных значений. Точки, в которых рассматриваемая функция принимает отрицательные минимумы, выбираются за следующие приближения к точкам отрыва. Далее этот процесс повторяется. При этом каждый следующий шаг итерационного процесса приводит к уменьшению зоны отрицательных значений данной функции. Процесс заканчивается, когда эта зона полностью исчезает. После этого проверяется справедливость кинематического условия в виде неравенства в (15). Описанный итерационный метод сходится очень быстро. Для определения угловых координат точек отрыва с двумя верными знаками после запятой требуется не более 15–20 итераций. Отметим, что полученные на каждом шаге итерационного процесса линейные задачи (с фиксированными точками раздела краевых условий) решаются численно методом конечных элементов с применением пакета FreeFem++ [15]. Линейная задача (17)–(20) также решается методом конечных элементов. Более подробно этот подход изложен в статьях [3, 4].

При численной реализации вводятся в рассмотрение дно и боковые стенки, удаленные от тела на большие расстояния (в пять раз больше радиуса цилиндра).

На рис. 1 показано хорошее согласование погранслошных решений (24), (25) с внешним разложением в случае, когда выполнено условие регулярности: $Fr = 1$, $\chi_0 = -1$, $\chi_1 = 0$, $\chi_2 = 0$, $H = 1.2$, $t = 0.4$, $c_1 = -0.5$ (точки отрыва движутся в разные стороны, $\beta_1 = c_1$). Здесь $\theta_s = 0.766$, $\beta = 1.596$, $p = 9.202$.



На рис. 2 представлены случаи, когда условие регулярности нарушено: $Fr = 3$, $\chi_0 = 0.2$, $t = 0.4$, $t = 0.6$ (остальные параметры не меняются). Для этих случаев $\theta_s = 0.813$, $\beta = 0.700$, $\beta_1 = -0.805$, $p = 1.953$.

Регулярный случай представлен на рис. 3, 4: $Fr = 1$, $\chi_0 = -1$, $t = 0.4$, $c_1 = 0.5$ (точки отрыва сближаются, остальные параметры не меняются). Здесь $\beta_1 = c_1 > 0$.

На рис. 3 показано согласование внешнего разложения (11) и двух погранслойных решений (24), (26) и (27). Первое погранслойное решение практически не отличается от внешнего разложения.

На рис. 4 показано согласование всех трех погранслойных решений: (24), (26); (27); (29). Отметим, что при $t = 0.4$ кривая, определяемая функцией (27), весьма незначительно отклоняется от главного приближения, имеющего вид квадратного корня. Это говорит о том, что во многих случаях (для $\beta_1 > 0$) при определении формы каверны вблизи точек отрыва можно ограничиться только главным приближением. При этом форма каверны в целом практически не изменится.

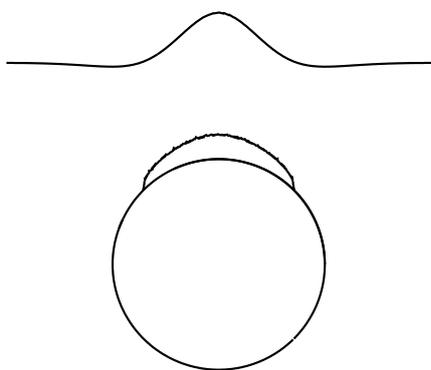


Рис. 3. Согласование двух погранслойных решений и внешнего разложения при $t = 0.4$. Случай, когда кривая расположена по разные стороны от точки отрыва. Условие регулярности выполнено

Fig. 3. Agreement of two boundary layer solutions and the outer expansion at $t = 0.4$. The case when the curve is located on different sides of the separation point. The regularity condition is satisfied

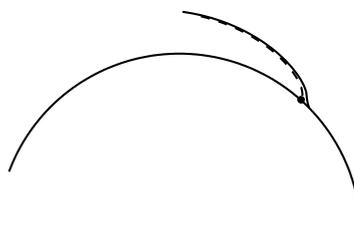


Рис. 4. Согласование главного приближения типа квадратного корня (пунктирная линия) и двух погранслойных решений при $t = 0.4$

Fig. 4. Agreement between the leading approximation of the square root type (dashed line) and two boundary layer solutions at $t = 0.4$

Заключение

Изучена задача о начальном этапе кавитационного движения кругового цилиндра под свободной поверхностью тяжелой жидкости. Показано, что для определенных физических ситуаций, которые характеризуются условием регулярности, решение преобразованной задачи представимо в виде степенного асимптотического разложения по малому времени. При нарушении условия регулярности степенной характер асимптотики также можно сохранить, если во втором асимптотическом приближении провести сглаживание соответствующей граничной функции. Изучено поведение внутренней свободной границы жидкости вблизи точки отрыва. Установлено, что в главном приближении кривая подходит к точке отрыва под прямым углом. Более эффективные погранслойные решения сглаживают этот угол. При этом в одних случаях кривая выходит из точки отрыва и располагается от нее только по одну сторону. В других случаях кривая продолжается за точку отрыва и располагается от нее по разные стороны.



Список литературы

1. Tyvand P. A., Kostikov V. K. Impulsive acceleration of a circular cylinder under free surface // *Journal of Fluid Mechanics*. 2023. Vol. 969. Art. 12. DOI: <https://doi.org/10.1017/jfm.2023.557>, EDN: NXDRZJ
2. Голиков А. Е., Макаренко Н. И. Свободное движение цилиндра под поверхностью тяжелой жидкости // *Прикладная механика и техническая физика*. 2024. Т. 65, № 5. С. 76–84. DOI: <https://doi.org/10.15372/PMTF202415502>, EDN: XOPAIQ
3. Norkin M., Korobkin A. The motion of the free-surface separation point during the initial stage of horizontal impulsive displacement of a floating circular cylinder // *Journal of Engineering Mathematics*. 2011. Vol. 70. P. 239–254. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10665-010-9416-6>, EDN: OHRKVP
4. Норкин М. В. Образование каверны на начальном этапе движения кругового цилиндра в жидкости с постоянным ускорением // *Прикладная механика и техническая физика*. 2012. Т. 53, № 4. С. 74–82. <https://www.mathnet.ru/rus/pmtf1384>, EDN: PDUFJR
5. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. Москва : Наука, 1966. 448 с.
6. Норкин М. В. Образование каверны с неподвижными точками отрыва при вертикальном разгоне плавающего кругового цилиндра // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2024. № 91. С. 99–112. DOI: <https://doi.org/10.17223/19988621/91/9>, EDN: GIQIYZ
7. Reinhard M., Korobkin A. A., Cooker M. J. Cavity formation on the surface of a body entering water with deceleration // *Journal of Engineering Mathematics*. 2016. Vol. 96, iss. 1. P. 155–174. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10665-015-9788-8>, EDN: WNRBNX
8. Пегов В. И., Мошкин И. Ю. Расчет гидродинамики кавитационного способа старта ракет // *Челябинский физико-математический журнал*. 2018. Т. 3, № 4. С. 476–485. DOI: <https://doi.org/10.24411/2500-0101-2018-13408>, EDN: YLLQPB
9. Аганин А. А., Ильгамов М. А., Мустафин И. Н. Ударная кавитация жидкости в цилиндрической емкости // *Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки*. 2020. Т. 162, № 1. С. 27–37. DOI: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2020.1.27-37>, EDN: NWMBXF
10. Ищенко А. Н., Буркин В. В., Дьячковский А. С., Чупашев А. В. Подводный старт суперкавитирующего ударника из лабораторной баллистической установки // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2023. № 82. С. 97–107. DOI: <https://doi.org/10.17223/19988621/82/8>, EDN: OTPNOV
11. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. Москва : Наука, 1979. 536 с.
12. Иванов А. Н. Гидродинамика развитых кавитационных течений. Ленинград : Судостроение, 1980. 240 с.
13. Норкин М. В. Динамика внутренней свободной границы жидкости на малых временах при вертикальном ударе кругового цилиндра, полностью погруженного в жидкость // *Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки*. 2015. № 1. С. 30–35. EDN: TPOXJJ
14. Дворак А. В., Теселкин Д. А. Численное решение двумерных задач об импульсивном движении плавающих тел // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1986. Т. 26, № 1. С. 144–150.
15. Жуков М. Ю., Ширяева Е. В. Использование пакета конечных элементов FreeFem++ для задач гидродинамики, электрофореза и биологии. Ростов н/Д : Изд-во ЮФУ, 2008. 256 с. EDN: XMVZDP

References

1. Tyvand P. A., Kostikov V. K. Impulsive acceleration of a circular cylinder under free surface. *Journal of Fluid Mechanics*, 2023, vol. 969, art. 12. DOI: <https://doi.org/10.1017/jfm.2023.557>, EDN: NXDRZJ
2. Golikov A. E., Makarenko N. I. Free motion of a cylinder under the surface of a deep fluid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2024, vol. 65, iss. 5, pp. 858–865. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894424050067>
3. Norkin M., Korobkin A. The motion of the free-surface separation point during the initial stage of horizontal impulsive displacement of a floating circular cylinder. *Journal of Engineering Mathematics*, 2011, vol. 70, pp. 239–254. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10665-010-9416-6>, EDN: OHRKVP



4. Norkin M. V. Formation of a cavity in the initial stage of motion of a circular cylinder in a fluid with a constant acceleration. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2012, Vol. 53, iss. 4, pp. 532–539. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894412040074>, EDN: PFZHKZ
5. Sedov L. I. *Two-dimensional problems in hydrodynamics and aerodynamics*. New York, Interscience Publications, 1965. 427 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1966. 448 p.).
6. Norkin M. V. Cavity formation with fixed separation points during vertical acceleration of a floating circular cylinder. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2024, iss. 91, pp. 99–112 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.17223/19988621/91/9>, EDN: GIQIYZ
7. Reinhard M., Korobkin A. A., Cooker M. J. Cavity formation on the surface of a body entering water with deceleration. *Journal of Engineering Mathematics*, 2016, vol. 96, iss. 1. pp. 155–174. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10665-015-9788-8>, EDN: WNRBNX
8. Pegov V. I., Moshkin I. Yu. Computation of the rockets launch hydrodynamics. *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*, 2018, vol. 3, iss. 4, pp. 476–485 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.24411/2500-0101-2018-13408>, EDN: YLLQPB
9. Aganin A. A., Ilgamov M. A., Mustafin I. N. Impact-induced cavitation in a cylindrical container with liquid. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya: Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2020, vol. 162, iss. 1, pp. 27–37 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2020.1.27-37>, EDN: NWMBXF
10. Ishchenko A. N., Burkin V. V., D'yachkovskiy A. S., Chupashev A. V. Underwater launching of a supercavitating projectile out of a ballistic test setup. *Tomsk State University. Journal of Mathematics and Mechanics*, 2023, vol. 82. pp. 97–107 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.17223/19988621/82/8>, EDN: OTPNOV
11. Gurevich M. I. *Teoriya struy ideal'noi zhidkosti* [Theory of jets of an ideal fluid]. Moscow, Nauka, 1979. 536 p. (in Russian).
12. Ivanov A. N. *Gidrodinamika razvitykh kavitatsionnykh techeniy* [Hydrodynamics of developed cavitation flows]. Leningrad, Sudostroenie, 1980. 240 p. (in Russian).
13. Norkin M. V. Dynamics of the internal free boundary of a liquid at short times during a vertical impact of a circular cylinder completely immersed in a liquid. *Izvestiya Vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennye nauki*, 2015, iss. 1, pp. 30–35 (in Russian). EDN: TPOXJJ
14. Dvorak A. V., Teselkin D. A. Numerical solution of two-dimensional problems of the pulse motion of floating bodies. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1986, vol. 26, iss. 1. pp. 91–95. DOI: [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(86\)90188-6](https://doi.org/10.1016/0041-5553(86)90188-6)
15. Zhukov M. Yu., Shiryayeva E. V. *Ispol'zovanie paketa konechnykh elementov FreeFem++ dlya zadach gidrodinamiki, elektroforeza i biologii* [Using the finite element package FreeFem++ for hydrodynamics problems, electrophoresis and biology]. Rostov-on-Don, Southern Federal University Publ., 2008. 256 p. (in Russian). EDN: XMVZDP

Поступила в редакцию / Received 21.04.2025

Принята к публикации / Accepted 24.09.2025

Опубликована / Published 02.03.2026