Научный отдел

МАТЕМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 3. С. 316–322
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2026, vol. 26, iss. 3, pp. 316–322
https://mmi.sgu.ru
DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-3-316-322
EDN: https://elibrary.ru/EFQXOZ

Научная статья
УДК 517.958

Обобщения задачи Гурса и Дарбу – Гурса – Бодо в пространствах обобщенных функций бесконечного порядка

А. М. Бердимуратов

Кыргызский экономический университет имени Мусы Рыскулбекова, Кыргызстан, 720065, г. Бишкек, ул. Армейская, д. 124а
Бердимуратов Амангельди Мухтарович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры экономико-математического моделирования и цифровых технологий, aman2460@mail.ru, https://orcid.org/0009-0001-0403-4799, SPIN: 7112-2149, AuthorID: 978957

Аннотация. В статье исследуется фундаментальная задача о продолжении обобщенных решений систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами $P(D)u = 0$ в многомерном параллелепипеде $\pi \subset \mathbb{R}^n$. В отличие от классических работ, где решения рассматриваются в пространствах распределений (обобщенных функций конечного порядка), здесь продолжение строится в классе обобщенных функций бесконечного порядка, тесно связанных с аналитическими функционалами и теорией гиперфункций. Рассматривается решение u, заданное только в окрестности объединения n граней $\bigcup\limits_{k=1}^{n} \pi_k$ параллелепипеда. Ключевым результатом является теорема о продолжении, которая утверждает, что при условии слабой гиперболичности оператора $P(D)$ относительно нормалей к граням и определенном условии на его характеристическое множество $N' = \mathrm{char}(P)$ всякое обобщенное решение u из соответствующего пространства обобщенных функций бесконечного порядка $\mathcal{U}_L^{\beta}$ может быть продолжено до решения v в окрестности всего параллелепипеда π. Доказательство базируется на теории представления обобщенных решений Паламодова и методе «склеивания» аналитических функционалов. Функционал u представляется в виде n функционалов, сосредоточенных на характеристическом множестве N, которые затем с помощью аппарата комплексного анализа объединяются в единый функционал $\widetilde{\mu}$ на всей области. Также приведена оценка нормы продолженного решения v через норму исходного решения u. Результат представля-

© Бердимуратов А. М., 2026

ет собой значимое обобщение классических задач Гурса и Дарбу – Гурса – Бодо, перенося их в наиболее широкие функциональные классы, что имеет важное значение для современной математической физики и анализа.

Ключевые слова: обобщенные функции бесконечного порядка, задача продолжения, задача Гурса, слабо гиперболический оператор, характеристическое множество, гиперфункции

Для цитирования: *Бердимуратов А. М.* Обобщения задачи Гурса и Дарбу – Гурса – Бодо в пространствах обобщенных функций бесконечного порядка // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 3. С. 316–322. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-3-316-322, EDN: EFQXOZ

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Generalizations of the Goursat and Darboux – Goursat – Baudot problems in spaces of generalized functions of infinite order

A. M. Berdimuratov

Kyrgyz Economic University named after M. Ryskulbekov, 124a Armeyskaya St., Bishkek 720065, Kyrgyzstan

Amangeldi M. Berdimuratov, aman2460@mail.ru, https://orcid.org/0009-0001-0403-4799, SPIN: 7112-2149, AuthorID: 978957

Abstract. The article investigates the fundamental continuation problem for generalized solutions of systems of linear differential equations with constant coefficients P(D)u=0 in a multidimensional parallelepiped $\pi \subset \mathbb{R}^n$. In contrast to classical works, where solutions are considered in spaces of distributions (generalized functions of finite order), here the continuation is constructed within the class of generalized functions of infinite order, which are closely related to analytic functionals and the theory of hyperfunctions. A solution u is considered that is defined only in a neighborhood of the union of $\bigcup\limits_{k=1}^{n} \pi_k$faces of the parallelepiped $\pi \subset \mathbb{R}^n$. The key result is a continuation theorem stating that, under the condition of weak hyperbolicity of the operator P(D) with respect to the normals to the faces and under a certain condition on its characteristic set $N' = \mathrm{char}(P)$, every generalized solution u from the corresponding space of generalized functions of infinite order can be extended to a solution $\mathcal{U}_L^{\beta}$ in a neighborhood of the entire parallelepiped π. The proof is based on Palamodov's representation theory of generalized solutions and on the method of "gluing" analytic functionals. The functional $\widetilde{\mu}$ is represented as n functionals supported by the characteristic set N, which are then combined, using the tools of complex analysis, into a single functional $\widetilde{\mu}$ on the whole domain. An estimate is also provided for the norm of the extended solution v in terms of the norm of the original solution u. The result constitutes a significant generalization of the classical Goursat and Darboux – Goursat – Baudot problems, transferring them to much broader functional classes, which is of considerable importance for modern mathematical physics and analysis.

Keywords: generalized functions of infinite order, continuation problem, Goursat problem, weakly hyperbolic operator, characteristic set, hyperfunctions

For citation: Berdimuratov A. M. Generalizations of the Goursat and Darboux – Goursat – Baudot problems in spaces of generalized functions of infinite order. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 3, pp. 316–322 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-3-316-322, EDN: EFQXOZ

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Классические задачи математической физики, такие как задача Коши или краевые задачи (включая задачи Гурса и Дарбу – Гурса – Бодо), традиционно рассматриваются в про-

странствах гладких или конечно-порядковых обобщенных функций (распределений). Однако в современных исследованиях, связанных с теорией D-модулей, теорией гиперфункций [1] и анализом на комплексных многообразиях, возникает необходимость изучения решений дифференциальных уравнений в более широких классах, а именно в пространствах обобщенных функций бесконечного порядка (ОФБП).

Пусть $P(D)$ — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами в $\mathbb{R}^n$, где $D = (D_1, \ldots, D_n)$ и $D_j = -i\frac{\partial}{\partial \xi_j}$. Мы рассматриваем однородную систему

$$P(D)u = 0, \tag{1}$$

где $P(D) = (P_{ij}(D))$ — матрица $t \times s$ дифференциальных операторов, а $u = (u_1, \ldots, u_s)$ — искомая вектор-функция. Задача продолжения обобщенных решений системы (1), определенных лишь в окрестности части границы (например, n граней параллелепипеда π), в область π является ключевой в анализе. Работы Л. Эренпрайса [2], Б. Мальгранжа [3, 4], В. П. Паламодова [5] и других авторов заложили основы этой теории для распределений.

В данной статье строится продолжение для решений в классе ОФБП, что является существенным обобщением результатов, представленных, в частности, в [6]. Для формулировки задачи необходимо определить функциональные пространства. Используются пространства типа Гельфанда–Шилова $S^{\beta}_{m,F}$ и $S^{\beta,D}_{F}$ (пространства основных функций) и сопряженные к ним пространства ОФБП. Пусть $z = \xi + i\eta \in \mathbb{C}^n$ и F — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$. Пространство $S^{\beta,D}_{m,F}$ состоит из бесконечно дифференцируемых функций $\psi(z)$ в $\mathbb{C}^n$, для которых при любом j с $|j| \leqslant m$ выполняется оценка

$$|D^j\psi(z)| \leqslant c\mathcal{J}_F(\eta)\exp\left(-D|z|^{1/\beta}\right),$$

где $\mathcal{J}_F(\eta) = \sup\limits_{\xi\in F}\exp(-\langle\eta,\xi\rangle)$ — опорная функция компакта F. Пространство $S^{\beta,D}_{F}$ определяется как индуктивный предел: $S^{\beta,D}_{F} = \bigcap\limits_{m>0} S^{\beta,D}_{m,F}$.

Обобщенные функции $(S^{\beta,D}_{F})'$ — это функционалы на $S^{\beta,D}_{F}$. В частности, $\mathcal{U}^{\beta}_{F}$ — пространство решений системы $P(D)u = 0$, которое может быть реализовано как $\mathcal{U}^{\beta}_{F} = \bigcup\limits_{D>0}\left(S^{\beta,D}_{F}\right)'_{P}$ (см. [6]).

1. Обобщенная задача продолжения

Пусть $\pi \subset \mathbb{R}^n$ — параллелепипед и π_i, $i = 1, \ldots, n$ — его $(n-1)$-мерные грани, лежащие в подпространствах $\xi_i = 0$. Предполагается, что оператор $P(D)$ является слабо гиперболическим относительно нормалей к граням.

Теорема. *Пусть $P(D)$ — слабо гиперболический оператор. Если характеристическое множество $N' = \mathrm{char}(P)$ удовлетворяет условию $N' \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n}\{z_k = 0\}$, тогда существует число $h < 1$, зависящее только от P, и $\forall\ B > 0$ для любой окрестности L компакта $\bigcup\limits_{k=1}^{n}\pi_k$ (объединения граней) найдется окрестность L' параллелепипеда π такая, что всякое обобщенное решение $u \in [\mathcal{U}^{\beta}_{L}]^s$ системы (1), определенное на L, может быть продолжено функцией $v \in [\mathcal{U}^{\beta}_{L'}]^s$, являющейся решением (1) на L', причем выполнено неравенство*

$$\|v\|^{\beta,B'}_{L'} \leqslant c\|u\|^{\beta,B}_{L},$$

где константы B' и c не зависят от u.

Доказательство. Доказательство базируется на фундаментальном результате Паламодова (см. [5]) о представлении обобщенных решений в виде линейных функционалов на пространстве основных функций, носитель которых лежит на характеристическом множестве $N = \mathrm{char}(P)$. По условию теоремы для любого $u \in \mathcal{U}^{\beta}_{F'}$ есть линейный функционал на пространстве $\mathcal{D}^{\beta}_{F}$. Согласно теореме Паламодова (см. [5, гл. IV, § 4, теорема 2]) функционал u имеет n представлений: $(\overline{u,\varphi}) = \sum\limits_{\lambda=0}^{l} \int\limits_{N^\lambda} d^\lambda(z,D_z)\widetilde{\varphi}^* \mu^{\lambda,i}$, $\forall\ \varphi \in \left[\mathcal{D}^{\beta,B_1}_{\pi_i^{\alpha-1}}\right]^s$, $i = \overline{1,n}$, причем векторные меры $\mu^{\lambda,i} = (\mu_1^{\lambda,i}, ..., \mu_{e_\lambda}^{\lambda,i})$ таковы, что

$$\sum_{\lambda=0}^{l} \int\limits_{N^\lambda} \exp\left(-\frac{\beta}{e}\left(\frac{|z|}{B_1}\right)^{1/\beta}\right) \mathcal{J}_{\pi_i^{\alpha-1}}(y)|\mu^{\lambda,i}| \leqslant c_1\|u\|^{\beta,B}_{\pi_i^{\alpha}}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Введем в $\mathbb{C}^n$ функции $\mu^i = \sum\limits_{\lambda=0}^{l} d^{\lambda^*}(z,D_z)\mu^{\lambda,i}$. Для всех $\varphi \in \left[\mathcal{D}^{\beta,B_1}_{(\pi_i\cap\pi_j)^{\alpha}}\right]^s$ выполняется $(\mu^i, \widetilde{\varphi}^*) = (\mu^j, \widetilde{\varphi}^*)$, где $i \neq j$, $i,j = 1,2,...,n$, и $(\mu^i - \mu^j, \widetilde{\varphi}^*) = 0$, $\forall\ \varphi \in \left[\mathcal{D}^{\beta,B_1}_{(\pi_i\cap\pi_j)^{\alpha-1}}\right]^s$.

Подставляя $\chi^{i,j}$ вместо $\mu^i - \mu^j$, будем иметь $(\chi^{i,j}, \widetilde{\varphi}^*) = 0$ для всех $\varphi \in \left[\mathcal{D}^{\beta,B_1}_{(\pi_i\cap\pi_j)^{\alpha-1}}\right]^s$.

Можно показать, что для любого $\lambda = \overline{0,l}$ и каждого $j = \overline{1,e_\lambda}$ тогда $\mu_j^{\lambda,i} \in \left(S^{\beta,D}_{\pi_i^{\alpha-1}}\right)'$, где $D = \frac{\beta}{e}B_1^{-1/\beta}$. Для всех $\psi \in S^{\beta,D}_{\pi_i^{\alpha-1}}$ имеем

$$(\mu_j^{\lambda,i}, \psi)| \leqslant \left|\int\limits_{N^\lambda} \psi\mu_j^{\lambda,i}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_z \frac{|\psi|\exp(D|z|^{1/\beta})}{\mathcal{J}_{\pi_i^{\alpha-1}}}(y) \int\limits_{N^\lambda} \exp\left(\frac{\beta}{e}\left(\frac{|z|}{B_1}\right)\right)^{1/\beta} \mathcal{J}_{\pi_i^{\alpha-1}}(y)|\mu^{\lambda,i}| \leqslant c_1\|u\|^{\beta,B}_{\pi_i^{\alpha}}.$$

Отсюда вытекает, что норма функционала $\mu^{\lambda,i} = (\mu_1^{\lambda,i}, ..., \mu_{e_\lambda}^{\lambda,i})$ в пространстве $\left[(S^{\beta,D}_{\pi_i^{\alpha-1}})'\right]^{e_\lambda}$ удовлетворяет неравенству вида

$$|||\mu^{\lambda,i}|||^{\beta,D}_{0,\pi_i^{\alpha-1}} \leqslant c_2\|u\|^{\beta,B}_{\pi_i^{\alpha}}.$$

Очевидно, что $\mu^i \in (S^{\beta,D+\varepsilon}_{\pi^{\alpha-1}})'_p$, $i = 1,2,...,n$.

В силу следствия леммы 3.1.5 из [6] для любой функции $\psi \in [S^{\beta,D+\varepsilon}_{\pi_i^{\alpha-1}}]^s$ имеем

$$|(\mu^i, \psi)| \leqslant \sum_{\lambda=0}^{l} |(d^{\lambda^*}(z,D_z)\mu^{\lambda,i}, \psi)| = \sum_{\lambda=0}^{l} |(\mu^{\lambda,i}, d^\lambda(z,D_z)\psi)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\lambda=0}^{l} |||\mu^{\lambda,i}|||^{\beta,D}_{0,\pi_i^{\alpha-1}} \|d^\lambda(z,D_z)\psi\|^{\beta,D}_{0,\pi_i^{\alpha-1}} \leqslant c_2\|u\|^{\beta,B}_{\pi_i^{\alpha}} \sum_{\lambda=0}^{l} c_\lambda \|\psi\|^{\beta,D+\varepsilon}_{m_1,\pi_i^{\alpha-1}} \leqslant$$

$$\leqslant c_3\|u\|^{\beta,B}_{\pi_i^{\alpha}} \|\psi\|^{\beta,D+\varepsilon}_{m_1,\pi_i^{\alpha-1}}, \quad i = 1,2,...,n,$$

откуда $|||\mu^i|||^{\beta,D+\varepsilon}_{m_1,\pi_i^{\alpha-1}} \leqslant c_3\|u\|^{\beta,B}_{\pi_i^{\alpha}}$, $i = \overline{1,n}$.

В силу леммы 2.1.3 из [6] для любого $\psi \in \left[S^{\beta,D+\varepsilon}_{\pi_i^{\alpha-1}}\right]^t$ имеем

$$(\mu^i, P'\psi) = \sum_{\lambda=0}^{l} (\mu^{\lambda,i}, d^\lambda(z,D_z)P'(z)\psi(z)) = 0, \quad i = 1,2,...,n.$$

Следовательно, $\mu^i \in \left(S^{\beta,D+\varepsilon}_{\pi^{\alpha-1}}\right)'_p$, $i = 1, 2, ..., n$.

Введем обобщенные функции $\widetilde{\mu}^i = \mu^i \pm \sum\limits_{t=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z_t}}\right)^* \chi^k_{s,t}$, $k = 0, 1, ..., n$.

Очевидно $\widetilde{\mu}^i \in \left(S^{\beta,D_3}_{\pi_i^{\alpha-4}}\right)'_p$, $i = 1, 2, ..., n$. Это означает, что

$$\widetilde{\mu}^1 - \widetilde{\mu}^2 = \mu^1 - \mu^2 - \left(\sum_{t=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z_t}}\right)^* (\chi^2_{s,t} + \chi^1_{s,t})\right) = \chi^{1,2} - \sum_{t=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z_t}}\right)^* \chi^{1,2}_{s,t} = \chi^{1,2} - \chi^{1,2} = 0.$$

Аналогично показывается, что $\widetilde{\mu}^i = \widetilde{\mu}^i$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, ..., n$ на $\left[S^{\beta,D_3}_{(\bigcap_{k=1}^{n} \pi_k)^{\alpha-4}}\right]^s$.

Построим функционал $\widetilde{\mu}$ и покажем, что $\widetilde{\mu} \in \left(S^{\beta,D_3}_{\pi^{\alpha-4}}\right)'_p$.

В силу утверждения а) леммы 3.1.6 из [6] для любой функции $\psi \in \left[S^{\beta,D_3}_{\pi^{\alpha-4}}\right]^s$ имеем

$$|(\widetilde{\mu}, \psi)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |(\widetilde{\mu}^i, h_i\psi)| \leqslant c_{12} \sum_{i=1}^{n} \||\widetilde{\mu}^i|\|^{\beta,D_2}_{m_3,\pi_i^{\alpha-4}} \|h_i\psi\|^{\beta,D_2}_{m_3,\pi_i^{\alpha-4}} \leqslant$$
$$\leqslant c_{13} \|u\|^{\beta,B}_{\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} \pi_k\right)} \|\psi\|^{\beta,D_3}_{m_3,\pi^{\alpha-4}}.$$

Отсюда $(\widetilde{\mu}, P'\psi) = \sum\limits_{i=1}^{n} (\widetilde{\mu}^i, P'h_i\psi) = 0$. В силу следствия леммы 3.1.9 из [6], учитывая $\left(\widetilde{\mathcal{D}}^{\beta}_{\pi^{\alpha-4}}\right)^* \subset S^{\beta}_{\pi^{\alpha-4}}$ и $\widetilde{\varphi}^* \in \left[S^{\beta}_{\pi^{\alpha-5}}\right]^s$, можно потвердить, что функционал $(\overline{v, \varphi}) = (\widetilde{\mu}, \widetilde{\varphi}^*)$. Далее, учитывая, что $\widetilde{\mu} \in \left(S^{\beta,D_3}_{\pi^{\alpha-4}}\right)'_p$, можно показать, что $v \in \left[\mathcal{U}^{\beta}_{\pi^{\alpha-5}}\right]^s$.

В силу [6, лемма 3.1.9] для каждой функции $\varphi \in \left[\mathcal{D}^{\beta}_{\pi^{\alpha-5}}\right]^s$ имеем

$$|(\overline{v, \varphi})| = |(\widetilde{\mu}, \widetilde{\varphi}^*)| \leqslant \||\widetilde{\mu}|\|^{\beta,D_3}_{m_3,\pi^{\alpha-4}} \|\widetilde{\varphi}^*\|^{\beta,D_3}_{m_3,\pi^{\alpha-4}} \leqslant c_{14} \|u\|^{\beta,B}_{\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} \pi_k\right)^{\alpha}} \|\varphi\|^{\beta,B'},$$

$$B' = \left(\frac{\beta}{eD_3}\right)^{\beta} 2^{-(\nu+1)}.$$

Отсюда получаем, что $v \in \left[(\mathcal{D}^{\beta,B'}_{\pi^{\alpha-5}})\right]^s$ и $\|v\|^{\beta,B'}_{\pi^{\alpha-5}} \leqslant c_{14} \|u\|^{\beta,B}_{\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} \pi_k\right)^{\alpha}}$, где B' не зависит от функционала u.

Можно доказать, что v является решением (1) в окрестности π, тогда для любой $\varphi \in \left[\mathcal{D}^{\beta}_{\pi^{\alpha-5}}\right]^t$ имеем $(\overline{P(D)v, \varphi}) = (\overline{v}, \overline{P^*(D)\varphi}) = (\widetilde{\mu}, (\overline{P^*(D)\varphi})) = (\widetilde{\mu, P'}\widetilde{\varphi}^*) = 0$.

Теперь проверим, что функции u и v совпадают на $\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} \pi_k\right)^{\alpha-A}$, и для каждой функции $\varphi \in \left[\mathcal{D}^{\beta}_{\pi_i^{\alpha-4}}\right]^s$ будет выполняться равенство

$$(\overline{v, \varphi}) = (\widetilde{\mu}, \widetilde{\varphi}^*) = (\widetilde{\mu}^i, \widetilde{\varphi}^*) = (\mu^i, \widetilde{\varphi}^*) \mp \sum_{t=1}^{n} \left(\chi^k_{s,t}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_t} \widetilde{\varphi}^*\right) =$$
$$= (\mu^i, \widetilde{\varphi}^*) = \sum_{\lambda=0}^{l} \int\limits_{N^{\lambda}} d^{\lambda}(z, D_z) \widetilde{\varphi}^* \mu^{\lambda,i} = (\overline{u, \varphi}).$$

На основании [6, лемма 3.1.4] для каждой функции $\varphi \in \left[\mathcal{D}^{\beta}_{(\bigcup_{k=1}^{n}\pi_k)^{\alpha-6}}\right]^s$ получаем следующее:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + ... + \varphi_n,$$

где $\varphi_i \in [\mathcal{D}^{\beta}_{\pi_i^{\alpha-5}}]^s$, $i = 1, 2, ..., n$.

Поэтому для всех $\varphi \in [\mathcal{D}^{\beta}_{(\bigcup_{k=1}^{n}\pi_k)^{\alpha-6}}]^s$ имеем $(\overline{v,\varphi}) = \sum\limits_{i=1}^{n}(\overline{v,\varphi_i}) = \sum\limits_{i=1}^{n}(\overline{u,\varphi_i}) = (\overline{u,\varphi})$. □

Представление решения на гранях. Обобщенное решение u на L имеет n представлений в виде аналитических функционалов, сосредоточенных на N:

$$(\overline{u,\varphi}) = \sum_{\lambda=0}^{l}\int\limits_{N^\lambda} d^\lambda(z, D_z)\widetilde{\varphi}^*\mu^{\lambda,i}, \quad i = \overline{1,n},$$

где $\mu^{\lambda,i}$ — векторные меры, удовлетворяющие оценке, определяющей принадлежность u к $\mathcal{U}^{\beta}_{L}$.

Склеивание функционалов. На пересечении граней $\pi_i \cap \pi_j$ меры $\mu^i = \sum\limits_{\lambda=0}^{l} d^{\lambda^*}(z, D_z)\mu^{\lambda,i}$ совпадают в смысле действия на соответствующие основные функции: $(\mu^i - \mu^j, \widetilde{\varphi}^*) = 0$. Используя лемму о $\overline{\partial}$-замкнутых формах (или ее аналог для функционалов) в $\mathbb{C}^n$ [6, лемма 3.1.5], функционалы μ^i «склеиваются» в единый функционал $\widetilde{\mu}$ на всем π.

Продолжение и оценка. Построенный функционал $\widetilde{\mu}$ принадлежит пространству $(S^{\beta,D_3}_{\pi^{\alpha-4}})'_P$, где $\alpha > 4$ и D_3 — константа, связанная с B. Это гарантирует, что $\widetilde{\mu}$ определяет обобщенное решение v в окрестности π, и $(\overline{v,\varphi}) = (\widetilde{\mu}, \widetilde{\varphi}^*)$.

Проверка совпадения. Функция v является решением системы (1) и совпадает с u на $\bigcup\limits_{k=1}^{n}\pi_k$. Оценка нормы $\|v\|^{\beta,B'}_{\pi^{\alpha-5}}$ прямо следует из свойств построенного функционала $\widetilde{\mu}$ и его оценки через норму u.

2. Задача Дарбу – Гурса – Бодо для волнового уравнения

Теорема о продолжении является общим случаем классических задач. В качестве классического примера рассмотрим одномерное волновое уравнение (простейший пример слабо гиперболического оператора) и его связь с задачей Дарбу – Гурса – Бодо.

Рассмотрим систему $t = s = 1$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{2}$$

В области $\pi = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ задача Дарбу – Гурса – Бодо требует найти решение, удовлетворяющее краевым условиям на осях

$$u(x, 0) = f(x), \quad u(0, y) = g(y),$$

где $f(0) = g(0)$. Классическое решение имеет вид $u(x, y) = f(x) + g(y) - f(0)$.

Обобщение. В контексте системы (2), если мы рассмотрим оператор $P(D) = \frac{\partial^2}{\partial\xi_1\partial\xi_2}$ в $\mathbb{R}^2$, грани $\pi_1 = \{\xi_1 = 0\}$ и $\pi_2 = \{\xi_2 = 0\}$. Наша теорема утверждает, что если обобщенное решение u (в классе ОФБП) задано в окрестности осей $\pi_1 \cup \pi_2$, то оно может быть продолжено как обобщенное решение v в окрестность всего квадранта π.

Современный аспект. Классическое решение $u(x, y) = f(x) + g(y) - \mathrm{const}$ показывает, что решение формируется границей. Обобщение этой задачи в классе ОФБП означает, что даже если граничные условия $f(x)$ и $g(y)$ являются крайне сингулярными (например, не имеют конечного порядка сингулярности, как в случае гиперфункций), решение в области π будет определяться ими и будет корректно продолжено, сохраняя при этом свою структуру, как это описано теорией.

Заключение

Доказанная теорема о возможности продолжения обобщенных решений в пространствах бесконечного порядка $\mathcal{U}^\beta$ является существенным шагом в обобщении классической теории краевых задач. Связь этих пространств с аналитическими функционалами и гиперфункциями позволяет рассматривать решения дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в наиболее широких аналитических классах, приближая теорию линейных операторов к современной комплексной геометрии и анализу.

Список литературы

1. *Schapira P.* Théorie des hyperfonctions. Berlin, Heidelberg : Springer, 1970. 157 p. (Lecture Notes in Mathematics, vol. 126). DOI: https://doi.org/10.1007/BFb0059484
2. *Ehrenpreis L.* A new proof and an extension of Hartog's theorem // Bulletin of the American Mathematical Society. 1961. Vol. 67, iss. 5. P. 507–509. DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1961-10661-7
3. *Malgrange B.* Systèmes différentiels à coefficients constants // Séminaire N. Bourbaki. 1964. No. 8, exp. no. 246. P. 79–89. https://numdam.org/item/SB_1962-1964__8__79_0.pdf
4. *Malgrange B.* Sur les systèmes différentiels à coefficients constants // Séminaire Jean Leray (1961–1962) et Colloque sur les équations aux dérivées partielles (C.N.R.S. Paris, 1962), exp. no. 7. P. 1–13.
5. *Паламодов В. П.* Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. Москва : Наука, 1967. 488 с.
6. *Бердимуратов А. М.* Об аналоге задачи Дарбу – Гурса – Бодо в классах обобщенных функций для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Бишкек, 1992. 110 с.

References

1. Schapira P. *Théorie des hyperfonctions*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 126. Springer Berlin, Heidelberg, 1970. 157 p. DOI: https://doi.org/10.1007/BFb0059484
2. Ehrenpreis L. A new proof and an extension of Hartog's theorem. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1961, vol. 67, iss. 5, pp. 507–509. DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1961-10661-7
3. Malgrange B. Systèmes différentiels à coefficients constants. *Séminaire N. Bourbaki*, 1964, no. 8, exp. no. 246, pp. 79–89. https://numdam.org/item/SB_1962-1964__8__79_0.pdf
4. Malgrange B. Sur les systèmes différentiels à coefficients constants. *Séminaire Jean Leray* (1961–1962) et Colloque sur les équations aux dérivées partielles (C.N.R.S. Paris, 1962), exp. no. 7, pp. 1–13.
5. Palamodov V. P. *Linejnye differentsial'nye operatory s postoyannymi koeffitsientami* [Linear differential operators with constant coefficients]. Moscow, Nauka, 1967. 488 p. (in Russian).
6. Berdimuratov A. M. *On the analogue of the Darboux – Goursat – Baudot problem in classes of generalized functions for systems of partial differential equations with constant coefficients*. Diss. Cand. Sci. (Phys. and Math.). Bishkek, 1992. 110 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 08.12.2025
Принята к публикации / Accepted 30.04.2026
Опубликована / Published 31.08.2026