



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 2. С. 211–224

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 2, pp. 211–224

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-211-224>

EDN: <https://elibrary.ru/NEJOCV>

Научная статья

УДК 536.21

## Об одном методе исследования процессов теплопереноса в пористых средах с упорядоченной макроструктурой

А. В. Еремин, С. А. Зинина , Д. М. Брагин, А. И. Попов

Самарский государственный технический университет, Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 244

**Еремин Антон Владимирович**, доктор технических наук, заведующий кафедрой «Промышленная теплоэнергетика», [eremin.av@samgtu.ru](mailto:eremin.av@samgtu.ru), <https://orcid.org/0000-0002-2614-6329>, SPIN: 3892-0775, AuthorID: 664490

**Зинина Софья Алексеевна**, аспирант кафедры «Промышленная теплоэнергетика», [sofazinina4@gmail.com](mailto:sofazinina4@gmail.com), <https://orcid.org/0009-0002-9104-1336>, SPIN: 5683-6798, AuthorID: 1170625

**Брагин Дмитрий Михайлович**, аспирант кафедры «Промышленная теплоэнергетика», [Dimabragin2204@yandex.ru](mailto:Dimabragin2204@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0002-9835-0206>, SPIN: 4016-4044, AuthorID: 1164301

**Попов Андрей Игоревич**, кандидат технических наук, доцент кафедры «Промышленная теплоэнергетика», [pixinot@icloud.com](mailto:pixinot@icloud.com), <https://orcid.org/0000-0001-5014-8167>, SPIN: 5560-6869, AuthorID: 1100421

**Аннотация.** В настоящей работе предложен метод математического моделирования процесса теплопроводности в пористой среде с упорядоченной макроструктурой. На основе совместного использования методов минимального репрезентативного объема, вычислительной гомогенизации получена зависимость эффективной теплопроводности пористой среды от геометрических характеристик (толщина, высота) элементарной ячейки — единичного структурного элемента исследуемой среды. В качестве элементарной ячейки рассматривается трижды периодическая минимальная поверхность (ТПМП) типа Шварца Р. Полученная зависимость для определения значений эффективного коэффициента теплопроводности была использована при постановке краевой задачи теплопроводности в тонкой пористой пластине при граничных условиях первого рода. Используя приближенно-аналитический метод, основанный на введении дополнительных граничных характеристик и новой искомой функции, получено простое по форме аналитическое решение сформулированной задачи. Из анализа полученных решений сделан вывод о возможности использования ТПМП-ячеек для проектирования материалов с заданными теплофизическими свойствами. В частности, показано, что путем изменения пористости пластины можно увеличить/уменьшить интенсивность теплопереноса, получить требуемые значения термического сопротивления пластины.

**Ключевые слова:** эффективная теплопроводность, минимальная поверхность, ТПМП, минимальная поверхность Шварца Р (Schwarz P), приближенный аналитический метод, дополнительная искомая функция, дополнительные граничные характеристики, тепловой поток, пористость

**Благодарности:** Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-79-10044, <https://rscf.ru/project/23-79-10044/>).

**Для цитирования:** Еремин А. В., Зинина С. А., Брагин Д. М., Попов А. И. Об одном методе исследования процессов теплопереноса в пористых средах с упорядоченной макроструктурой // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 2. С. 211–224. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-211-224>, EDN: NEJOCV

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Article

## On a method for investigating heat transfer processes in porous media with ordered macrostructures

A. V. Eremin, S. A. Zinina<sup>✉</sup>, D. M. Bragin, A. I. Popov

Samara State Technical University, 244 Molodogvardeyskaya St., Samara 443100, Russia

**Anton V. Eremin**, eremin.av@samgtu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-2614-6329>, SPIN: 3892-0775, AuthorID: 664490

**Sofya A. Zinina**, sofazinina4@gmail.com, <https://orcid.org/0009-0002-9104-1336>, SPIN: 5683-6798, AuthorID: 1170625

**Dmitry M. Bragin**, Dimabragin2204@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9835-0206>, SPIN: 4016-4044, AuthorID: 1164301

**Andrey I. Popov**, pixinot@icloud.com, <https://orcid.org/0000-0001-5014-8167>, SPIN: 5560-6869, AuthorID: 1100421

**Abstract.** This paper proposes a mathematical modeling method for the heat conduction process in a porous medium with an ordered macrostructure. Based on the combined use of the minimal representative volume method and computational homogenization, a dependence of the effective thermal conductivity of the porous medium on the geometric characteristics (thickness, height) of the elementary cell — the unit structural element of the studied medium — is obtained. The elementary cell is considered as a triply periodic minimal surface (TPMS) of the Schwarz P type. The derived dependence for determining the values of the effective thermal conductivity coefficient was used in formulating the boundary value problem of heat conduction in a thin porous plate under first-kind boundary conditions. Using an approximate analytical method based on the introduction of additional boundary characteristics and a new unknown function, a simple analytical solution to the formulated problem was obtained. The analysis of the obtained solutions led to the conclusion that TPMS cells can be used for designing materials with specified thermophysical properties. In particular, it is shown that by adjusting the porosity of the plate, the intensity of heat transfer can be increased or decreased, and the required values of the plate's thermal resistance can be achieved.

**Keywords:** effective thermal conductivity, minimal surface, TPMS, Schwarz minimal surface (Schwarz P), approximate analytical method, additional unknown function, additional boundary characteristics, heat flux, porosity

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 23-79-10044, <https://rscf.ru/project/23-79-10044/>).

**For citation:** Eremin A. V., Zinina S. A., Bragin D. M., Popov A. I. On a method for investigating heat transfer processes in porous media with ordered macrostructures. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 2, pp. 211–224 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-211-224>, EDN: NEJOCV

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Пористые материалы широко используются во многих отраслях промышленности. Благодаря наличию в них полостей и пустот, заполненных плохо проводящими тепло газами, включая воздух, применение пористых материалов возможно при производстве тепловой изоляции [1]. В работе [2] исследованы пористые материалы, используемые в качестве звукоизоляции. Кроме того, такие материалы обладают меньшей массой в сравнении с однородной средой. Таким образом, целесообразно применение пористых материалов в условиях массо-габаритных ограничений, например, в авиационном и космическом машиностроении [3]. Широкое распространение пористые материалы получили в нефтехимии, энергетике [4] и других отраслях промышленности.



Однако пористые материалы имеют ряд недостатков: при стохастическом распределении пор [5] могут снижаться прочностные свойства, анизотропия свойств приводит к существенному усложнению методов теоретического анализа процессов переноса (тепла, массы, импульса), протекающих в пористых средах, и др. В настоящей работе рассматривается пористый материал, образованный однотипными элементарными ячейками на основе трижды периодических минимальных поверхностей (ТПМП). Такие материалы обладают малой массой, высокими прочностными характеристиками и прогнозируемыми теплофизическими свойствами [6]. Наибольшее распространение на практике получили ТПМП, имеющие строгое математическое описание.

Особенностью пористых ТПМП-материалов является возможность прогнозирования их свойств в зависимости от основных геометрических характеристик элементарных ячеек (толщины стенки, размера и т.д.) [6]. Так, например, при увеличении пористости ТПМП-материала повышается термическое сопротивление, а при уменьшении — обеспечивается повышение прочностных свойств конструкций [7].

Трижды периодические минимальные поверхности Шварца Р и материалы на их основе позволяют разделить пространство на два непересекающихся объема/лабиринта. Данное свойство может быть использовано при разработке теплообменного оборудования, например, при проектировании рекуперативных теплообменников с большой площадью теплообмена [8]. В работе [9] показано, что наибольшим коэффициентом теплопередачи среди исследуемых ТПМП-структур обладает ТПМП «Diamond». Тепловые характеристики теплообменников на основе ТПМП «Diamond» зависят от толщины стенок пористой структуры, диаметра пор и длины.

Структура на основе ТПМП «Gyroid» обеспечивает оптимальное соотношение между эффективностью теплопереноса и гидравлическим сопротивлением. В работе [10] показано, что теплообменник со структурой «Gyroid» обладает на 55% большей тепловой мощностью в сравнении с противоточным теплообменником. При этом коэффициент теплопередачи в структуре «Gyroid» оказалась больше, чем в «Diamond» при числе Рейнольдса выше 16 000 [11].

Пористые среды на основе ТПМП используются в теплообменных аппаратах в качестве теплообменных трактов, элементов конструкции, тепловой защиты и др. Такие теплообменные аппараты обладают рядом преимуществ. Например, коэффициент теплопроводности упорядоченного ТПМП-каркаса из алюминия на 144% выше, чем в случае со стохастическим распределением [12]. При этом прочность ТПМП-каркаса в пять раз выше [6].

Эффективная теплопроводность пористых материалов на основе ТПМП зависит от относительной плотности [13], пористости, размера ячеек, формы пор [6], материала заполнения межпорового пространства и конструкции [14], ориентации пор. Зависимость коэффициента эффективной теплопроводности от относительной плотности может иметь как линейный [13], так и нелинейный вид [6]. В общем случае следует учитывать также теплообмен в межпоровом пространстве. При исследовании теплофизических свойств в пористых материалах, состоящих из нано- и микрочастиц, могут быть использованы диффузионные модели теплопереноса [15].

Основные этапы генерации пористых материалов на основе ТПМП представлены на рис. 1. Формирование поверхности начинается с создания «petals»-элементов (англ. petal — лепесток) — базовых элементов симметрии. Для этого используются автоматизированные алгоритмы Surface Evolver, Minisurf [16]. Путем объединения базовых элементов создается ТПМП с минимально возможной средней кривизной. На этом шаге также применяются методы сглаживания полигональной сетки. Придание толщины выполняется путем перемещения всех точек поверхности триангулированного многогранника вдоль векторов нормали к соответствующим граням на заданное расстояние с последующим созданием непрерывного (без пустот и самопересечений) объема между ними [17]. Получившийся объект с топологией ТПМП называют элементарной ячейкой. На заключительном этапе создается пористый материал на основе ТПМП путем «сшивания» элементарных ячеек на границах.

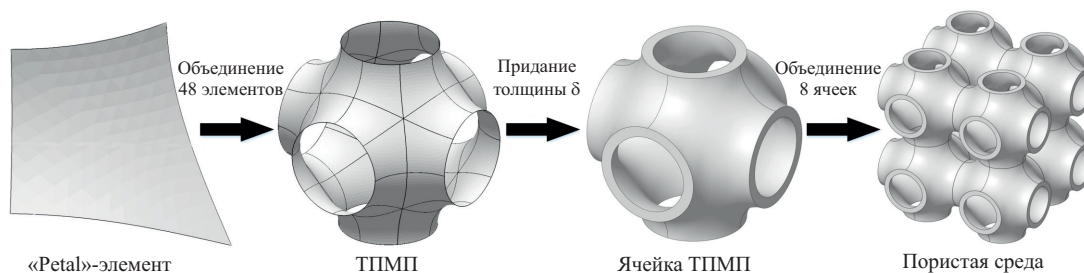


Рис. 1. Процесс формирования ТПМП-материала  
Fig. 1. Process of TPMS-material formation

Исследованию тепловых свойств материалов на основе ТПМП посвящено большое количество научных работ. Однако зависимости теплофизических свойств от геометрических характеристик пористых сред получены лишь в частных случаях. В рамках настоящей работы получены простые по форме зависимости для определения коэффициента эффективной теплопроводности пористых материалов на основе ТПМП-ячеек типа Шварца Р. Используя найденные зависимости, сформулирована и решена краевая задача теплопроводности в пористой пластине, выполнен анализ полученных решений. Представленные в статье результаты могут быть использованы при проектировании теплообменных трактов ТМО-аппаратов, при разработке тепловой защиты оборудования и др.

### 1. Определение теплопроводности ТПМП-материала

Для определения эффективной теплопроводности пористых сред на основе ТПМП-ячеек типа Шварца Р будем использовать метод вычислительной гомогенизации и метод минимального репрезентативного объема (RVE-метод). Согласно RVE-методу в исследуемой области выделяется минимально возможный объем, свойства которого тождественны (или приближены с достаточной точностью) свойствам всей области. Для ТПМП-материала минимальный объем представляет собой элементарную ячейку. Далее выполняется вычислительная гомогенизация среды, т.е. истинные свойства осредняются в пределах минимального объема. Коэффициенты теплопроводности, температуропроводности, теплоемкость, плотность заменяются эффективными (осредненными) их значениями. Таким образом, задача описания тепловых процессов в пористой среде существенно упрощается и фактически сводится к решению классических уравнений переноса в изотропных телах. Очевидно, что точность получаемых решений в этом случае снижается, однако остается достаточной для решения большинства инженерных задач.

Трижды периодическая минимальная поверхность Шварца Р (рис. 2) обладает ярко выраженной вращательной симметрией.

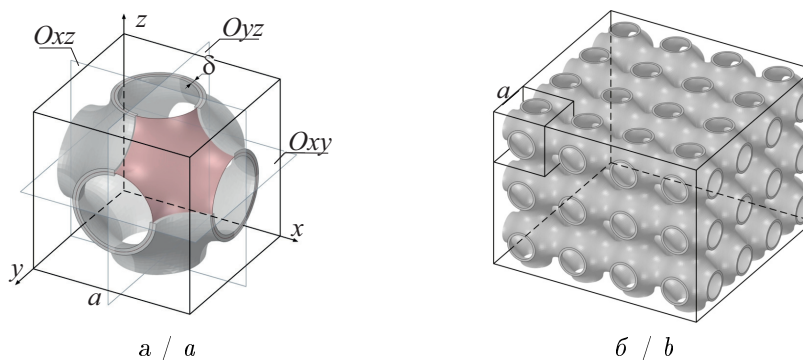


Рис. 2. ТПМП Шварца Р:  $a$  — элементарная ячейка;  $b$  — соединение ячеек в структуру  
Fig. 2. Schwarz P TPMS:  $a$  is elementary cell;  $b$  is assembly of cells into a structure



Поворот относительно осей симметрии  $x, y, z$  на угол  $\pi/2$  приводит к совмещению всех точек исходной поверхности с поверхностью, образованной в результате вращения;  $x, y, z$  — оси симметрии четвертого порядка. Кроме того, рассматриваемая поверхность обладает зеркальной симметрией относительно плоской симметрии  $Oxy, Oyz, Oxz$ . Очевидно, что ТПМП Шварца Р обладает и другими видами симметрии (зеркально-поворотная, кубическая и др.). В таком случае коэффициенты в главной диагонали тензора теплопроводности будут равны между собой. Соответственно, для определения теплопроводящих свойств материала на основе ТПМП Шварца Р достаточно определить теплопроводность в одном из направлений.

Для определения свойств материала на основе ТПМП рассмотрим минимальный репрезентативный объем — элементарную ячейку Шварца Р. Теплопроводность элементарной ячейки (см. рис. 2, а) в направлении оси  $Oz$  определяется свойствами материала каркаса, размером ячейки  $a$  и величиной толщины стенки  $\delta$ . Еще одной важной характеристикой, влияющей на интенсивность теплопереноса, является просветность — коэффициент, равный отношению площади просветов в рассматриваемом сечении к общей площади сечения:

$$\gamma = \frac{a^2 - S_r}{a^2}. \tag{1}$$

На рис. 3, а приведены графики функции  $\gamma(\beta)$  для различных значений относительной толщины стенки ячейки  $\chi$ . Здесь  $\beta$  — безразмерная координата  $z$ , равная  $\beta = z/a$ . Относительная толщина  $\chi$  определяется отношением  $\chi = \delta/a$ . Из данных рис. 3, а следует, что независимо от  $\chi$  график функции  $\gamma(\beta)$  имеет экстремумы в точках  $\beta = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$ . Максимумы функции  $\gamma(\beta)$  равны и наблюдаются в точках  $\beta = 0, 0.5, 1$ . Из этого следует, что площадь каркаса в этих точках принимает минимальное значение:  $S_r(0) = S_r(0.5) = S_r(1) = \min$ .

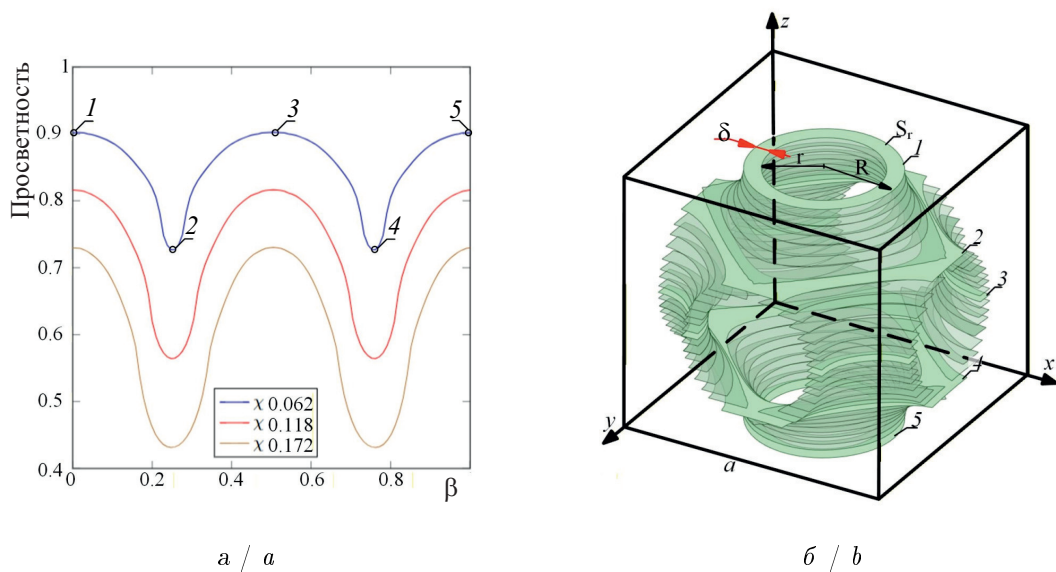


Рис. 3. Определение просветности в элементарной ячейке: а — зависимость просветности от  $\beta$  и относительной толщины  $\chi$ ; б — геометрическая модель ячейки Шварца Р; 1–5 — экстремумы функции  $\gamma(\beta)$  в точках  $\beta = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$  соответственно (цвет онлайн)

Fig. 3. Determination of transparency in the elementary cell: а is dependence of transparency on  $\beta$  and relative thickness  $\chi$ ; б is geometric model of the Schwarz P cell; 1–5 are extrema of the function  $\gamma(\beta)$  at the points  $\beta = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$ , respectively (color online)

В статье рассматривается теплоперенос вдоль твердотельного ТПМП-каркаса без учета теплообмена в поровом пространстве. В этом случае коэффициент теплопроводности пористого материала не может быть больше, чем у твердотельного каркаса, и их равенство

возможно только при  $\gamma = 0$ . Таким образом, для любого  $\gamma > 0$  справедливо  $k_s > k_{eff}$ . Теплопроводность пористого материала  $k_{eff}$  меньше теплопроводности каркаса  $k_s$  вследствие меньшей площади сечения, через которое происходит теплоперенос. Численное соотношение  $k_s$  и  $k_{eff}$  определяется просветностью в минимальном сечении. Это утверждение справедливо в случае равенства градиентов температуры в соответствующих точках гомогенизированной среды и ТППП-каркаса. Из данных рис. 3, б видно, что минимальная площадь каркаса в направлении переноса тепла, например в плоскости  $\beta = 0$ , определяется как площадь кольца толщины  $\delta$ :

$$S_r = \pi(R^2 - r^2) = \pi((a/4 + \delta/2)^2 - (a/4 - \delta/2)^2) = \pi a \delta / 2, \tag{2}$$

где  $S_r$  — минимальная площадь кольца.

При определении эффективного коэффициента теплопроводности положим, что на противоположных поверхностях элементарной ячейки ( $\beta = 0, 1$ ) заданы граничные условия первого рода  $T_1$  и  $T_2$  соответственно (рис. 3, б), а процесс переноса тепла — установившийся. Примем, что тепловой поток  $Q_r$ , протекающий через сечение  $S_r$ , равен тепловому потоку  $Q_z$ , протекающему через сечение  $S_z = a^2$ :

$$q_z \cdot S_z = q_r \cdot S_r \leftrightarrow k_{eff}(\text{grad } T)_z S_z = k_s(\text{grad } T)_r S_r, \tag{3}$$

где  $q_r$ ,  $(\text{grad } T)_r$  — осредненные по сечению ячейки при  $z = 0$  (или  $z = a$ ) соответственно удельная плотность теплового потока и градиент температуры;  $S_z$  — площадь сечения куба в направлении оси  $z$ ;  $(\text{grad } T)_z$  — величина, описывающая изменение температуры в направлении оси  $z$ .

В установившемся режиме, при заданных граничных условиях градиент температуры для гомогенизированной среды равен  $(\text{grad } T)_z = (T_1 - T_2)/a$ . В действительности для элементарной ячейки Шварца Р справедливо лишь приближенное равенство  $(\text{grad } T)_r \approx (T_1 - T_2)/a$ . С учетом (2), (3) можно записать

$$k_{eff} \approx k_s \frac{S_r}{S_z} \approx k_s \frac{\pi a \delta}{2 a^2} \approx k_s \chi \frac{\pi}{2}. \tag{4}$$

Полученное соотношение (4) позволяет определять эффективную теплопроводность пористой среды в зависимости от свойств материала каркаса и характерных геометрических характеристик (толщины и размера) элементарной ячейки.

Применение формулы (4) в нестационарных задачах возможно, но требует дополнительных исследований, выходящих за рамки данной работы. Так, решение задач в нестационарном режиме требует некоторых упрощений, таких как гомогенизация пористой среды. Например, в работе [18] представлено решение задачи теплопроводности в пористой пластине, учитывающее гомогенизацию среды. Однако полученная в настоящей работе формула (4) для определения эффективной теплопроводности действительна лишь для элементарной ячейки Шварц Р.

В настоящей работе использовалась методика определения минимального сечения исходя из поверхности уровня [19]. Для Шварц Р уравнения поверхности уровня дают «кольцо». Однако поверхности уровня для других элементарных ячеек могут иметь иную форму минимального сечения. Минимальная площадь сечения элементарной ячейки может быть получена также путем интегрирования известных уравнений поверхностей ТППП.

В недавно опубликованной сторонними авторами работе [20] представлены результаты, описывающие существенное влияние минимального сечения элементарной ячейки на теплопроводящие свойства ТППМ-структур. Исследование, проводимое в настоящей работе, не противоречит результатам, полученным С. Pan, Н. Tang, X. Yue. Согласованность с результатами сторонних авторов подтверждает адекватность полученных формул и повышает практическую значимость исследования.

Выполним сравнение результатов вычислений  $k_{eff}$  по формуле (4) с результатами других авторов (рис. 4).



Так, эффективную теплопроводность пористых материалов на основе ТПМП Шварца Р можно оценить с использованием классических моделей:

Maxwell – Eucken

$$k_{eff} = k_s \frac{2k_s + k_g - 2\varepsilon(k_s - k_g)}{2k_s + k_g + \varepsilon(k_s - k_g)}; \quad (5)$$

Ashby

$$k_{eff} = \frac{k_s}{3}((1 - \varepsilon) + 2(1 - \varepsilon)^{1.5}) + k_s\varepsilon; \quad (6)$$

Austin [21]

$$k_{eff} = \frac{k_s(1 - \varepsilon)}{1 + 0.5\varepsilon}; \quad (7)$$

Hashin – Shtrikman model [22]

$$k_{eff} = k_s - \frac{3\varepsilon k_s(k_s - k_g)}{3k_s - (1 - \varepsilon)(k_s - k_g)}; \quad (8)$$

где  $k_s$  — теплопроводность материала, из которого состоит каркас пористого материала,  $k_g$  — теплопроводность жидкости или газа в межпоровом пространстве,  $\varepsilon$  — пористость материала.

Уравнения (5)–(8) могут быть использованы для определения эффективной теплопроводности сферических пор. Для оценки «приближения» формы геометрического объекта к форме сферы используют коэффициент сферичности [23]. Для поверхности Шварца Р коэффициент сферичности составляет 0.6–0.7 [23].

Для определения теплопроводящих свойств каркаса на основе ТПМП Шварца Р проведены многочисленные численные и экспериментальные исследования [24]. Зависимости коэффициентов теплопроводности каркаса от пористости, полученные в работах [12, 13], могут быть обобщены и записаны в виде

$$k_{eff} = \psi k_s(1 - \varepsilon)^m, \quad (9)$$

где  $\psi$  и  $m$  — постоянные, определяемые согласно таблице.

На рис. 4 представлены зависимости эффективной теплопроводности ТПМП-каркаса на основе элементарных ячеек типа Шварца Р от относительной толщины. Рассмотрен каркас из алюминиевого сплава AlSi10Mg [24]. Приведенные результаты расчетов  $k_{eff}$  получены по формулам (4)–(9). Из анализа представленных графиков следует, что результаты расчетов по формулам (5)–(8) и (4), (9) согласуются лишь в диапазоне значений  $0 < \chi \leq 0.22$  [25]. При большей относительной толщине расхождение результатов вычислений  $k_{eff}$  по формулам (5)–(8) и (4), (9) возрастает. Таким образом, использование классических моделей Maxwell–Eucken, Ashby и других возможно

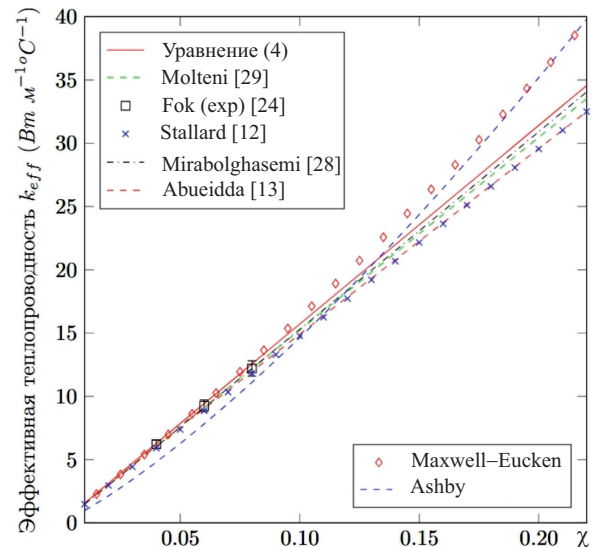


Рис. 4. Эффективная теплопроводность каркаса на основе ТПМП Шварца Р (AlSi10Mg) от относительной толщины по моделям. Модели Maxwell–Eucken, Austin и Hashin–Shtrikman при  $k_g = 0$  принимают одинаковые значения, поэтому представлена только модель Maxwell–Eucken (цвет онлайн)

Fig. 4. Effective thermal conductivity of the Schwarz TPMS framework (AlSi10Mg) as a function of relative thickness according to the models. The Maxwell–Eucken, Austin, and Hashin–Shtrikman models take the same values at  $k_g = 0$ , so only the Maxwell–Eucken model is presented (color online)

Коэффициенты численных моделей  
Table. Coefficients of numerical models

Модель	$\psi$	$m$
Molteni	0.6760	1.000
Stallard [12]	0.6550	1.000
Mirabolghasemi	0.6941	1.015
Abueidda [13]	0.6500	0.988

лишь в узком диапазоне изменения относительной толщины. Важно отметить, что результаты, полученные согласно моделям Molteni, Stallard, Mirabolghasemi, Abueidda и по формуле (4), согласуются во всем рассматриваемом диапазоне  $\chi$ , расхождение результатов не превышает 5%. Небольшое расхождение результатов может быть вызвано особенностями САД- и САЕ-моделирования. Так, в работах авторов для создания САД-модели пористой среды использовались разные программные комплексы — Surface Evolver, MSLattice, Matlab. САЕ-моделирование осуществлялось с использованием Abaqus v6.12, Comsol Multiphysics v6.3 и др. В свою очередь, уравнение (4) получено на основе анализа топологии ТПМП-ячейки, а не в результате обобщения данных вычислительных экспериментов, и, соответственно, не имеет погрешности, вызванной дискретизацией модели. Отметим, что результаты, полученные в настоящей работе, практически совпадают с данными [26] (модель Mirabolghasemi). Это связано с использованием аналогичных подходов по осреднению свойств пористых сред — методов гомогенизация и RVE.

В случае, если при определении коэффициента эффективной теплопроводности по формуле (4) неизвестно значение относительной толщины  $\chi$ , но задана пористость, удобно использовать приближенную зависимость:

$$\varepsilon = 1 - 2.254\chi. \tag{10}$$

На рис. 4 для дальнейшего сравнения с классическими моделями при построении графика по формуле (4) использовалась приближенная зависимость относительной толщины от пористости (10).

## 2. Математическая постановка задачи

В данной работе при расчете температурного состояния пористой пластины предлагается использовать приближенно-аналитический метод, основанный на совместном применении методов введения дополнительной искомой функции и дополнительных граничных характеристик, интегрального метода теплового баланса. При этом учитывается метод «гомогенизации среды», при котором выполняется осреднение теплофизических свойств материала в исследуемой области и, соответственно, предполагается, что функция температуры в пористой среде имеет такой же характер распределения, что и у сплошной среды с эффективной теплопроводностью. Предложенный приближенно-аналитический метод решения задач теплопроводности в пористых телах позволяет получить обобщенное выражение для определения температуры и плотности теплового потока в пористой структуре.

Используя метод, изложенный в [28, 29], найдем распределение температуры в пластине из пористого материала на основе ТПМП Шварца Р. Схема теплообмена представлена

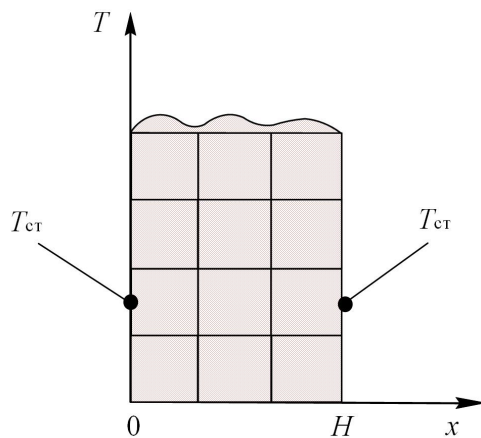


Рис. 5. Схема теплообмена  
Fig. 5. Heat exchange scheme

на рис. 5. На противоположных поверхностях пластины заданы граничные условия первого рода — температура  $T_{ст}$ . Теплопроводящие свойства рассматриваемого материала определяются соотношением (4). Математическая постановка задачи имеет вид

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{k_{eff}}{c_{eff}\rho_{eff}} \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2}$$

$$(0 < x < H, \tau > 0),$$

$$T(x, 0) = T_0, \quad T(0, \tau) = T(H, \tau) = T_{ст},$$

где  $c_{eff}$ ,  $\rho_{eff}$ ,  $k_{eff}$  — эффективные (осредненные) коэффициенты теплоемкости, плотности, теплопроводности гомогенизированной среды. Очевидно, что  $c_{eff} = c_s$ ,  $\rho_{eff} = \rho_s(1 - \varepsilon)$ .



С целью обобщения получаемых результатов введем безразмерные переменные  $\Theta$ ,  $\xi$  — температуру и относительный размер соответственно. Учитывая симметрию задачи, решение уравнения теплопроводности отыскивается в диапазоне изменения пространственной координаты  $0 < x < \frac{H}{2}$ . В центре пластины зададим условие отсутствия теплообмена. С учетом введенных обозначений задача принимает вид

$$\frac{\partial \Theta(\xi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{4\pi}{2} \frac{k_s \chi}{c_s \rho_s (1 - \varepsilon) H^2} \frac{\partial^2 \Theta(\xi, \tau)}{\partial \xi^2}, \quad \tau > 0, \quad 0 < \xi < 1, \quad (11)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 0, \quad (12)$$

$$\Theta(0, \tau) = 1, \quad \frac{\partial \Theta(1, \tau)}{\partial \xi} = 0, \quad (13)$$

где  $\Theta = \frac{T - T_0}{T_{cr} - T_0}$  — безразмерная температура;  $\xi = \frac{2x}{H}$  — пространственная координата, °C;  $x$  — пространственная координата, м;  $\tau$  — время, с;  $k_s$  — теплопроводность каркаса, Вт/(м°C);  $c$  — удельная теплоемкость, Дж/(кг°C);  $\rho_s$  — плотность, кг/м<sup>3</sup>;  $a$  — размер ячейки, м;  $\delta$  — толщина стенки, м;  $\chi$  — относительная толщина,  $\chi = \frac{\delta}{a}$ ;  $H$  — толщина пластины,  $H = na$ ;  $n$  — количество рядов ячеек.

Для упрощения дальнейших выкладок обозначим

$$A = \frac{4\pi}{2} \frac{k_s \chi}{c_s \rho_s (1 - \varepsilon) H^2} = a_s \left[ \frac{4\pi}{2} \frac{\chi}{(1 - \varepsilon) H^2} \right], \quad (14)$$

где  $A$  — коэффициент, зависящий от геометрических характеристик пористой среды (множитель в скобках) и от тепловых свойств материала каркаса  $a_s$ .  $c^{-1}$ . Размерность коэффициента  $[A] = c^{-1}$ .

С учетом выражения (14) уравнение (11) примет вид

$$\frac{\partial \Theta(\xi, \tau)}{\partial \tau} = A \frac{\partial^2 \Theta(\xi, \tau)}{\partial \xi^2}. \quad (15)$$

### 3. Приближенное аналитическое решение

Согласно методу, изложенному в [28, 29], в рассмотрение вводится новая функция

$$\sigma(\tau) = \frac{\partial \Theta(0, \tau)}{\partial \xi}. \quad (16)$$

Решение задачи (15), (12)–(13) отыскивается в виде алгебраического ряда

$$\Theta(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^n b_i(\tau) \xi^{i-1}, \quad (17)$$

где  $n \in N$  — натуральное число, соответствующее количеству членов ряда (17),  $b_i(\tau)$  — неизвестные коэффициенты, зависящие от времени.

Для получения решения задачи в первом приближении ограничимся тремя слагаемыми ( $n = 3$ ) в выражении (17). Для определения неизвестных коэффициентов подставим соотношение (17) в (13), (16). В результате подстановки получаем систему алгебраических уравнений, из решения которой получаем

$$b_1(\tau) = 1; \quad b_2(\tau) = \sigma(\tau); \quad b_3(\tau) = -\frac{\sigma(\tau)}{2}.$$

Соотношение (17) с учетом найденных коэффициентов запишется в виде

$$\Theta(\xi, \tau) = \sigma(\tau) \xi - \frac{\sigma(\tau) \xi^2}{2} + 1. \quad (18)$$

Полученное соотношение удовлетворяет граничным условиям (13) и условию (16), но не удовлетворяет уравнению (15) и начальному условию (12). Для приближенного удовлетворения исходного дифференциального уравнения (15) проинтегрируем его в пределах изменения пространственной координаты, т. е. составим интеграл теплового баланса

$$\int_0^1 \frac{\partial \Theta(\xi, \tau)}{\partial \tau} \partial \xi = \int_0^1 A \frac{\partial^2 \Theta(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} \partial \xi. \quad (19)$$

Вычисляя интеграл теплового баланса, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$\frac{1}{3} \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} + A\sigma(\tau) = 0. \quad (20)$$

Решив (20), получаем

$$\sigma(\tau) = C_1 e^{-3A\tau}, \quad (21)$$

где  $C_1$  — константа интегрирования.

Подставляя (21) в (18), получаем

$$\Theta(\xi, \tau) = C_1 e^{-3A\tau} \xi - \frac{C_1 e^{-3A\tau}}{2} \xi^2 + 1. \quad (22)$$

Для выполнения начального условия EQ:(12) составим его невязку

$$\int_0^1 \Theta(\xi, 0) \left( \xi - \frac{\xi^2}{2} \right) \partial \xi = 0. \quad (23)$$

Из решения уравнения (23) определим константу интегрирования. Для первого приближения  $C_1 = -2.5$ . Выражение (22) с учетом найденного  $C_1$  представляет решение задачи (15), (12)–(13) в первом приближении и может быть записано в виде

$$\Theta(\xi, \tau) = -2.5 e^{(-3A\tau)} \xi + 1.25 e^{(-3A\tau)} \xi^2 + 1. \quad (24)$$

Используя рассмотренный в [28, 29] метод, можно получить решение задачи (15), (12), (13) во втором и последующих приближениях. При этом используются дополнительные граничные характеристики. Так, во втором приближении решение будет

$$\begin{aligned} \Theta(\xi, \tau) &= -2.09 f_1(\xi) e^{(-2.46A\tau)} - 2.24 f_2(\xi) e^{(-36.5A\tau)} + 1, \\ f_1(\xi) &= \left( \frac{K_1}{15A} + \frac{1}{5} \right) \xi^5 - \left( \frac{5K_1}{24A} + \frac{1}{2} \right) \xi^4 + \left( \frac{K_1}{6A} \right) \xi^3 + \xi, \\ f_2(\xi) &= \left( \frac{K_2}{15A} + \frac{1}{5} \right) \xi^5 - \left( \frac{5K_2}{24A} + \frac{1}{2} \right) \xi^4 + \left( \frac{K_2}{6A} \right) \xi^3 + \xi, \end{aligned} \quad (25)$$

где  $K_1 = -2.46A$ ,  $K_2 = -36.5A$ .

Используя (24), (25), можно найти соотношения для определения плотности теплового потока внутри пористого материала и на его поверхности. Так, согласно закону Фурье

$$q = -k_{eff} \text{grad } T. \quad (26)$$

Подставляя (24), (25) в (26), получим соотношение для определения плотности теплового потока в первом и втором приближениях соответственно:

$$q = -\frac{k_s \chi}{H} \pi (T_{ст} - T_0) 2,5 e^{-3A\tau} (\xi - 1); \quad (27)$$

$$q = -\frac{\pi k_s \chi}{H} (T_{ст} - T_0) (2.09 F_1(\xi) e^{-2.46A\tau} + 2.24 F_2(\xi) e^{-36.5A\tau}); \quad (28)$$

$$F_1(\xi) = \left( \frac{K_1}{3A} + 1 \right) \xi^4 - \left( \frac{5K_1}{6A} + 2 \right) \xi^3 + \left( \frac{K_1}{2A} \right) \xi^2 + 1;$$

$$F_2(\xi) = \left( \frac{K_2}{3A} + 1 \right) \xi^4 - \left( \frac{5K_2}{6A} + 2 \right) \xi^3 + \left( \frac{K_2}{2A} \right) \xi^2 + 1.$$



#### 4. Численное решение

С целью оценки точности полученных приближенных аналитических решений получим численное решение рассматриваемой задачи методом конечных разностей. Используя явную схему аппроксимации дифференциальных операторов, найдено дискретное решение задачи (11)–(13) на пространственно-временной сетке

$$\begin{aligned} \xi_j &= j\Delta\xi, \quad j = \overline{0, J}, \\ \tau_i &= i\Delta\tau, \quad i = \overline{0, I}, \end{aligned} \quad (29)$$

где  $J, I$  — число шагов соответственно по переменным  $\xi$  и  $\tau$ .

Результаты численного решения задачи (11)–(13) в сравнении с результатами, полученными в первом и втором приближениях, приведены на рис. 6. Из анализа данных рис. 6 можно заключить, что уже в первом приближении погрешность вычислений в диапазоне времени  $\tau \geq 1000$  с составляет не более 10%. Во втором приближении погрешность снижается до 3%. Повышение точности решений, полученных в первом и втором приближениях, косвенно свидетельствует о сходимости метода, рассмотренного в документации к Abaqus<sup>1</sup> и Comsol Multiphysics<sup>2</sup>.

#### 5. Обсуждение результатов

Полученные результаты могут быть использованы для определения эффективной теплопроводности пористых материалов на основе ТПМП, температурных полей и тепловых потоков внутри пористых сред при одномерном переносе тепла (рис. 7). Стоит отметить, что формулы (4), (10), а следовательно, и (24), (25), (27), (28) справедливы лишь в случае сохранения топологической структуры элементарных ячеек. Путем анализа вычислительных экспериментов установлено, что ТПМП-ячейка типа Шварца Р сохраняет структуру (не происходит внутренних пересечений, полного заполнения пор и др.) в диапазоне толщины стенки  $0 < \chi \leq 0.22$ . С учетом зависимости (10) область допустимых значений пористости составляет  $0.5 < \varepsilon \leq 1$ . Для указанных значений  $\chi, \varepsilon$  распределение температуры по координате практически не зависит от геометрических характеристик ячейки.

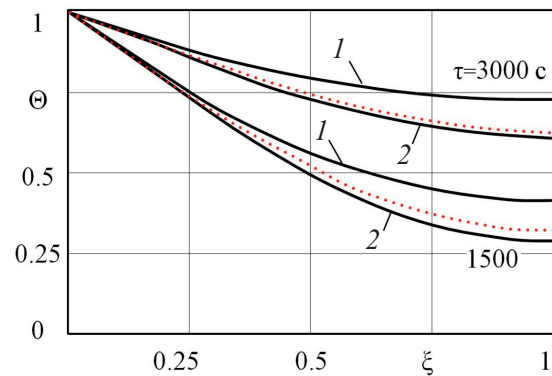


Рис. 6. Распределение температурного профиля в пористой пластине по координате при пористости  $\varepsilon = 0.86$ . Сплошная линия — приближенное решение (1, 2 — номер приближения); точка — численное решение

Fig. 6. Temperature profile distribution in a porous plate along the coordinate at a given porosity  $\varepsilon = 0.86$ . Solid line is approximate solution (1, 2 are approximation numbers); dot is numerical solution

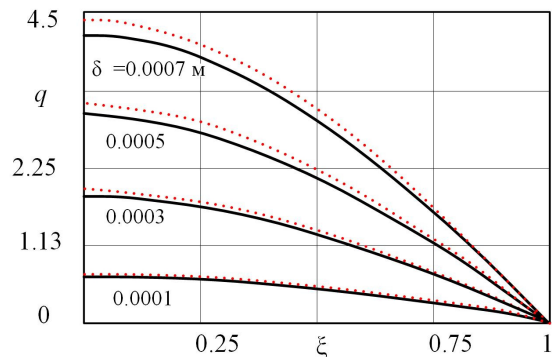


Рис. 7. Распределение плотности теплового потока во втором приближении в момент времени  $\tau = 3000$  с при изменяющейся толщине стенки элементарной ячейки. Сплошная линия — приближенное решение; точка — численное решение

Fig. 7. Heat flux density distribution in the second approximation at time  $\tau = 3000$  with varying wall thickness of the elementary cell. Solid line is approximate solution; dot is numerical solution

<sup>1</sup>Abaqus 6.12 Analysis User's Manual. Documentations. URL: <https://manualzz.com/doc/7288684/using-abaqus-online-documentation?ysclid=mmvn49pk18117266660&p=2> (дата обращения: 20.03.2025).

<sup>2</sup>Introduction to COMSOL Multiphysics. URL: [https://cdn.comsol.com/doc/6.3.0.335/COMSOL\\_MultiphysicsInstallationGuide.pdf](https://cdn.comsol.com/doc/6.3.0.335/COMSOL_MultiphysicsInstallationGuide.pdf) (дата обращения: 20.03.2025).



Температурные профили для пористой пластины качественно не отличаются от классических профилей температуры в неограниченной пластине. Различие между ними определяется величиной отношения температуропроводности материала каркаса к эффективной температуропроводности. Для ячеек типа Шварца Р это значение постоянно. Значения плотности теплового потока отличаются существенно (см. рис. 7). Например, при неизменном размере ( $a = 0.005$  м) увеличение толщины стенки  $\delta$  от 0.0001 до 0.0007 м приводит к возрастанию плотности теплового потока  $q$  с 0.63 до 4.4 Вт/м<sup>2</sup>. Таким образом, изменяя геометрические характеристики ТПМП-ячейки, можно получить материал с заданными теплопроводящими свойствами. Данный подход применим при проектировании тепловой защиты оборудования, теплообменников устройств, теплоизоляционных материалов и др.

## Заключение

1. Получена приближенная зависимость коэффициента эффективной теплопроводности пористой среды, основанной на ТПМП типа Шварца Р, от относительной толщины. С целью оценки точности полученной зависимости приведены результаты расчетов коэффициента эффективной теплопроводности по формулам (5)–(9). Из анализа представленных зависимостей следует, что использование классических моделей Maxwell–Eucken, Ashby и других возможно лишь в узком диапазоне изменения относительной толщины. При этом результаты, полученные по формуле (4), и результаты, полученные из моделей Molteni, Stallard, Mirabolghasemi, Abueidda, согласуются во всем рассматриваемом диапазоне  $\chi$  (расхождение результатов не превышает 5%).

2. Получено простое по форме аналитическое решение задачи переноса тепла через плоскую пористую стенку, структура которой основана на ТПМП типа Шварца Р. Полученные выражения для определения температурной функции, а также для плотности теплового потока позволяют без использования специализированного ПО и вычислительной техники находить распределение температур внутри пористых материалов, определять тепловые потери и т.д.

3. С целью верификации разработанного приближенно-аналитического метода решения задачи теплопереноса в пористой среде, основанной на ТПМП типа Шварца Р, выполнено сравнение результатов расчетов температурной функции в первом и втором приближениях с результатами, полученными методом конечных разностей. Погрешность вычислений во втором приближении, по сравнению с численным методом, не превышает 3% во временном диапазоне  $\tau \geq 1000$  с.

## Список литературы / References

1. Zhao X., Liu Y., Zhao L., et al. A scalable high-porosity wood for sound absorption and thermal insulation. *Nature Sustainability*, 2023, vol. 6, iss. 3, pp. 306–315. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41893-022-01035-y>
2. Wang S., Xiao Y., Gu J., Hu Ch., Zhang H., Wen J. Double-panel metastructure lined with porous material for broadband low-frequency sound insulation. *Applied Acoustics*, 2023, vol. 207, art. 109332. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apacoust.2023.109332>
3. Alifanov O. M., Salosina M. O., Budnik S. A., Nenarokomov A. V. Design of aerospace vehicles' thermal protection based on heat-insulating materials with optimal structure. *Aerospace*, 2023, vol. 10, iss. 7, art. 629. DOI: <https://doi.org/10.3390/aerospace10070629>
4. Li X., Shao J., Zheng J., Bai C., Zhang X., Qiao Y., Colombo P. Fabrication and application of porous materials made from coal gangue: A review. *International Journal of Applied Ceramic Technology*, 2023, vol. 20, iss. 4, pp. 2099–2124. DOI: <https://doi.org/10.1111/ijac.14359>
5. Fteiti M., Ghalambaz M., Sheremet M., Ghalambaz M. The impact of random porosity distribution on the composite metal foam-phase change heat transfer for thermal energy storage. *Journal of Energy Storage*, 2023, vol. 60, art. 106586. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.est.2022.106586>
6. Wang F., Jiang H., Chen Y., Li X. Predicting thermal and mechanical performance of stochastic



- and architected foams. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2021, vol. 171, art. 121139. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2021.121139>
7. Zhang J., Shen Y., Sun Y., Yang J., Gong Y., Wang K., Zhang Z., Chen X., Bai L. Design and mechanical testing of porous lattice structure with independent adjustment of pore size and porosity for bone implant. *Journal of Materials Research and Technology*, 2022, vol. 18, pp. 3240–3255. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmrt.2022.04.002>
  8. Dharmalingam L. K., Aute V., Ling J. Review of triply periodic minimal surface (TPMS) based heat exchanger designs. *International Refrigeration and Air Conditioning Conference*, 2022, art. 2393. Available at: <https://docs.lib.purdue.edu/iracc/2393/> (accessed March 20, 2025).
  9. Iyer J., Moore T., Nguyen D., Roy P., Stolaroff J. Heat transfer and pressure drop characteristics of heat exchangers based on triply periodic minimal and periodic nodal surfaces. *Applied Thermal Engineering*, 2022, vol. 209, art. 118192. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2022.118192>
  10. Dixit T., Al-Hajri E., Paul M. C., Nithiarasu P., Kumar S. High performance, microarchitected, compact heat exchanger enabled by 3D printing. *Applied Thermal Engineering*, 2022, vol. 210, art. 118339. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2022.118339>
  11. Li W., Li W., Yu Z. Heat transfer enhancement of water-cooled triply periodic minimal surface heat exchangers. *Applied Thermal Engineering*, 2022, vol. 217, art. 119198. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2022.119198>
  12. Stallard S., Jiang H., Chen Y., Bergman T. L., Li X. Exploring the design space of the effective thermal conductivity, permeability, and stiffness of high-porosity foams. *Materials & Design*, 2023, vol. 231, art. 112027. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2023.112027>
  13. Abueidda D. W., Al-Rub R. K. A., Dalaq A. S., Lee D. W., Khan K. A., Jasiuk I. T. Effective conductivities and elastic moduli of novel foams with triply periodic minimal surfaces. *Mechanics of Materials*, 2016, vol. 95, pp. 102–115. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2016.01.004>
  14. Popov A., Eremin A., Bragin D. Modeling and measurement of effective thermal conductivity of materials reinforced with bars. *International Journal of Thermophysics*, 2023, vol. 44, iss. 2, art. 17. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10765-022-03137-3>
  15. Eremin A., Kishov E., Popov A. Discrete heat transfer model with space-time nonlocality. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 2022, vol. 138, art. 106346. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2022.106346>
  16. Popov A. I., Bragin D. M., Eremin A. V. Effective thermal conductivity of structured porous medium: Numerical study. *Defect and Diffusion Forum*, 2022, vol. 419, pp. 69–76. DOI: <https://doi.org/10.4028/p-oepvt9>
  17. Zeng C., Wang W., Hai K., Ma S. Lightweight airborne TPMS-filled reflective mirror design for low thermal deformation. *Composite Structures*, 2024, vol. 327, art. 117665. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2023.117665>
  18. Zinina S., Eremin A. V., Popov A. I., Bragin D. M. Mathematical modeling of thermal conductivity in a porous medium with an ordered macrostructure. *Journal of Mathematical Sciences*, 2025, pp. 1–10. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-025-07730-3>, EDN: SGNESN
  19. Hsieh M. T., Valdevit L. *Minisurf* — A minimal surface generator for finite element modeling and additive manufacturing. *Software Impacts*, 2020, vol. 6, art. 100026. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.simpa.2020.100026>
  20. Pan C., Tang L. H., Yue X. Minimum cross-section dominated effective thermal conductivity in morphology-modulated gyroid lattices. *International Journal of Thermal Sciences*, 2026, vol. 221, art. 110468. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2025.110468>
  21. Austin J. *Symposium on Thermal Insulating Materials: Columbus Regional Meeting*. American Society For Testing Materials, 1939, pp. 65–67.
  22. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials. *Journal of Applied Physics*, 1962, vol. 33, iss. 10, pp. 3125–3131. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.1728579>
  23. Cruz-Matías I., Ayala D., Hiller D., Gutsch S., Zacharias M., Estradé S., Peiró F. Sphericity and roundness computation for particles using the extreme vertices model. *Journal of Computational Science*, 2019, vol. 30, pp. 28–40. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jocs.2018.11.005>



24. Fok P. J. Y., Kandasamy R., Ho J. Y., Wong T. N. Enhancing the performance of composite phase change materials using novel triply periodic minimal surface structures. *Chemical Engineering Journal*, 2023, vol. 476, art. 146352. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cej.2023.146352>
25. Bragin D. M., Popov A. I., Eremin A. V. The thermal conductivity properties of porous materials based on TPMS. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2024, vol. 231, art. 125863. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2024.125863>
26. Mirabolghasemi A., Akbarzadeh A., Rodrigue D., Therriault D. Thermal conductivity of architected cellular metamaterials. *Acta Materialia*, 2019, vol. 174, pp. 61–80. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2019.04.061>
27. Molteni M., Candidori S., Graziosi S., Gariboldi E. Improving the thermal response flexibility of 2- and 3-phase composite phase change materials by metallic triply periodic minimal surface structures. *Journal of Energy Storage*, 2023, vol. 72, pt. C, art. 108185. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.est.2023.108185>
28. Eremin A. Study of thermal exchange with liquid flowing in a cylindrical channel. *2019 International Science and Technology Conference "EastConf IEEE"*. Vladivostok, Russia, 2019, pp. 1–5. DOI: <https://doi.org/10.1109/EastConf.2019.8725422>
29. Stefanyuk E. V., Kudinov V. A. Additional boundary conditions in nonstationary problems of heat conduction. *High Temperature*, 2009, vol. 47, pp. 250–262. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0018151X09020163>

Поступила в редакцию / Received 21.03.2025

Принята к публикации / Accepted 07.02.2026

Опубликована / Published 01.06.2026