Научный отдел

МАТЕМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 2. С. 160–164
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2026, vol. 26, iss. 2, pp. 160–164
https://mmi.sgu.ru
DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-160-164
EDN: https://elibrary.ru/ADJGNO

Краткое сообщение
УДК 530.182:517.912:517.929

Модификация метода обратного ряда построения точных решений уравнений нелинейной математической физики

Н. А. Артамонов

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., Россия, 410054, г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77

Артамонов Николай Александрович, аспирант кафедры прикладной математики и системного анализа, twostvoll@gmail.com, https://orcid.org/0009-0001-0683-2428, SPIN: 8251-2604, AuthorID: 1296661

Аннотация. В работе предложена модификация метода обратного ряда, приводящая к расширению выявляемых им классов точных решений нелинейных дифференциальных уравнений математической физики. Работоспособность модифицированного метода продемонстрирована на примерах решения интегрируемого уравнения Цицейки и неинтегрируемого уравнения Фишера.
Ключевые слова: нелинейные дифференциальные уравнения, точные решения, метод обратного ряда
Для цитирования: *Артамонов Н. А.* Модификация метода обратного ряда построения точных решений уравнений нелинейной математической физики // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 2. С. 160–164. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-160-164, EDN: ADJGNO

Short communication

Modification of the inverted series method for constructing exact solutions to equations of nonlinear mathematical physics

N. A. Artamonov

Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77 Politechnicheskaya St., Saratov 410054, Russia

Nikolay A. Artamonov, twostvoll@gmail.com, https://orcid.org/0009-0001-0683-2428, SPIN: 8251-2604, AuthorID: 1296661

Abstract. This paper proposes a modification of the inverted series method that expands the classes of exact solutions it identifies for nonlinear differential equations in mathematical physics. The effectiveness of the modified method is demonstrated using examples of solving the integrable Tzitzeica equation and the nonintegrable Fisher equation.

Keywords: nonlinear differential equations, exact solutions, inverted series method

For citation: Artamonov N. A. Modification of the inverted series method for constructing exact solutions to equations of nonlinear mathematical physics. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 2, pp. 160–164 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-160-164, EDN: ADJGNO

Введение

Задача нахождения точных решений уравнений нелинейной математической физики, в частности дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений, по-прежнему является весьма актуальной. Характеристики точных решений позволяют исследовать фундаментальные свойства уравнений; точные решения являются основой для отладки приближенных методов решения. За последние десятилетия было предложено немало эффективных методов построения точных решений нелинейных уравнений, например, метод экспоненциальной функции, метод гиперболического тангенса, метод простейших уравнений [1–3], метод геометрического ряда [4] и др. Настоящая статья посвящена модификации метода обратного ряда [5], позволяющей расширить круг решаемых этим методом уравнений.

1. Идея модификации метода

Согласно [5] на первом этапе метода обратного ряда строится ряд возмущений по степеням решения линеаризованного уравнения в форме экспоненциальной функции e^z, зависящей от переменной бегущей волны $z = kx-\omega t$. На втором этапе для полученного степенного ряда $S_1(y)$, построенного по степеням переменной y, $y = e^z$, формируется обратный степенной ряд $S_2(y)$ согласно условию

$$S_1 S_2 = 1. \tag{1}$$

Как оказывается, обратный ряд S_2 обрывается безусловно для большинства интегрируемых уравнений и после выполнения специального условия — для многих неинтегрируемых уравнений, и выражение S_2^{-1} дает точное решение уравнения в замкнутой форме. Обрывание степенного ряда, т. е. обращение в ноль всех его коэффициентов, начиная с некоторого номера, основано на том, что рациональная дробь, представляющая точное решение уравнения, во многих случаях имеет вид

$$\frac{y}{P_n(y)}, \tag{2}$$

где P_n — многочлен степени n от 1 до 3. Обратное к (2) выражение является многочленом по y, соответствующим оборванному обратному ряду. Однако в некоторых случаях структура точного решения более сложная и имеет вид

$$\frac{y^m(y+C)}{P_n(y)}, \tag{3}$$

где $m \in Z$ и $C = \mathrm{const}$. Второй множитель в числителе (3) препятствует обрыванию обратного ряда и, следовательно, нахождению решения в замкнутой форме. Для устранения проблемы предлагается заменить условие (1) следующим:

$$S_1 S_2 S_3 = 1, \tag{4}$$

где

$$S_3 = \frac{1}{C} - \frac{y}{C^2} + \frac{y^2}{C^3} - \frac{y^3}{C^4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{y^{n-1}}{C^n} + \ldots \tag{5}$$

есть формальное разложение выражения $(y+C)^{-1}$ в степенной ряд. При такой замене комбинация S_1S_3 лишается проблемного множителя $(y+C)$ и ничто не препятствует обрыванию ряда S_2. Точное решение уравнения при этом определяется выражением

$$\left(\frac{S_2}{y+C}\right)^{-1}. \tag{6}$$

2. Решение уравнения Цицейки

Интегрируемому уравнению Цицейки

$$u_{xt} = \mathrm{e}^{2u} - \mathrm{e}^{-u} \tag{7}$$

при $\omega = -3/k$ соответствует ряд возмущений [4]

$$u = y + \frac{1}{6}y^2 + \frac{1}{12}y^3 + \frac{1}{27}y^4 + \frac{121}{6480}y^5 + \frac{25}{2592}y^6 + \frac{1681}{326592}y^7 + \ldots \tag{8}$$

Сингулярный анализ ведущих членов (7) дает нулевой порядок полюса его решения, поэтому вместо (8) рассмотрим ряд

$$S_1 = y\frac{du}{dy} = y + \frac{1}{3}y^2 + \frac{1}{4}y^3 + \frac{4}{27}y^4 + \frac{121}{1296}y^5 + \frac{25}{432}y^6 + \frac{1681}{46656}y^7 + \ldots \tag{9}$$

Будем искать обратный ряд в форме

$$S_2 = \sum_{n=-1}^{\infty} b_n y_n. \tag{10}$$

Подставив (9), (10) и (5) в (4) и перенеся все слагаемые в левую часть, будем последовательно приравнивать нулю множители при возрастающих степенях y, начиная с нулевой:

$$\begin{aligned} y^0: &\quad \frac{b_{-1}}{C} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad b_{-1} = C, \\ y^1: &\quad \frac{b_0 - 1}{C} + \frac{1}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad b_0 = 1 - \frac{C}{3}, \ldots \end{aligned}$$

В результате получим

$$S_2 = \frac{C}{y} + 1 - \frac{C}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{5C}{12} + 1\right)y - \frac{1}{18}\left(\frac{C}{3} + \frac{5}{2}\right)y^2 - \frac{C+6}{324}y^3 - \frac{C+6}{1944}y^4 - \ldots \tag{11}$$

Как видим, начиная со степени y^3, все коэффициенты обращаются в ноль при $C = -6$, и ряд (11), обрываясь, превращается в многочлен

$$-\frac{6}{z} + 3 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{36},$$

а выражение (6), где $y = kx + \frac{3}{k}t$, дает сумму ряда (9)

$$\frac{36y\,(6-y)}{(y+6)\,(y^2 - 24y + 36)}, \tag{12}$$

которая определяет точное решение уравнения Цицейки, приведенное в [4].

3. Решение уравнения Фишера

Неинтегрируемому уравнению Фишера

$$u_t - \alpha u_{xx} - u + \beta u^2 = 0$$

при $\omega = -\alpha k^2 + 1$ соответствует ряд возмущений

$$S_0 = \frac{1}{\beta} + y + \frac{\beta y^2}{2\alpha k^2 + 1} + \frac{\beta^2 y^3}{(2\alpha k^2+1)(3\alpha k^2+1)} + \frac{\beta^3 \left(7\alpha k^2 + 3\right) y^4}{3(2\alpha k^2+1)^2 (3\alpha k^2+1)(4\alpha k^2+1)} + \ldots$$

Для упрощения выкладок избавимся в ряду от постоянного слагаемого, т. е. примем $S_1 = S_0 - \frac{1}{\beta}$ и воспользуемся условием (4). Получим следующие выражения для коэффициентов обратного ряда (10):

$$\begin{aligned}
&b_{-1} = C,\\
&b_0 = 1 - \frac{C\beta}{2\alpha k^2+1},\\
&b_1 = \frac{\beta\left(-6\alpha^2k^4 + \alpha k^2 (C\beta - 5) - 1\right)}{(2\alpha k^2+1)^2 (3\alpha k^2+1)},\\
&b_2 = -\frac{\alpha\beta^2k^2\left(-24\alpha^2k^4 + 2\alpha k^2(C\beta - 9) - 2C\beta - 3\right)}{3(2\alpha k^2+1)^3(3\alpha k^2+1)(4\alpha k^2+1)},\\
&b_3 = \frac{\alpha\beta^3k^2\left(\alpha k^2 - 1\right)\left(-120\alpha^3k^6 + 4\alpha^2k^4(3C\beta - 31) - 2\alpha k^2(3C\beta+20) - 3C\beta - 4\right)}{6(2\alpha k^2+1)^4(3\alpha k^2+1)^2(4\alpha k^2+1)(5\alpha k^2+1)},\\
&\quad\ldots
\end{aligned}$$

Подстановка решения уравнения $b_2 = 0$, линейного относительно неизвестной C, в следующие коэффициенты b_3, $b_4, \ldots$ факторизует числители их выражений, так что везде в них появляется общий множитель $(6\alpha k^2 - 1)$. Приравнивание последнего нулю выявляет два условия:

$$C = -\frac{4}{\beta}, \quad \alpha = \frac{1}{6k^2},$$

при которых обратный ряд (10) обрывается и дает точное решение уравнения Фишера

$$u = \frac{1}{\beta} - \frac{y(\beta y - 4)}{(\beta y - 2)^2},$$

где $y = \mathrm{e}^z$, $z = kx - \frac{5}{6}t$.

Заключение

Метод обратного ряда [5] является модификацией метода геометрического ряда [4], позволяющего находить точные решения дифференциальных уравнений в случаях, когда ряд возмущения является геометрическим рядом или приводится к нему. Преимуществом метода обратного ряда является более высокая вычислительная эффективность. Но в своей исходной формулировке метод обратного ряда не был способен обнаруживать решения вида (3). Предложенная модификация устраняет этот недостаток метода и расширяет круг обнаруживаемых им решений.

Список литературы

1. *Кудряшов Н. А.* Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный : Интеллект, 2010. 368 с.

2. *Конт Р., Мюзетт М.* Метод Пенлеве и его приложения. Москва ; Ижевск : Изд-во Ин-та компьютерных исследований, Регулярная и хаотическая динамика, 2011. 315 с.
3. *Полянин А Д., Зайцев В. Ф., Журов А. И.* Нелинейные уравнения математической физики и механики. Методы решения. Москва : Юрайт, 2025. 256 с.
4. *Бочкарев А. В., Землянухин А. И.* Метод геометрического ряда построения точных решений нелинейных эволюционных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57, № 7. С. 1113–1125. DOI: https://doi.org/10.7868/S0044466917070079, EDN: YTLTRJ
5. *Землянухин А. И., Артамонов Н. А., Бочкарёв А. В., Безлюдный В. И.* Обращение степенных рядов и точные решения уравнений нелинейной математической физики // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 6. С. 929–942. DOI: https://doi.org/10.18500/0869-6632-003180, EDN: XEHQXM

References

1. Kudryashov N. A. *Metody nelineynoy matematicheskoy fiziki* [Methods of nonlinear mathematical physics]. Dolgoprudny, Intellect, 2010. 368 p. (in Russian).
2. Conte R., Musette M. *The Painleve Handbook*. Dordrecht, Springer Science+Business Media B.V., 2008. 256 p. (Russ. ed.: Moscow, Izhevsk, Institute of Computer Research, Regular and Chaotic Dynamics Publ., 2011. 315 p.).
3. Polyanin A. D., Zaitsev V. F., Zhurov A. I. *Nelineynye uravneniya matematicheskoy fiziki i mekhaniki* [Nonlinear equations of mathematical physics and mechanics. Solution methods]. Moscow, Yurait, 2025. 256 p. (in Russian).
4. Bochkarev A. V., Zemlyanukhin A. I. The geometric series method for constructing exact solutions to nonlinear evolution equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2017, vol. 57, iss. 7, pp. 1111–1123. DOI: https://doi.org/10.1134/S0965542517070065, EDN: XOUKKK
5. Zemlyanukhin A. I., Artamonov N. A., Bochkarev A. V., Bezlyudny V. I. Power series reversion and exact solutions of nonlinear mathematical physics equations. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2025, vol. 33, iss. 6, pp. 929–942. DOI: https://doi.org/10.18500/0869-6632-003180, EDN: XEHQXM (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 10.01.2026
Принята к публикации / Accepted 26.01.2026
Опубликована / Published 01.06.2026