Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 2. С. 165–174
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2026, vol. 26, iss. 2, pp. 165–174
https://mmi.sgu.ru DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-165-174
EDN: https://elibrary.ru/EJPJVI

Научная статья
УДК 517.51

Обобщенный нестационарный кратномасштабный анализ на локально компактных нуль-мерных группах с произвольной образующей последовательностью

Н. Е. Комиссарова

Саратовский национальный исследовательский университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Комиссарова Наталия Евгеньевна, старший преподаватель кафедры математического анализа, nataliyakomissarov@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-7104-2377, SPIN: 8621-2807, AuthorID: 723893

Аннотация. Рассматривается локально компактная нуль-мерная группа $(G, \dot{+})$, порядки смежных классов у которой произвольные простые числа. Если порядки смежных классов совпадают и равны некоторому простому числу, кратномасштабный анализ строится с помощью оператора растяжения. Если же порядки смежных классов не совпадают, определить оператор растяжения не представляется возможным. В работе указан способ построения кратномасштабного анализа без использования оператора растяжения и построен соответствующий всплесковый базис.

Ключевые слова: локально компактные нуль-мерные группы, кратномасштабный анализ, всплесковый базис

Для цитирования: *Комиссарова Н. Е.* Обобщенный нестационарный кратномасштабный анализ на локально компактных нуль-мерных группах с произвольной образующей последовательностью // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 2. С. 165–174. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-165-174, EDN: EJPJVI

Article

Generalized non-stationary multiresolution analysis on locally compact zero-dimensional groups with an arbitrary generating sequence

N. Ye. Komissarova

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Nataliya Ye. Komissarova, nataliyakomissarov@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-7104-2377, SPIN: 8621-2807, AuthorID: 723893

Abstract. We consider a locally compact zero-dimensional group $(G, \dot{+})$, whose coset orders are arbitrary prime numbers. If the orders of the cosets are constant and equal to some prime number, the multiresolution analysis can be constructed by using a dilation operator. If the orders of the cosets are different, it is not possible to define the dilation operator. In this paper, we describe a method for constructing a multiresolution analysis without using the dilation operator and construct the corresponding wavelet basis.

Keywords: locally compact zero-dimensional group, multiresolution analysis, wavelet basis

For citation: Komissarova N. Ye. Generalized non-stationary multiresolution analysis on locally compact zero-dimensional groups with an arbitrary generating sequence. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 2, pp. 165–174 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-165-174, EDN: EJPJVI

Введение

Вейвлет-анализ сформировался в последние десятилетия XX в. В начале XXI в. значительно вырос интерес к вопросам построения базисов вейвлетов на локально компактных нуль-мерных абелевых группах. Так, в [1, 2] были построены кратномасштабный анализ (КМА) и на его основе ортонормированные базисы в $L_2(G)$ как сжатий и сдвигов нескольких функций (в [1] на группе Виленкина, в [2] на поле всех p-адических чисел).

В [3] была построена система Хаара на компактной нуль-мерной абелевой группе.

В работе [4] была рассмотрена задача построения ортогональных всплесковых базисов на произвольных локально компактных нуль-мерных группах, для которых порядки смежных классов совпадают и равны некоторому простому числу. В указанном случае возможно определить оператор растяжения.

В [5] было дано следующее определение нестационарного КМА.

Определение. Совокупность замкнутых пространств $V_j \subset L_2(G)$, $j \in \mathbb{Z}$ называется *нестационарным кратномасштабным анализом* (НКМА), если выполнены следующие условия:

1) $V_j \subset V_{j+1}$ для всех $j \in \mathbb{Z}$;

2) $\bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ плотно в $L_2(G)$;

3) $\bigcap\limits_{j\in\mathbb{Z}} V_j = 0$;

4) для любого j существует функция $\varphi_j \in V_j$ такая, что последовательность $\{\varphi_j(\cdot + k\,2^{-j})\}_{k\in\mathbb{Z}}$ образует базис Рисса (ортонормированный базис) в V_j. Последовательность $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ называется *масштабирующей* для данного НКМА.

В данной работе построен нестационарный кратномасштабный анализ (НКМА) и всплесковый ортонормированный базис на произвольной локально компактной нуль-мерной группе с произвольной образующей последовательностью, т. е. в случае, когда порядки смежных классов — различные простые числа. Соответственно, в этой ситуации ввести оператор растяжения не представляется возможным. В данном случае НКМА порождается последовательностью функций, а всплесковый базис — последовательностью всплеск-функций. В [6] был построен по такому принципу НКМА. В данной работе рассматривается более общая ситуация. Причем и КМА, и ортонормированный базис удается построить без использования преобразования Фурье.

1. Локально компактные группы, топология, характеры

Пусть $(G, \dot{+})$ — локально компактная абелева группа, топология в которой задана счетной системой открытых подгрупп

$$\cdots \supset G_{-n} \supset \cdots \supset G_{-1} \supset G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_n \supset \dots$$

таких, что $\bigcup\limits_{n=-\infty}^{+\infty} G_n = G$, $\bigcap\limits_{n=-\infty}^{+\infty} = 0$ (0 — нулевой элемент группы G).

При каждом фиксированном $N \in \mathbb{Z}$ подгруппа G_N является компактной абелевой группой относительно той же операции $\dot{+}$ в топологии, порожденной системой подгрупп

$$G_N \supset G_{N+1} \supset \cdots \supset G_n \supset \dots$$

Так как каждая группа G_n компактна, то каждая фактор-группа G_n/G_{n+1} конечна, и пусть p_n — ее порядок. Можно считать, что p_n — простые числа, так как, используя теорему Силова, можно уплотнить цепочку подгрупп так, что порядки фактор-групп G_n/G_{n+1} станут простыми. В этом случае базой топологии являются всевозможные смежные классы $G_n\dot{+}g$ $(g \in G)$.

Числа $\mathbf{m}_n$ определим равенствами

$$\mathbf{m}_0 = 1, \quad \mathbf{m}_{n+1} = \mathbf{m}_n \cdot p_n.$$

При $n \geqslant 1$ имеют место равенства

$$\mathbf{m}_n = p_0 p_1 \dots p_{n-1}, \quad \mathbf{m}_{-n} = \frac{1}{p_{-1}p_{-2}\dots p_{-n}}.$$

Смежные классы $G_n\dot{+}g$ $(n \in \mathbb{Z})$ вместе с пустым множеством образуют полукольцо $\mathcal{K}$. На каждом смежном классе $G_n\dot{+}g$ мера μ определена равенством $\mu(G_n\dot{+}g) = \mu G_n = 1/\mathbf{m}_n$.

Таким образом, если $n \in \mathbb{N}$ и $p_n = p$, то $\mu G_n \cdot \mu G_{-n} = 1$. Меру μ можно продолжить с полукольца $\mathcal{K}$ на σ-алгебру (например, по схеме Каратеодори). Получим меру μ, совпадающую на борелевских множествах с мерой Хаара на G, которая инвариантна относительно сдвига.

Пусть далее $\int\limits_G f(x)d\mu(x)$ — абсолютно сходящийся интеграл, порожденный мерой μ. При каждом $N \in \mathbb{Z}$ выберем элементы $g_n \in G_n \backslash G_{n+1}$ и зафиксируем их. Тогда любой элемент $x \in G$ единственным образом представим в виде

$$x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g_n \, (a_n = \overline{0, p_n - 1}),$$

причем в этой сумме слагаемых с отрицательными номерами конечное число, т. е.

$$x = \sum_{n=-N}^{+\infty} a_n g_n \; (a_n = \overline{0, p_n - 1}, a_n \neq 0).$$

Систему элементов (g_n) будем называть *базисной*.

Пусть далее X — совокупность характеров группы G, которая является группой относительно умножения, $G_n^{\perp}$ — аннулятор группы G_n, т. е. $G_n^{\perp} = \{\chi \in X : \forall\, x \in G_n, \chi(x) = 1\}$.

Каждый аннулятор $G_n^{\perp}$ есть группа относительно умножения, $G_n^{\perp}$ образуют возрастающую последовательность

$$\dots \subset G_{-n}^{\perp} \subset \dots \subset G_0^{\perp} \subset G_1^{\perp} \subset \dots \subset G_n^{\perp} \subset \dots$$

такую, что

$$\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} G_n^{\perp} = X, \qquad \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} G_n^{\perp} = 1,$$

причем фактор-группа имеет порядок p_n.

При каждом $n \in \mathbb{Z}$ выберем элементы $r_n \in G_{n+1}^{\perp} \backslash G_n^{\perp}$ и зафиксируем их. Тогда любой элемент $\chi \in X$ единственным образом представим в виде

$$\chi = \prod_{n=-\infty}^{+\infty} r_n^{\alpha_n} \quad (\alpha_n = \overline{0, p_n - 1}),$$

причем в произведении множителей с положительными номерами конечное число. Характеры r_n будем называть *функциями Радемахера*.

В группе характеров X можно ввести топологию, используя цепочку подгрупп и выбирая в качестве базы топологии совокупность смежных классов $G_n^\perp \cdot \chi$ $(\chi \in X)$. Совокупность таких смежных классов вместе с пустым множеством образует полукольцо χ. Для каждого смежного класса определим его меру ν равенством $\nu(G_n^\perp \chi) = \nu(G_n^\perp) = \mathbf{m}_n$. Таким образом, всегда $\mu(G_n)\nu(G_n^\perp) = 1$. Мера ν продолжается стандартным способом (например, по схеме Каратеодори) на σ-алгебру измеримых множеств. По этой мере строится абсолютно сходящийся интеграл $\int\limits_X F(\chi)d\nu(\chi)$. Группа характеров X с такой топологией является нуль-мерной локально компактной группой, и имеет место двойственная ситуация: каждый элемент $x \in G$ является характером группы X и G_n есть аннулятор группы $G_n^\perp$.

Обозначим

$$H_n = \left\{ q \in G : q = \sum_{j=N}^{n-1} a_j g_j, N \in \mathbb{Z}, a_j = \overline{0, p_n - 1} \right\}.$$

2. Нестационарный кратномасштабный анализ на локально компактной нуль-мерной группе

Определение 1. *Нестационарным кратномасштабным анализом (НКМА)* будем называть совокупность замкнутых подпространств $V_j \subset L_2(G)$, для которых справедливы следующие аксиомы:

A1) $V_j \subset V_{j+1}$;

A2) $\overline{\bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = L_2(G)$;

A3) $\bigcap\limits_{j\in\mathbb{Z}} V_j = 0$;

A4) для любого $n \in \mathbb{Z}$ найдутся функции $\varphi^{(n)}_{j_n, j_{n+1}}(x)$; $j_n = \overline{0, p_n - 1}$, $j_{n+1} = \overline{0, p_{n+1} - 1}$ и множества H_n такие, что система $\left(\varphi^{(n)}_{j_n, j_{n+1}}(x \dot{-} h);\ j_n = \overline{1, p_n - 1},\ j_{n+1} = \overline{1, p_{n+1} - 1},\ h \in H_n\right)$ образует ортонормированный базис в V_n.

Для построения КМА выберем функции $\varphi^{(n)}_{j_n, j_{n+1}} \in L_2(G)$ следующим образом.

Положим

$$\varphi^{(0)}_{j_0,0}(x) = \sqrt{m_1}\, \mathbf{1}_{G_1 \dot{+} j_0 g_0}(x), \quad j_0 = \overline{0, p_0 - 2},$$
$$\varphi^{(0)}_{p_0-1, j_1}(x) = \sqrt{m_2}\, \mathbf{1}_{G_2 \dot{+} j_1 g_1 \dot{+} (p_0 - 1) g_0}(x), \quad j_1 = \overline{0, p_1 - 1}$$

(носители этих функций содержатся в G_0).

Положим

$$V_0 = \overline{\operatorname{span}\left\{ \varphi^{(0)}_{j_0,0}(x \dot{-} h_0), \quad \varphi^{(0)}_{p_0-1, j_1}(x \dot{-} h_0) \right\}}, \quad j_0 = \overline{0, p_0 - 2}, \quad j_1 = \overline{0, p_1 - 1}, \quad h_0 \in H_0.$$

Затем определим

$$\varphi^{(1)}_{j_1,0} = \sqrt{m_2}\, \mathbf{1}_{G_2 \dot{+} j_1 g_1}(x), \quad j_1 = \overline{0, p_1 - 2},$$
$$\varphi^{(1)}_{p_1-1, j_2} = \sqrt{m_3}\, \mathbf{1}_{G_3 \dot{+} j_2 g_2 \dot{+} (p_1 - 1) g_1}(x), \quad j_2 = \overline{0, p_2 - 1},$$
$$\operatorname{supp} \varphi^{(1)}_{j_1,0} \subset G_1, \quad \operatorname{supp} \varphi^{(1)}_{p_1-1, j_2} \subset G_1.$$

Положим

$$V_1 = \overline{\operatorname{span}\left\{ \varphi^{(1)}_{j_1,0}(x \dot{-} h_1), \varphi^{(1)}_{p_1-1, j_2}(x \dot{-} h_1) \right\}}, \quad j_1 = \overline{0, p_1 - 2}, \quad j_2 = \overline{0, p_2 - 1}, \quad h_1 \in H_1.$$

Продолжим этот процесс. На n-м шаге получим

$$\varphi^{(n)}_{j_n,0} = \sqrt{m_{n+1}}\, \mathbf{1}_{G_{n+1} \dot{+} j_n g_n}(x), \quad j_n = \overline{0, p_n - 2},$$

$$\varphi^{(n)}_{p_n-1,j_{n+1}} = \sqrt{m_{n+2}}\,\mathbf{1}_{G_{n+2}\dot{+}j_{n+1}g_{n+1}\dot{+}(p_n-1)g_n}(x), \quad j_{n+1}=\overline{0,p_{n+1}-1},$$
$$\operatorname{supp}\varphi^{(n)}_{j_n,0}\subset G_n, \quad \operatorname{supp}\varphi^{(n)}_{p_n-1,j_{n+1}}\subset G_n$$

и положим

$$V_n=\overline{\operatorname{span}\left\{\varphi^{(n)}_{j_n,0}(x\dot{-}h_n),\varphi^{(n)}_{p_n-1,j_{n+1}}(x\dot{-}h_n)\right\}}, \quad j_n=\overline{0,p_n-2}, \quad j_{n+1}=\overline{0,p_{n+1}-1}, \quad h_n\in H_n\,.$$

Заметим, что

$$V_{-1}=\overline{\operatorname{span}\left\{\varphi^{(-1)}_{j_{-1},0}(x\dot{-}h_{-1}),\varphi^{(-1)}_{p_{-1}-1,j_0}(x\dot{-}h_{-1})\right\}},$$
$$j_{-1}=\overline{0,p_{-1}-2}, \quad j_0=\overline{0,p_0-1}, \quad h_{-1}\in H_{-1},$$

где

$$\varphi^{(-1)}_{j_n,0}=\sqrt{m_0}\,\mathbf{1}_{G_0\dot{+}j_{-1}g_{-1}}(x), \quad j_{-1}=\overline{0,p_{-1}-2},$$
$$\varphi^{(-1)}_{p_{-1}-1,j_0}=\sqrt{m_1}\,\mathbf{1}_{G_1\dot{+}j_0g_0\dot{+}(p_{-1}-1)g_{-1}}(x), \quad j_0=\overline{0,p_0-1},$$
$$\operatorname{supp}\varphi^{(-1)}_{j_{-1},0}\subset G_{-1}, \quad \operatorname{supp}\varphi^{(-1)}_{p_{-1}-1,j_0}\subset G_{-1}.$$

Продолжаем процесс до бесконечности в обе стороны.

Таким образом, мы построили последовательность подпространств $(V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Теорема 1. *Совокупность подпространств $(V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ образует НКМА.*

Доказательство. Докажем, что для построенных подпространств выполнены аксиомы А1–А4 НКМА.

А1. Покажем, что $V_n\subset V_{n+1}$. Возьмем $f\in V_n \iff$

$$\iff f=\sum_{h_n\in H_n}\left(\sum_{j_n=0}^{p_n-2}C_{j_n,0,h_n}\varphi^{(n)}_{j_n,0}(x\dot{-}h_n)+\sum_{j_{n+1}=0}^{p_{n+1}-1}C_{p_n-1,j_{n+1},h_n}\varphi^{(n)}_{p_n-1,j_{n+1}}(x\dot{-}h_n)\right).$$

Так как $\varphi^{(n)}_{j_n,0}(x)$ постоянны на смежных классах по подгруппе G_{n+1}, функции $\varphi^{(n)}_{p_n-1,j_{n+1}}(x)$ постоянны на смежных классах по подгруппе G_{n+2}, а функции $\varphi^{(n+1)}_{j_{n+1},0}(x)$ постоянны на смежных классах по G_{n+2}, $\varphi^{(n+1)}_{p_{n+1}-1,j_{n+2}}(x)$ постоянны на смежных классах по G_{n+3}, то $\varphi^{(n)}_{j_n,0}(x)\in V_{n+1}$, $\varphi^{(n)}_{p_n-1,j_{n+1}}(x)\in V_{n+1}$, т. е.

$$\varphi^{(n)}_{j_n,0}(x)=\sum_{h_{n+1}\in H_{n+1}}\left(\sum_{j_{n+1}=0}^{p_{n+1}-2}d_{j_{n+1},0,h_{n+1}}\varphi^{(n+1)}_{j_{n+1},0}(x\dot{-}h_{n+1})+\right.$$
$$\left.+\sum_{j_{n+2}=0}^{p_{n+2}-1}d_{p_{n+1}-1,j_{n+2},h_{n+1}}\varphi^{(n+1)}_{p_{n+1}-1,j_{n+2}}(x\dot{-}h_{n+1})\right),$$

$$\varphi^{(n)}_{p_n-1,j_{n+1}}(x)=\sum_{h_{n+1}\in H_{n+1}}\left(\sum_{j_{n+1}=0}^{p_{n+1}-2}b_{j_{n+1},0,h_{n+1}}\varphi^{(n+1)}_{j_{n+1},0}(x\dot{-}h_{n+1})+\right.$$
$$\left.+\sum_{j_{n+2}=0}^{p_{n+2}-1}b_{p_{n+1}-1,j_{n+2},h_{n+1}}\varphi^{(n+1)}_{p_{n+1}-1,j_{n+2}}(x\dot{-}h_{n+1})\right).$$

Тогда

$$f=\sum_{h_n\in H_n}\Bigg(\sum_{j_n=0}^{p_n-2}C_{j_n,0,h_n}\Bigg(\sum_{h_{n+1}\in H_{n+1}}\Bigg(\sum_{j_{n+1}=0}^{p_{n+1}-2}d_{j_{n+1},0,h_{n+1}}\varphi^{(n+1)}_{j_{n+1}}(x\dot{-}(h_n\dot{+}h_{n+1}))+$$
$$+\sum_{j_{n+2}=0}^{p_{n+2}-1}d_{p_{n+1}-1,j_{n+2},h_{n+1}}\varphi^{(n+1)}_{p_{n+1}-1,j_{n+2}}(x\dot{-}(h_n\dot{+}h_{n+1}))\Bigg)\Bigg)+$$
$$+\sum_{j_{n+1}=0}^{p_{n+1}-1}C_{p_n-1,j_{n+1},h_n}\Bigg(\sum_{h_{n+1}\in H_{n+1}}\Bigg(\sum_{j_{n+1}=0}^{p_{n+1}-2}b_{j_{n+1},0,h_{n+1}}\varphi^{(n+1)}_{j_{n+1},0}(x\dot{-}(h_n\dot{+}h_{n+1}))+$$
$$+\sum_{j_{n+2}=0}^{p_{n+2}-1}b_{p_{n+1}-1,j_{n+2},h_{n+1}}\varphi^{(n+1)}_{p_{n+1}-1,j_{n+2}}(x\dot{-}(h_n\dot{+}h_{n+1}))\Bigg)\Bigg)\Bigg)=$$
$$=\sum_{h_n\in H_n}\ \sum_{h_{n+1}\in H_{n+1}}\Bigg(\sum_{j_{n+1}=0}^{p_{n+1}-2}\varphi^{(n+1)}_{j_{n+1},0}(x\dot{-}(h_{n+1}\dot{+}h_n))\Bigg(d_{j_{n+1},0,h_{n+1}}\sum_{j_n=0}^{p_n-2}C_{j_n,0,h_n}+$$
$$+b_{j_{n+1},0}\sum_{j_{n+1}=0}^{p_{n+1}-1}C_{p_n-1,j_{n+1},h_n}\Bigg)+$$
$$+\sum_{j_{n+2}=0}^{p_{n+2}-1}\varphi^{(n+1)}_{p_{n+1}-1,j_{n+2}}(x\dot{-}(h_{n+1}\dot{+}h_n))\Bigg(d_{p_{n+1}-1,jn+2,h_{n+1}}\sum_{j_n=0}^{p_n-2}C_{j_n,0,h_n}+$$
$$+b_{p_{n+1}-1,j_{n+2}}\sum_{j_{n+1}=0}^{p_{n+1}-1}C_{p_n-1,j_{n+1},h_n}\Bigg)\Bigg)=$$
$$=\sum_{h'_{n+1}\in H_{n+1}}\Bigg(\sum_{j_{n+1}=0}^{p_{n+1}-2}C'_{j_{n+1},0,h'_{n+1}}\varphi^{(n+1)}_{j_{n+1},0}(x\dot{-}h'_{n+1})+$$
$$+\sum_{j_{n+2}=0}^{p_{n+2}-1}C'_{p_{n+1}-1,j_{n+2},h'_{n+1}}\varphi^{(n+1)}_{p_{n+1}-1,j_{n+2}}(x\dot{-}h'_{n+1})\Bigg)\in V_{n+1},$$

так как

$$h_{n+1}\dot{+}h_n=(a_{-N}g_{-N}\dot{+}\ldots\dot{+}a_ng_n)\dot{+}(b_{-M}g_{-M}\dot{+}\ldots\dot{+}b_{n-1}g_{n-1})=$$
$$=\alpha_{-m}g_{-m}\dot{+}\ldots\dot{+}\alpha_{n-1}g_{n-1}\dot{+}\alpha_ng_n,$$

где $m=\max(N,M)$, и $h_{n+1}\dot{+}h_n\in H_{n+1}$.

А2. Выполнение аксиомы $\overline{\bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}}V_j}=L_2(G)$ очевидно, так как множество всех ступенчатых функций всюду плотно в $L_2(G)$.

А3. Докажем справедливость аксиомы $\bigcap\limits_{j\in\mathbb{Z}}V_j=0$.

Пусть

$$f\in\bigcap_{j\in\mathbb{Z}}V_j. \tag{1}$$

Покажем, что $f=0$. Выражение (1) означает, что $f\in V_j$ для любого $j\in\mathbb{Z}$. Следовательно, $f\in V_0$. Значит,

$$f(x)=\begin{cases}C^{(0)}_{i_0}, & \text{при } x\in G_1\dot{+}i_0g_0,\ i_0=\overline{0,p_0-2}),\\ C^{(0)}_{i_1}, & \text{при } x\in G_2\dot{+}(p_0-1)g_0\dot{+}i_1g_1,\ i_1=\overline{0,p_1-1},\end{cases}$$

т.е. $f(x)=C^{(0)}_0$ при $x\in G_1$.

Но $f \in V_{-1}$, значит,

$$f(x) = \begin{cases} C_{i_{-1}}^{(-1)}, & \text{при } x \in G_0 \dot{+} i_{-1} g_{-1},\ i_{-1} = \overline{0, p_{-1} - 2}, \\ C_{i_0}^{(-1)}, & \text{при } x \in G_1 \dot{+} (p_{-1} - 1) g_{-1} \dot{+} i_0 g_0,\ i_0 = \overline{0, p_0 - 1} \end{cases}$$

и $f(x) = C_0^{(-1)}$ при $x \in G_0$.

Так как $G_1 \subset G_0$, то $f(x) = C_0^{(-1)} = C_0^{(0)}$ на G_0.

Но и $f \in V_{-2}$. Следовательно,

$$f(x) = \begin{cases} C_{i_{-2}}^{(-2)}, & \text{при } x \in G_{-1} \dot{+} i_{-2} g_{-2},\ i_{-2} = \overline{0, p_{-2} - 2}, \\ C_{i_{-1}}^{(-2)}, & \text{при } x \in G_0 \dot{+} (p_{-2} - 1) g_{-2} \dot{+} i_{-1} g_{-1},\ i_{-1} = \overline{0, p_{-1} - 1} \end{cases}$$

и $f(x) = C_0^{(-2)}$ при $x \in G_{-1}$.

Снова так как $G_0 \subset G_{-1}$, то $f(x) = C_0^{(-2)} = C_0^{(-1)} = C_0^{(0)}$ на G_{-1}.

Продолжая эти рассуждения, получим $f(x) = C$ на G.

Но $f \in L_2(G)$. Значит,

$$\|f\|_2^2 = \int\limits_G f^2(x) d\mu(x) = \int\limits_G C^2 d\mu(x) = C^2 \mu(G) < \infty.$$

Следовательно, $C = 0$.

Таким образом, если $f \in \bigcap\limits_{j \in \mathbb{Z}} V_j$, то $f \equiv 0$.

A4. Функции $\left(\varphi_{j_n,0}^{(n)}(x \dot{-} h_n), \varphi_{p_n-1,j_{n+1}}^{(n)}(x \dot{-} h_n)\right)_{\substack{h_n \in H_n, \\ j_n = \overline{0, p_n - 2}, \\ j_{n+1} = \overline{0, p_{n+1} - 1}}}$ образуют ортонормированный базис V_n.

Достаточно доказать, что $\left(\varphi_{j_n,0}^{(n)}(x \dot{-} h_n), \varphi_{p_n-1,j_{n+1}}^{(n)}(x \dot{-} h_n)\right)_{\substack{h_n \in H_n, \\ j_n = \overline{0, p_n - 2}, \\ j_{n+1} = \overline{0, p_{n+1} - 1}}}$ образуют ортонормированную систему.

Заметим, что $\left(\varphi_{j_n,0}^{(n)}(x), \varphi_{p_n-1,j_{n+1}}^{(n)}(x)\right)_{\substack{j_n = \overline{0, p_n - 2}, \\ j_{n+1} = \overline{0, p_{n+1} - 1}}}$ образуют ортонормированную систему, так как их носители не пересекаются и $\|\varphi_{j_n,0}^{(n)}\| = 1$, $\|\varphi_{p_n-1,j_{n+1}}^{(n)}\| = 1$.

Система $\left(\varphi_{j_n,0}^{(n)}(x \dot{-} h_n), \varphi_{p_n-1,j_{n+1}}^{(n)}(x \dot{-} h_n)\right)$ — есть ортонормированная система в V_n. Доказывается аналогично, так как при $h_n \neq h_m$ сдвиг осуществляется на различные непересекающиеся смежные классы по подгруппе G_{n+1}.

Таким образом, все аксиомы для подпространств V_n выполнены, следовательно, $(V_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ образуют НКМА. □

3. Всплесковые базисы

Основным свойством КМА является возможность на их основе строить базисы всплесков. Опишем конструкцию пространств всплесков.

Пусть $(V_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ — НКМА с масштабирующей последовательностью $\left(\varphi_{j_n,0}^{(n)}, \varphi_{p_n-1,j_{n+1}}^{(n)}\right)$.

Обозначим W_n — ортогональное дополнение к V_n в пространстве V_{n+1}, т. е. $V_{n+1} = V_n \oplus W_n$ и $V_n \perp W_n$. Причем $W_n \perp W_m$, $n \neq m$, и $L_2(G) = \bigoplus\limits_{n=-\infty}^{+\infty} W_n$.

Определим пространства W_n следующим образом. Сначала определим функции

$$\psi_{j_0,0,h_0,\alpha_1}^{(0)}(x) = \sqrt{\mathbf{m}_1} \cdot r_1^{\alpha_1}(x \dot{-} j_0 g_0 \dot{-} h_0)\, \mathbf{1}_{G_1 \dot{+} j_0 g_0 \dot{+} h_0}(x),$$
$$\alpha_1 = \overline{1, p_1 - 1}, \quad j_0 = \overline{0, p_0 - 2}, \quad h_0 \in H_0,$$

$$\psi^{(0)}_{j_0,p_1-1,h_0,\alpha_2}(x) = \sqrt{\mathbf{m}_2}\cdot r_2^{\alpha_2}(x\dot{-}(p_1-1)g_1\dot{-}j_0g_0\dot{-}h_0)\cdot \mathbf{1}_{G_2\dot{+}(p_1-1)g_1\dot{+}j_0g_0\dot{+}h_0}(x),$$
$$\alpha_2=\overline{1,p_2-1},\quad j_0=\overline{0,p_0-1},\quad h_n\in H_n.$$

Здесь $r_i(x)$, $i=1,2$ — функции Радемахера [7].

Положим $W_0=\overline{\operatorname{span}\left\{\psi^{(0)}_{j_0,0,h_0,\alpha_1}(x),\ j_0=\overline{0,p_0-2},\ \psi^{(0)}_{j_0,p_1-1,h_0,\alpha_2}(x),\ j_0=\overline{0,p_0-1},\right\}}$.

Затем

$$\psi^{(1)}_{j_1,0,h_1,\alpha_2}(x) = \sqrt{\mathbf{m}_2}\cdot r_2^{\alpha_2}(x\dot{-}j_1g_1\dot{-}h_1)\,\mathbf{1}_{G_2\dot{+}j_1g_1\dot{+}h_1}(x),$$
$$\alpha_2=\overline{1,p_2-1},\quad j_1=\overline{0,p_1-2},\quad h_1\in H_1,$$
$$\psi^{(1)}_{j_1,p_2-1,h_1,\alpha_3}(x) = \sqrt{\mathbf{m}_3}\cdot r_3^{\alpha_3}(x\dot{-}(p_2-1)g_2\dot{-}j_1g_1\dot{-}h_1)\cdot \mathbf{1}_{G_3\dot{+}(p_2-1)g_2\dot{+}j_1g_1\dot{+}h_1}(x),$$
$$\alpha_3=\overline{1,p_3-1},\quad j_1=\overline{0,p_1-1},\quad h_1\in H_1.$$

Положим $W_1=\overline{\operatorname{span}\left\{\psi^{(1)}_{j_1,0,h_1,\alpha_2}(x),\ j_1=\overline{0,p_1-2},\ \psi^{(1)}_{j_1,p_2-1,h_1,\alpha_3(x)}\right\}}$.

Продолжая этот процесс, на n-м шаге получим

$$\psi^{(n)}_{j_n,0,h_n,\alpha_{n+1}}(x) = \sqrt{\mathbf{m}_{n+1}}\cdot r_{n+1}^{\alpha_{n+1}}(x\dot{-}j_ng_n\dot{-}h_n)\,\mathbf{1}_{G_{n+1}\dot{+}j_ng_n\dot{+}h_n}(x),$$
$$\alpha_{n+1}=\overline{1,p_{n+1}-1},\quad j_n=\overline{0,p_n-2},\quad h_n\in H_n,$$
$$\psi^{(n)}_{j_n,p_{n+1}-1,h_n,\alpha_{n+2}}(x) = \sqrt{\mathbf{m}_{n+2}}\cdot r_{n+2}^{\alpha_{n+2}}(x\dot{-}(p_{n+1}-1)g_{n+1}\dot{-}j_ng_n\dot{-}h_n)\times$$
$$\times\mathbf{1}_{G_{n+2}\dot{+}(p_{n+1}-1)g_{n+1}\dot{+}j_ng_n\dot{+}h_n}(x),$$
$$\alpha_{n+2}=\overline{1,p_{n+2}-1},\quad j_n=\overline{0,p_n-1},\quad h_n\in H_n$$

и положим

$$W_n=\overline{\operatorname{span}\left\{\psi^{(n)}_{j_n,0,h_n,\alpha_{n+1}}(x),\ j_n=\overline{0,p_n-2},\ \psi^{(n)}_{j_n,p_{n+1}-1,h_n,\alpha_{n+2}}(x),\ j_n=\overline{0,p_n-1}\right\}}$$

и т. д. Получим последовательность подпространств $(W_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$.

Теорема 2. *Функции* $\Big(\psi^{(n)}_{j_n,0,h_n,\alpha_{n+1}}(x),\ j_n=\overline{0,p_n-2},\psi^{(n)}_{j_n,p_{n+1}-1,h_n,\alpha_{n+2}}(x),\ j_n=\overline{0,p_n-1}\Big)$, $h_n\in H_n$, $\alpha_{n+1}=\overline{1,p_{n+1}-1}$, $\alpha_{n+2}=\overline{1,p_{n+2}-1}$ *образуют ортонормированную последовательность.*

Доказательство. Пусть сначала n — фиксированное.

1. Если $j_{n_1}\neq j_{n_2}$, то $\int\limits_G \psi^{(n)}_{j_{n_1},0,h_n,\alpha_{n+1}}(x)\psi^{(n)}_{j_{n_2},0,h_n,\alpha_{n+1}}(x)d\mu(x)=0$, так как носители этих функций не пересекаются.

2. Далее рассмотрим

$$\Big(\psi^{(n)}_{j_n,0,h_n,\alpha_{n_1+1}}(x),\quad \psi^{(n)}_{j_n,0,h_n,\alpha_{n_2+1}}(x)\Big)=$$
$$=\mathbf{m}_{n+1}\int\limits_G r_{n+1}^{\alpha_{n_1+1}}(x\dot{-}j_ng_n\dot{-}h_n)\,\mathbf{1}_{G_{n+1}\dot{+}j_ng_n\dot{+}h_n}(x)\overline{r}_{n+1}^{\alpha_{n_2+1}}(x\dot{-}j_ng_n\dot{-}h_n)\,\mathbf{1}_{G_{n+1}\dot{+}j_ng_n\dot{+}h_n}(x)\,d\mu(x)=$$
$$=\mathbf{m}_{n+1}\int\limits_{G_{n+1}\dot{+}j_ng_n\dot{+}h_n} r_{n+1}^{\alpha_{n_1+1}}(x\dot{-}j_ng_n\dot{-}h_n)\,\overline{r}_{n+1}^{\alpha_{n_1+1}+l}(x\dot{-}j_ng_n\dot{-}h_n)\,d\mu(x)=$$
$$=\mathbf{m}_{n+1}\int\limits_{G_{n+1}\dot{+}j_ng_n\dot{+}h_n} \overline{r}_{n+1}^{l}(x\dot{-}j_ng_n\dot{-}h_n)\,d\mu(x)=0,$$

в предположении для определенности $\alpha_{n_1+1}<\alpha_{n_2+1}$, т. е. $\alpha_{n_2+1}=\alpha_{n_1+1}+l$.

Легко проверить, что $\|\psi^{(n)}_{j_n,0,h_n,\alpha_{n+1}}(x)\|_2 = 1$, а значит, последовательность ортонормированна.

Аналогично

$$\Big(\psi^{(n)}_{j_{n_1},p_{n+1}-1,h_n,\alpha_{n+2}}(x),\quad \psi^{(n)}_{j_{n_2},p_{n+1}-1,h_n,\alpha_{n+2}}(x)\Big) = 0,$$
$$\Big(\psi^{(n)}_{j_n,p_{n+1}-1,h_n,\alpha_{n_1+2}}(x),\ \psi^{(n)}_{j_n,p_{n+1}-1,h_n,\alpha_{n_2+2}}(x)\Big) = 0.$$

3. Рассмотрим $\Big(\psi^{(n)}_{j_{n_1},0,h_n,\alpha_{n+1}}(x),\ \psi^{(n)}_{j_{n_2},p_{n+1}-1,h_n,\alpha_{n_2+2}}(x)\Big) = 0$, если $j_{n_1} \neq j_{n_2}$, так сдвиг производится на различные смежные классы по подгруппе G_{n+1}. Если же $j_{n_1} \neq j_{n_2}$, то получим

$$\Big(\psi^{(n)}_{j_n,0,h_n,\alpha_{n+1}}(x),\quad \psi^{(n)}_{j_n,p_{n+1}-1,h_n,\alpha_{n+2}}(x)\Big) =$$
$$= \sqrt{\mathbf{m}_{n+1}\,\mathbf{m}_{n+2}} \int\limits_G r^{\alpha_{n+1}}_{n+1}(x\dot{-}j_n g_n\dot{-}h_n)\,\mathbf{1}_{G_{n+1}\dot{+}j_n g_n\dot{+}h_n}(x)\times$$
$$\times\overline{r}^{\alpha_{n+2}}_{n+2}(x\dot{-}(p_{n+1}-1)g_{n+1}\dot{-}j_n g_n\dot{-}h_n)\,\mathbf{1}_{G_{n+2}\dot{+}(p_{n+1}-1)g_{n+1}\dot{+}j_n g_n\dot{+}h_n}(x)\,d\mu(x) =$$
$$= \sqrt{\mathbf{m}_{n+1}\,\mathbf{m}_{n+2}} \int\limits_{G_{n+2}\dot{+}(p_{n+1}-1)g_{n+1}\dot{j}_n g_n\dot{+}h_n} r^{\alpha_{n+1}}_{n+1}(x\dot{-}j_n g_n\dot{-}h_n)\times$$
$$\times\overline{r}^{\alpha_{n+2}}_{n+2}(x\dot{-}(p_{n+1}-1)g_{n+1}\dot{-}j_n g_n\dot{-}h_n)\,d\mu(x) =$$
$$= \sqrt{\mathbf{m}_{n+1}\,\mathbf{m}_{n+2}} \int\limits_{G_{n+2}} r^{\alpha_{n+1}}_{n+1}(y\dot{+}(p_{n+1}-1)g_{n+1})\ \cdot\overline{r}^{\alpha_{n+2}}_{n+2}(y)\,d\mu(y) =$$
$$= \sqrt{\mathbf{m}_{n+1}\,\mathbf{m}_{n+2}}\, r^{\alpha_{n+1}}_{n+1}(G_{n+2}\dot{+}(p_{n+1}-1)g_{n+1}) \int\limits_{G_{n+2}} \overline{r}^{\alpha_{n+2}}_{n+2}(y)\,d\mu(y) = 0.$$

4. Пусть теперь $n \neq N$ (для определенности $N > n$).

Убедимся, что $\Big(\psi^{(n)}_{j_n,0,h_n,\alpha_{n+1}}(x)\psi^{(N)}_{j_N,0,h_N,\alpha_{N+1}}(x)\Big) = 0$.

Если носители функций $\psi^{(n)}_{j_n,0,h_n,\alpha_{n+1}}(x)$ и $\psi^{(N)}_{j_N,0,h_N,\alpha_{N+1}}(x)$ не пересекаются, то равенство очевидно выполняется. Иначе $\operatorname{supp}\psi^{(N)}_{j_N,0,h_N,\alpha_{N+1}}(x) \subset \operatorname{supp}\psi^{(n)}_{j_n,0,h_n,\alpha_{n+1}}(x)$. И тогда

$$\Big(\psi^{(n)}_{j_n,0,h_n,\alpha_{n+1}}(x),\psi^{(N)}_{j_N,0,h_N,\alpha_{N+1}}(x)\Big) =$$
$$= \sqrt{\mathbf{m}_{n+1}\,\mathbf{m}_{N+1}} \int\limits_G r^{\alpha_{n+1}}_{n+1}(x\dot{-}j_n g_n\dot{-}h_n)\,\mathbf{1}_{G_{n+1}\dot{+}j_n g_n\dot{+}h_n}(x)\times$$
$$\times\overline{r}^{\alpha_{N+1}}_{N+1}(x\dot{-}j_N g_N\dot{-}h_N)\,\mathbf{1}_{G_{N+1}\dot{+}j_N g_N\dot{+}h_N}(x)\,d\mu(x) =$$
$$= \sqrt{\mathbf{m}_{n+1}\,\mathbf{m}_{N+1}} \int\limits_{G_{N+1}\dot{+}j_N g_N\dot{+}h_N} r^{\alpha_{n+1}}_{n+1}(x\dot{-}j_n g_n\dot{-}h_n)\,\overline{r}^{\alpha_{N+1}}_{N+1}(x\dot{-}j_N g_N\dot{-}h_N)\,d\mu(x) =$$
$$= \sqrt{\mathbf{m}_{n+1}\,\mathbf{m}_{N+1}} \int\limits_{G_{N+1}} r^{\alpha_{n+1}}_{n+1}(y\dot{+}j_N g_N\dot{+}h_N\dot{-}j_n g_n\dot{-}h_n)\,\overline{r}^{\alpha_{N+1}}_{N+1}(y)\,d\mu(y) =$$
$$= \sqrt{\mathbf{m}_{n+1}\,\mathbf{m}_{N+1}}\, r^{\alpha_{n+1}}_{n+1}(G_{N+1}\dot{+}j_N g_N\dot{+}h_N\dot{-}j_n g_n\dot{-}h_n) \int\limits_{G_{N+1}} \overline{r}^{\alpha_{N+1}}_{N+1}(y)\,d\mu(y) = 0.$$

Аналогично

$$\Big(\psi^{(n)}_{j_n,p_{n+1}-1,h_n,\alpha_{n+2}}(x),\psi^{(N)}_{j_N,p_{N+1}-1,h_N,\alpha_{N+2}}(x)\Big) = 0.$$

В ходе доказательства были использованы свойства функций Радемахера, доказанные в [7]. □

Итак, функции $\left(\psi^{(n)}_{j_n,0,h_n,\alpha_{n+1}}(x),\, \psi^{(n)}_{j_n,p_{n+1}-1,h_n,\alpha_{n+2}}(x)\right)$ образуют ортонормированную систему, а значит, и ортонормированный базис в W_n. В силу $L_2(G) = \bigoplus\limits_{n=-\infty}^{+\infty} W_n$ последовательность $\left(\psi^{(n)}_{j_n,0,h_n,\alpha_{n+1}}(x),\, \psi^{(n)}_{j_n,p_{n+1}-1,h_n,\alpha_{n+2}}(x)\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ — ортонормированный базис в $L_2(G)$.

Список литературы

1. *Фарков Ю. А.* Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп // Математические заметки. 2007. Т. 82, вып. 6. С. 934–952. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm4181, EDN: IIRPIN
2. *Khrennikov A. Yu., Shelkovich V. M., Skopina M.* p-Adic refinable functions and MRA-based wavelets // arXiv: 0711.2820v1 [math.GM].
3. *Лукомский С. Ф.* О рядах Хаара на компактной нуль-мерной группе // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 1. С. 14–19. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2009-9-1-14-19, EDN: KAMPFR
4. *Лукомский С. Ф.* Кратномасштабный анализ на нульмерных группах и всплесковые базисы // Математический сборник. 2010. Т. 201, № 5. С. 41–64. DOI: https://doi.org/10.4213/sm7580, EDN: QBFWLJ
5. *Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А.* Теория всплесков. Москва : Физматлит, 2005. 616 с.
6. *Комиссарова Н. Е.* Нестационарный КМА на локально-компактных нульмерных группах с произвольной образующей последовательностью // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. 2019. Вып. 9. С. 7–16. EDN: HVPJRH
7. *Lukomskii S. F.* Lebesgue constants for characters of the compact zero-dimensional Abelian group // East Journal on Approximation. 2009. Vol. 15, iss. 2. P. 219–231.

References

1. Farkov Yu. A. Orthogonal wavelets on direct products of cyclic groups. *Mathematical Notes*, 2007, vol. 82, iss. 6, pp. 843–859. DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434607110296, EDN: LKELPN
2. Khrennikov A. Yu., Shelkovich V. M., Skopina M. p-Adic refinable functions and MRA-based wavelets. *arXiv: 0711.2820v1 [math.GM]*.
3. Lukomskii S. F. Haar series on compact zero-dimensional groups. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2009, vol. 9, iss. 1, pp. 14–19 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2009-9-1-14-19, EDN: KAMPFR
4. Lukomskii S. F. Multiresolution analysis on zero-dimensional Abelian groups and wavelets bases. *Sbornik: Mathematics*, 2010, vol. 201, iss. 5, pp. 669–661. DOI: http://dx.doi.org/10.1070/SM2010v201n05ABEH004088, EDN: OHNDUH
5. Novikov I. Ya., Protasov V. Yu., Skopina M. A. *Teoriya vspleskov* [Wavelet theory]. Moscow, Fizmatlit, 2005. 616 p. (in Russian).
6. Komissarova N. Ye. Non-stationary multiresolution analysis on locally compact zero-dimensional groups with arbitrary generating sequence. *Research in Algebra, Number Theory, Functional Analysis and Related Problems*, 2019, iss. 9, pp. 7–16 (in Russian). EDN: HVPJRH
7. Lukomskii S. F. Lebesgue constants for characters of the compact zero-dimensional Abelian group. *East Journal on Approximation*, 2009, vol. 15, iss. 2, pp. 219–231.

Поступила в редакцию / Received 15.02.2026
Принята к публикации / Accepted 24.02.2026
Опубликована / Published 01.06.2026