Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 3. С. 393–406
*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 3, pp. 393–406
https://mmi.sgu.ru DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-3-393-406
EDN: https://elibrary.ru/QCHLIO

Научная статья
УДК 539.3

# О реконструкции упругих постоянных трансверсально-изотропной призмы

**А. О. Ватульян, И. В. Гусаков**✉

Южный федеральный университет, Россия, 344006, г. Ростов-на-Дону, ул. Б. Садовая, д. 105, корп. 42

**Ватульян Александр Ованесович**, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории упругости Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича, aovatulyan@sfedu.ru, https://orcid.org/0000-0003-0444-4496, SPIN: 3865-2040, AuthorID: 3469

**Гусаков Иван Владимирович**, бакалавр Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича, igusakov@sfedu.ru, https://orcid.org/0009-0009-6167-7537, SPIN: 1551-2252, AuthorID: 1319053

**Аннотация.** Идентификация механических свойств в рамках трансверсально-изотропной модели является актуальной задачей механики материалов, биомеханики и геофизики. Использование классических экспериментов на сжатие, изгиб и кручение стержневых элементов позволяет достаточно просто определить некоторые соотношения между упругими постоянными. Использование одномерных стержневых моделей при интерпретации результатов лабораторных испытаний часто приводит к значительным систематическим ошибкам из-за неучтенных торцевых эффектов и неоднородности напряженно-деформированного состояния. Целью данного исследования является построение прикладной теории деформирования вытянутых призм и решение обратной задачи восстановления упругих постоянных по информации о перемещениях на боковой поверхности образца. Для построения упрощенной модели деформирования использован вариационный принцип Лагранжа в сочетании с методом Канторовича. Это позволило редуцировать трехмерные уравнения теории упругости к системе обыкновенных дифференциальных уравнений и получить аналитические решения для образцов произвольного поперечного сечения. В работе детально проанализированы два типа ориентации образца: продольная и поперечная по отношению к оси упругой симметрии. На основе полученных решений предложен алгоритм идентификации пяти упругих постоянных, включающий два этапа. На первом этапе по измерениям перемещений в зоне, удаленной от торцов, определяются четыре упругие постоянные. На втором этапе с использованием приближенного соотношения Сен-Венана вычисляется модуль сдвига $c_{44}$. Эффективность предложенного подхода подтверждена серией численных экспериментов для кортикальной костной ткани и сланца с применением метода конечных элементов. Результаты демонстрируют хорошую точность реконструкции параметров. Разработанная модель позволяет существенно повысить надежность интерпретации данных стандартных компрессионных тестов на трансверсально-изотропных материалах.

**Ключевые слова:** трансверсальная изотропия, прикладная модель, сжатие призмы, погранслой, обратные задачи

**Благодарности:** Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-11-00265-П, https://rscf.ru/project/22-11-00265/) в Южном федеральном университете.

**Для цитирования:** *Ватульян А. О., Гусаков И. В.* О реконструкции упругих постоянных трансверсально-изотропной призмы // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 3. С. 393–406. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-3-393-406, EDN: QCHLIO

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

© Ватульян А. О., Гусаков И. В., 2026

Article

# On the reconstruction of elastic constants of a transversely isotropic prism

**A. O. Vatulyan, I. V. Gusakov**✉

Southern Federal University, 105/42 Bolshaya Sadovaya St., Rostov-on-Don 344006, Russia

**Alexander O. Vatulyan**, aovatulyan@sfedu.ru, https://orcid.org/0000-0003-0444-4496, SPIN: 3865-2040, AuthorID: 3469

**Ivan V. Gusakov**, igusakov@sfedu.ru, https://orcid.org/0009-0009-6167-7537, SPIN: 1551-2252, AuthorID: 1319053

**Abstract.** Identification of mechanical properties within the framework of a transversely isotropic model is a relevant problem in biomechanics and geophysics. The use of one-dimensional rod models for interpreting laboratory test results often leads to significant systematic errors due to neglected end effects and inhomogeneity of the stress-strain state. The aim of this study is to develop an applied theory of deformation for slender prisms and to solve the inverse problem of reconstructing elastic constants from displacement measurements on the lateral surface of the specimen. To address this problem, Lagrange's variational principle was combined with the Kantorovich method. This approach made it possible to reduce the three-dimensional equations of elasticity to a system of ordinary differential equations and to obtain analytical solutions for specimens of arbitrary cross-section. Two types of specimen orientation are analyzed in detail: longitudinal and transverse relative to the axis of elastic symmetry. Based on the obtained solutions, an algorithm for identifying the five elastic constants is proposed, consisting of two stages. In the first stage, four elastic constants are determined from displacement measurements in the region away from the ends. In the second stage, the shear modulus $c_{44}$ is calculated using an approximate Saint-Venant relation. The effectiveness of the proposed approach is confirmed by a series of numerical experiments for cortical bone tissue and shale using the finite element method. The results demonstrate good accuracy in parameter reconstruction. The developed model can significantly improve the reliability of interpreting data from standard compression tests on transversely isotropic materials.

**Keywords:** transverse isotropy, applied model, prism compression, boundary layer, inverse problems

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-11-00265-P, https://rscf.ru/en/project/22-11-00265/) at the Southern Federal University.

**For citation:** Vatulyan A. O., Gusakov I. V. On the reconstruction of elastic constants of a transversely isotropic prism. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 3, pp. 393–406 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-3-393-406, EDN: QCHLIO

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Проблема определения механических свойств упругих тел в рамках анизотропной модели является важной для современной механики деформируемого твердого тела, биомеханики и геофизики. Особое внимание исследователей сосредоточено на трансверсально-изотропных моделях, которые характеризуются наличием плоскости изотропии и оси упругой симметрии, перпендикулярной этой плоскости. К таким материалам можно отнести: конструкционные композиты [1], костную ткань [2,3], древесину [4], а также обширный класс горных пород [5,6]. Полное описание упругого поведения таких сред в рамках трансверсально-изотропной модели требует знания пяти независимых упругих постоянных. Известно, что их экспериментальное определение может осложниться влиянием условий закрепления образцов [7] и неоднородностью напряженно-деформированного состояния [8]. Кроме того, из одного теста на одноосное сжатие призматических образцов невозможно получить достаточное количество независимых соотношений [9] для определения всех пяти упругих постоянных. Поэтому в литературе часто встречаются следующие стратегии преодоления этой недоопределенности: 1) проведение испытаний на образцах, вырезанных под разными

углами к оси упругой симметрии [9, 10]; 2) сочетание одноосного сжатия с испытаниями на кручение или косвенное растяжение (бразильский тест) [11]. В обоих случаях активно применяется метод цифровой корреляции изображений (DIC) для регистрации неоднородных полей деформаций вблизи торцов [12]. Отметим также, что интерпретация данных стандартных лабораторных испытаний на одноосное сжатие или растяжение зачастую опирается на классические одномерные стержневые модели, игнорирование торцевых эффектов в которых приводит к существенным ошибкам [13] при идентификации упругих характеристик. В связи с вышеизложенным актуальной задачей является разработка прикладных аналитических моделей, позволяющих в явном виде учитывать структуру торцевых эффектов для призматических образцов.

Среди описанных в литературе аналитических моделей отметим работу [14], где при построении точных решений для конечных трансверсально-изотропных круговых цилиндров используется функция напряжений Лехницкого [15]. В рамках такого подхода решение строится с использованием функций Бесселя. Это позволяет точно удовлетворить граничным условиям и аналитически описать структуру погранслоев вблизи торцов, включая эффекты, вызванные контактным трением. Однако подобные решения отличаются громоздкостью и ограничены круговой геометрией сечения. Это делает затруднительным их использование в инженерной практике.

При построении прикладных аналитических моделей эффективным инструментом является метод Канторовича [16], позволяющий редуцировать уравнения в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Этот метод успешно применяется при решении задач изгиба пластин для функционала Рейсснера [17]. Еще одним способом построения прикладных моделей является использование вариационного принципа Лагранжа [18], основанного на минимизации функционала полной потенциальной энергии. Применение этого принципа гарантирует математическую корректность формулировки соответствующих граничных условий и постановки краевой задачи. Такой подход ранее успешно применялся в задачах о растяжении-сжатии изотропных прямоугольников [19], круговых цилиндров [20] и призм произвольного сечения [21].

Цель работы состоит в построении аналитической модели деформирования трансверсально-изотропной призмы произвольного поперечного сечения при одноосном сжатии. С использованием метода Канторовича в рамках вариационного принципа Лагранжа получены решения для двух основных вариантов ориентации образца (продольной и поперечной относительно оси упругой симметрии). На основе анализа полученных решений предложен алгоритм идентификации пяти упругих постоянных, не требующий проведения сложных экспериментов на кручение и базирующийся на данных о перемещениях на боковой поверхности образца в двух тестах на одноосное сжатие.

## 1. Постановка задачи

В рамках линейной теории упругости рассмотрим модельную задачу сжатия упругого призматического образца из трансверсально-изотропного материала [15] с произвольным поперечным сечением $S \subset \mathbb{R}^2$, характерным поперечным размером $a$ и высотой $h$. Ось упругой симметрии совпадает с осью $x_3$. Уравнения теории упругости [18] в области $V = S \times [0, h]$ при отсутствии массовых сил имеют вид

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\big(u_{i,j} + u_{j,i}\big), \quad i, j = \overline{1,3},$$
$$\sigma_{11} = c_{11}\varepsilon_{11} + c_{12}\varepsilon_{22} + c_{13}\varepsilon_{33},$$
$$\sigma_{22} = c_{12}\varepsilon_{11} + c_{11}\varepsilon_{22} + c_{13}\varepsilon_{33},$$
$$\sigma_{33} = c_{13}\varepsilon_{11} + c_{13}\varepsilon_{22} + c_{33}\varepsilon_{33},$$
$$\sigma_{12} = 2c_{66}\varepsilon_{12}, \quad \sigma_{13} = 2c_{44}\varepsilon_{13}, \quad \sigma_{23} = 2c_{44}\varepsilon_{23}, \quad c_{66} = \frac{c_{11} - c_{12}}{2},$$

где $c_{ij}$ — упругие постоянные трансверсально-изотропного материала.

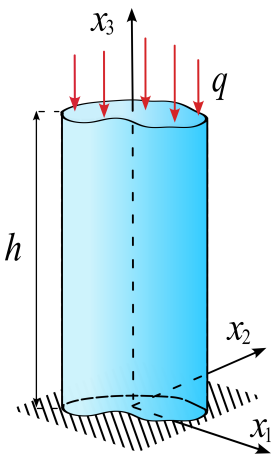


Рис. 1. Схема нагружения трансверсально-изотропной призмы
Fig. 1. Loading scheme of a transversely isotropic prism

Рассмотрим задачу о сжатии призмы (рис. 1), нижний торец которой ($x_3 = 0$) жестко защемлен, а к верхнему ($x_3 = h$) приложена нормальная нагрузка. Боковая поверхность свободна от напряжений. Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} &x_3 = 0: \quad u_i = 0, \quad i = \overline{1,3}, \\ &x_3 = h: \quad \sigma_{33} = -q(x_1, x_2), \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0, \\ &x_1, x_2, x_3 \in \partial S \times [0, h]: \quad \sigma_{ij} n_j = 0, \quad i, j = \overline{1,3}, \end{aligned}$$

где $n_j$ — компоненты единичного вектора внешней нормали к боковой поверхности призмы.

## 2. Упрощение задачи

Введем безразмерный малый параметр $\varepsilon = ah^{-1}$ и безразмерные координаты $\xi_i = x_i h^{-1}$. Поперечное сечение в новых координатах обозначим за $\tilde{S}$, объем обозначим за $\tilde{V}$. Далее, для удобства записи символ $\sim$ будем опускать. Введем геометрические характеристики сечения и осевую силу $Q$, причем оси координат в плоскости сечения выберем так, чтобы они совпадали с главными центральными осями инерции сечения

$$F = \int_S dS, \quad Q = \int_S q(\xi_1, \xi_2)\, dS, \quad q_0 = \frac{Q}{F}, \quad J_i = \int_S \xi_i^2 dS, \quad i = 1, 2.$$

Для вытянутых ($\varepsilon \leqslant 0.2$) образцов представим компоненты поля перемещений в виде линейных комбинаций по поперечным координатам $\xi_1, \xi_2$, что порождает модель первого порядка

$$\begin{cases} u_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = v_{11}(\xi_3)\xi_1 + v_{12}(\xi_3)\xi_2, \\ u_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = v_{21}(\xi_3)\xi_1 + v_{22}(\xi_3)\xi_2, \\ u_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = v_3(\xi_3). \end{cases} \tag{1}$$

Обоснование применимости модели первого порядка для вытянутых тел, а также анализ ее точности по сравнению с моделями более высокого порядка подробно исследованы в работе [19], где рассмотрена аналогичная задача для изотропного прямоугольника.

Введем функционал полной потенциальной энергии $\Pi$

$$\Pi = \int_V W\, dV - A, \quad A = -\int_S q(\xi_1, \xi_2) u_3(\xi_1, \xi_2, 1)\, dS,$$

где $W = 0.5\, \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$ — удельная энергия деформации, $A$ — работа внешних сил.

Находим компоненты тензоров деформаций и напряжений, учитывая введенное представление функций $u_i$ согласно (1). Тогда удельная потенциальная энергия $W$ примет вид

$$\begin{aligned} W = \frac{1}{2}\Big[&c_{11}(v_{11}^2 + v_{22}^2) + c_{33}(v_3')^2 + 2c_{12}v_{11}v_{22} + 2c_{13}v_3'(v_{11} + v_{22}) + \\ &+ c_{66}(v_{12} + v_{21})^2 + c_{44}(v_{21}'\xi_1 + v_{22}'\xi_2)^2 + c_{44}(v_{11}'\xi_1 + v_{12}'\xi_2)^2\Big]. \end{aligned}$$

Энергия $W$ является положительно определенной квадратичной формой [18] от компонент тензора деформации, что накладывает на упругие постоянные ограничения вида

$$c_{11} > |c_{12}|, \quad c_{33} > 0, \quad c_{44} > 0, \quad c_{33}(c_{11} + c_{12}) > 2c_{13}^2. \tag{2}$$

Функционал полной потенциальной энергии после интегрирования по площади поперечного сечения представим в форме

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^h \Big(F\big[c_{11}(v_{11}^2+v_{22}^2)+c_{33}(v_3')^2+2c_{12}v_{11}v_{22}+2c_{13}v_3'(v_{11}+v_{22})+c_{66}(v_{12}+v_{21})^2\big]+$$
$$+c_{44}\left(J_1(v_{21}')^2+J_2(v_{22}')^2\right)+c_{44}\left(J_1(v_{11}')^2+J_2(v_{12}')^2\right)\Big)\,d\xi_3+Qv_3(1).$$

Применим вариационный принцип Лагранжа [18] к функционалу $\Pi$; соответствующее вариационное уравнение имеет вид $\delta\Pi=0$. Осуществляя варьирование и приравнивая к нулю коэффициенты при независимых вариациях в объеме и на границе, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}
c_{11}v_{11}+c_{12}v_{22}+c_{13}v_3'-\frac{J_1}{F}c_{44}v_{11}''=0,\\
c_{12}v_{11}+c_{11}v_{22}+c_{13}v_3'-\frac{J_2}{F}c_{44}v_{22}''=0,\\
c_{66}(v_{12}+v_{21})-\frac{J_2}{F}c_{44}v_{12}''=0,\\
c_{66}(v_{21}+v_{12})-\frac{J_1}{F}c_{44}v_{21}''=0,\\
c_{13}(v_{11}+v_{22})+c_{33}v_3'=-q_0,
\end{gathered}\tag{3}$$

с граничными условиями

$$v_3(0)=0,\quad v_{ij}(0)=0,\quad v_{ij}'(1)=0,\quad i,j=1,2.\tag{4}$$

В силу однородности граничных условий (4) краевые задачи для $v_{12}$, $v_{21}$ полностью отщепляются от общей задачи и допускают лишь тривиальное решение $v_{12}(\xi_3)\equiv 0$, $v_{21}(\xi_3)\equiv 0$. Это свидетельствует о том, что при нормальной торцевой нагрузке без трения можно использовать гипотезы, представленные в работе [21], без потери общности. Однако при наличии касательной нагрузки на торце эти функции, вообще говоря, не равны нулю, и задача оказывается связанной.

## 3. Аналитическое решение

Для упрощения записи введем следующие комбинации упругих постоянных:

$$\gamma_0=c_{33}\left(c_{11}+c_{12}\right)-2c_{13}^2,\quad \gamma_i=\frac{c_{1i}c_{33}-c_{13}^2}{c_{13}(c_{11}-c_{12})},\quad \gamma_i^*=\left(c_{1i}-\frac{c_{13}^2}{c_{33}}\right)\quad i=1,2.$$

Заметим, что $\gamma_0>0$ в силу условия (2).

Построим решение краевой задачи (3)–(4). Выразим $v_3'(\xi_3)$ из последнего уравнения в (3)

$$v_3'=-\frac{1}{c_{33}}\left(q_0+c_{13}(v_{11}+v_{22})\right).\tag{5}$$

Подставляя (5) в первые два уравнения в (3), получим связанную систему дифференциальных уравнений второго порядка относительно $v_{11}$ и $v_{22}$:

$$\begin{gathered}
\gamma_1^*v_{11}+\gamma_2^*v_{22}-\frac{J_1c_{44}}{F}v_{11}''=q_0\frac{c_{13}}{c_{33}},\\
\gamma_2^*v_{11}+\gamma_1^*v_{22}-\frac{J_2c_{44}}{F}v_{22}''=q_0\frac{c_{13}}{c_{33}}.
\end{gathered}$$

Частное решение неоднородной системы имеет вид $v_{11}=v_{22}=q_0c_{13}\gamma_0^{-1}$. Решение однородной системы будем искать в виде $v_{ii}=C_i\exp\left(\lambda\xi_3\right)$.

Согласно подходу, развитому в работе [19], общее решение краевых задач, полученных с помощью вышеописанной техники, представляется в виде суммы стержневого решения и быстро затухающего при удалении от торца $\xi_3 = 0$ погранслойного решения. Введем функции вида

$$\Phi_k(\xi_3) = \frac{e^{\lambda_k(\xi_3-2)} + e^{-\lambda_k\xi_3}}{1+e^{-2\lambda_k}}, \quad \Phi_k^*(\xi_3) = \int_0^{\xi_3} \Phi_k(t)dt,$$

где $\lambda_k > 0$ — корни характеристического биквадратного уравнения

$$\frac{J_1J_2c_{44}^2}{F^2}\lambda^4 - \frac{(J_1+J_2)c_{44}}{F}\gamma_1^*\lambda^2 + \left(\gamma_1^{*2} - \gamma_2^{*2}\right) = 0. \tag{6}$$

Дискриминант $D_A$ уравнения (6) может быть представлен в виде

$$D_A = \frac{c_{44}^2}{F^2}\left[(J_1-J_2)^2\gamma_1^{*2} + 4J_1J_2\gamma_2^{*2}\right] \geqslant 0.$$

Отметим, что силу условий (2)

$$\gamma_1^{*2} - \gamma_2^{*2} = \frac{(c_{11}-c_{12})\gamma_0}{c_{33}} > 0.$$

Поскольку $\gamma_1^* > \gamma_2^*$ (так как $c_{11} > c_{12}$) и $\gamma_1^* + \gamma_2^* > 0$, имеем $\gamma_1^* > 0$. Следовательно, по теореме Виета величины $\lambda_k^2$ вещественны и положительны.

Получим итоговые аналитические выражения для функций перемещений:

$$u_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = q_0\frac{c_{13}}{\gamma_0}\xi_1\left(1 - \sum_{i=1}^{2} A_i\Phi_i(\xi_3)\right),$$

$$u_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = q_0\frac{c_{13}}{\gamma_0}\xi_2\left(1 - \sum_{i=1}^{2} \alpha_iA_i\Phi_i(\xi_3)\right),$$

$$u_3(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = -\frac{q_0}{\gamma_0}\left((c_{11}+c_{12})\xi_3 - \frac{c_{13}^2}{c_{33}}\sum_{i=1}^{2} A_i(1+\alpha_i)\Phi_i^*(\xi_3)\right),$$

где

$$A_1 = \frac{1-\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2}, \quad A_2 = \frac{\alpha_1-1}{\alpha_1-\alpha_2}, \quad \alpha_k = \frac{\lambda_k^2\frac{J_1c_{44}}{F} - \gamma_1^*}{\gamma_2^*}, \quad k = 1,2.$$

В частности, для призмы квадратного сечения со стороной $\varepsilon$ ($F = \varepsilon^2$, $J_1 = J_2 = J = \varepsilon^4/12$) получим

$$\begin{gathered} u_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = q_0\,\frac{c_{13}}{\gamma_0}\,\xi_1\big(1-\Phi_1(\xi_3)\big), \quad u_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = q_0\,\frac{c_{13}}{\gamma_0}\,\xi_2\big(1-\Phi_1(\xi_3)\big), \\ u_3(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = -\frac{q_0}{\gamma_0}\left((c_{11}+c_{12})\,\xi_3 - \frac{2c_{13}^2}{c_{33}}\,\Phi_1^*(\xi_3)\right), \end{gathered} \tag{7}$$

где показатели погранслоя имеют вид

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{F\gamma_0}{Jc_{44}c_{33}}} = \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\frac{12\gamma_0}{c_{44}c_{33}}}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{F(c_{11}-c_{12})}{Jc_{44}}} = \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\frac{12(c_{11}-c_{12})}{c_{44}}}.$$

Функция $\Phi_2(\xi_3)$, соответствующая $\lambda_2$, не участвует в решении (7), так как $A_2 = 0$. Это легко проверить прямой подстановкой $\lambda_1$ в выражение для $\alpha_1$ при условии $J_1 = J_2 = J$.

Отметим, что при $\varepsilon \to 0$ погранслойные слагаемые в (7) стремятся к нулю и решение совпадает со стержневым [15] для трансверсально-изотропного стержня.

Введем безразмерный параметр $\Lambda$, не зависящий от геометрии и полностью определяемый упругими постоянными

$$\Lambda = \frac{\varepsilon}{\sqrt{12}}\lambda_1 = \sqrt{\frac{\gamma_0}{c_{44}c_{33}}} = \sqrt{\frac{c_{33}(c_{11}+c_{12})-2c_{13}^2}{c_{44}c_{33}}}.$$

В табл. 1 приведены значения параметра $\Lambda$ для различных материалов. Полученные значения могут быть использованы для априорной оценки области влияния пограничного слоя вблизи защемленного торца призматического образца.

*Table 1*

Значения $\Lambda$ для трансверсально-изотропных материалов
Values of $\Lambda$ for transversely isotropic materials

| Материал | Параметр, ГПа | | | | | $\Lambda$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $c_{11}$ | $c_{12}$ | $c_{13}$ | $c_{33}$ | $c_{44}$ | |
| Древесина (сосна) [4] | 1.1 | 0.6 | 0.7 | 13.5 | 0.8 | 1.42 |
| Костная ткань (кортикальная) [22] | 24.4 | 13.6 | 14.7 | 33.5 | 6.9 | 1.91 |
| Горная порода (сланец) [23] | 32.2 | 14.9 | 14.5 | 27.2 | 6.9 | 2.14 |

В частности, для изотропного материала параметр $\Lambda$ выражается через коэффициент Пуассона $\nu$ и имеет вид

$$\Lambda = \sqrt{\frac{2(1+\nu)}{1-\nu}}.$$

Отметим, что для $\nu = 0.3$ имеем $\Lambda \approx 1.93$, что близко к значению из табл. 1 для кортикальной костной ткани.

## 4. Сжатие при поперечной ориентации материала

Для определения пяти упругих постоянных трансверсально-изотропного материала одного испытания на одноосное сжатие недостаточно. Для преодоления этого ограничения возможно использовать два типа испытаний, например кручение и одноосное сжатие. Такой подход может использоваться при определении свойств горных пород [24], но едва ли подойдет для таких материалов, как, например, костная ткань. Более доступным способом является проведение двух испытаний на одноосное сжатие образцов, вырезанных из одного и того же материала под разными углами к оси упругой симметрии [25,26]. Такой подход не требует изменения схемы нагружения и позволяет использовать стандартное оборудование для компрессионных тестов.

Рассмотрим задачу, в которой ось упругой симметрии материала ориентирована вдоль поперечной координаты $\xi_1$, плоскостью изотропии становится $\xi_2-\xi_3$. Будем далее называть задачу, в которой ось упругой симметрии совпадает с осевой координатой $\xi_3$, задачей A, а задачу с осью симметрии, направленной вдоль поперечной координаты $\xi_1$, — задачей B.

Определяющие соотношения для задачи B получены из исходного закона Гука путем поворота тензора упругости на 90° вокруг оси $\xi_2$:

$$\sigma_{11} = c_{33}\varepsilon_{11} + c_{13}\varepsilon_{22} + c_{13}\varepsilon_{33}, \quad \sigma_{22} = c_{13}\varepsilon_{11} + c_{11}\varepsilon_{22} + c_{12}\varepsilon_{33},$$
$$\sigma_{33} = c_{13}\varepsilon_{11} + c_{12}\varepsilon_{22} + c_{11}\varepsilon_{33}, \quad \sigma_{12} = 2c_{44}\varepsilon_{12}, \quad \sigma_{13} = 2c_{44}\varepsilon_{13}, \quad \sigma_{23} = 2c_{66}\varepsilon_{23}.$$

Поскольку условия нагружения и геометрия образца остаются прежними, гипотезы для компонент поля перемещений соответствуют (1). Удельная потенциальная энергия деформации $W$ принимает вид

$$W = \frac{1}{2}\Big[c_{33}v_{11}^2 + c_{11}(v_{22}^2 + (v_3')^2) + 2c_{12}v_{22}v_3' + 2c_{13}v_{11}(v_{22}+v_3')+$$

$$+c_{44}(v_{12}+v_{21})^2+c_{44}(v'_{11}\xi_1+v'_{12}\xi_2)^2+c_{66}(v'_{21}\xi_1+v'_{22}\xi_2)^2\Big].$$

Отметим, что условие (2) справедливо для задачи B.

Минимизация функционала полной потенциальной энергии ($\delta\Pi=0$) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}
c_{33}v_{11}+c_{13}v_{22}+c_{13}v'_3-\frac{J_1}{F}c_{44}v''_{11}=0,\\
c_{13}v_{11}+c_{11}v_{22}+c_{12}v'_3-\frac{J_2}{F}c_{66}v''_{22}=0,\\
c_{44}(v_{12}+v_{21})-\frac{J_2}{F}c_{44}v''_{12}=0,\\
c_{44}(v_{21}+v_{12})-\frac{J_1}{F}c_{66}v''_{21}=0,\\
c_{13}v_{11}+c_{12}v_{22}+c_{11}v'_3=-q_0,
\end{gathered}\tag{8}$$

с граничными условиями (4). Как и в задаче A, краевые задачи для компонент $v_{12}, v_{21}$ отщепляются от общей задачи и имеют тривиальные решения.

Аналогично построим решение краевой задачи (8)–(4). Подставляя полученные функции $v_{11}$, $v_{22}$ и $v_3$ в гипотезы (1), получаем решение для компонент поля перемещений для произвольного сечения в задаче B:

$$\begin{gathered}
u_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=q_0\frac{c_{13}}{\gamma_0}\xi_1\left(1-\sum_{i=1}^{2}B_i\Psi_i(\xi_3)\right),\\
u_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=q_0\frac{c_{13}}{\gamma_0}\xi_2\left(\gamma_2-\sum_{i=1}^{2}\beta_iB_i\Psi_i(\xi_3)\right),\\
u_3(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=-q_0\frac{c_{13}}{\gamma_0}\left(\gamma_1\xi_3-\frac{1}{c_{11}}\sum_{i=1}^{2}B_i(c_{13}+\beta_ic_{12})\Psi^*_i(\xi_3)\right),
\end{gathered}\tag{9}$$

где

$$B_1=\frac{\beta_2-\gamma_2}{\beta_2-\beta_1},\quad B_2=\frac{\gamma_2-\beta_1}{\beta_2-\beta_1},\quad \beta_k=\frac{\mu_k^2\frac{J_1c_{44}}{F}-\left(c_{33}-\frac{c_{13}^2}{c_{11}}\right)}{c_{13}\left(1-\frac{c_{12}}{c_{11}}\right)},$$

$$\Psi_k(\xi_3)=\frac{e^{\mu_k(\xi_3-2)}+e^{-\mu_k\xi_3}}{1+e^{-2\mu_k}},\quad \Psi^*_k(\xi_3)=\int_0^{\xi_3}\Psi_k(t)dt,\quad k=1,2,$$

где $\mu_k>0$ — корни характеристического биквадратного уравнения

$$\frac{J_1J_2c_{44}c_{66}}{F^2}\mu^4-\frac{1}{F}\left[J_1c_{44}\left(c_{11}-\frac{c_{12}^2}{c_{11}}\right)+J_2c_{66}\left(c_{33}-\frac{c_{13}^2}{c_{11}}\right)\right]\mu^2+\frac{(c_{11}-c_{12})}{c_{11}}\gamma_0=0.\tag{10}$$

Дискриминант $D_B$ уравнения (10) может быть представлен в виде

$$D_B=\frac{1}{F^2}(H_1-H_2)^2+\frac{4J_1J_2c_{44}c_{66}}{F^2c_{11}^2}c_{13}^2(c_{11}-c_{12})^2\geqslant 0,$$

где введены параметры

$$H_1=\frac{J_1c_{44}(c_{11}^2-c_{12}^2)}{c_{11}},\quad H_2=\frac{J_2c_{66}(c_{11}c_{33}-c_{13}^2)}{c_{11}}.$$

Из $c_{11} > |c_{12}|$ и $\gamma_0 > 0$ следует $c_{11}c_{33} > c_{13}^2$, значит, $H_1, H_2 > 0$. Таким образом, по теореме Виета величины $\mu_k^2$ вещественны и положительны.

Для призмы квадратного сечения, где $J_1 = J_2 = J = \varepsilon^4/12$, общее решение (9) сохраняет свой вид. В отличие от задачи А, где при квадратном сечении решение выражается только через функцию $\Phi_1(\xi_3)$, в задаче В существенного упрощения не происходит, оно содержит обе функции — $\Psi_1(\xi_3)$ и $\Psi_2(\xi_3)$.

## 5. Результаты численных экспериментов

Для верификации построенных аналитических моделей рассмотрим образец с квадратным поперечным сечением со стороной $\varepsilon$. Нагрузка полагается равномерно распределенной по торцу: $q(\xi_1, \xi_2) = q_0 = 50$ МПа. Расчеты проведены для набора упругих постоянных [23] (в ГПа): $c_{11} = 32.2$, $c_{12} = 14.9$, $c_{13} = 14.5$, $c_{33} = 27.2$, $c_{44} = 6.9$. КЭ-расчеты выполнены в программе FlexPDE (рис. 2).

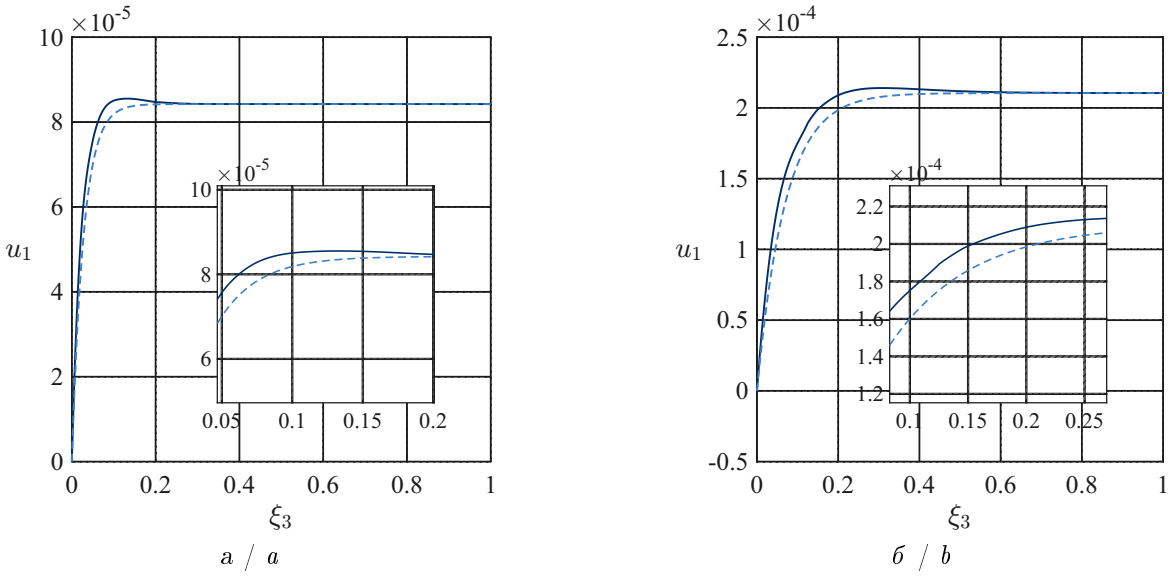


Рис. 2. Перемещения $u_1$ для задачи А, полученные с помощью МКЭ (сплошная линия) и формул (7) (пунктир): *а* — перемещения $u_1(\varepsilon/2, 0, \xi_3)$ при $\varepsilon = 0.2$; *б* — перемещения $u_1(\varepsilon/2, 0, \xi_3)$ при $\varepsilon = 0.5$

Fig. 2. Displacements $u_1$ for problem A obtained using FEM (solid line) and the formulas (7) (dotted line): *a* is displacements $u_1(\varepsilon/2, 0, \xi_3)$ with $\varepsilon = 0.2$; *b* is displacements $u_1(\varepsilon/2, 0, \xi_3)$ with $\varepsilon = 0.5$

Из данных, представленных на рис. 2, видно, что для вытянутых образцов ($\varepsilon \leqslant 0.2$) вдали от защемленного торца ($\xi_3 \geqslant 0.3$) наблюдается практически точное совпадение решений, что подтверждает работоспособность предложенной модели при удалении от торца $\xi_3 = 0$. Вблизи защемленного торца ($\xi_3 < 0.3$) отчетливо проявляется погранслой, который качественно описывается функцией $\Phi_1$. Однако видны расхождения с КЭ-расчетом, что связано с относительно простой аппроксимацией перемещений (1). Как показано в работе [19] для изотропного прямоугольника, использование модели второго порядка (сохранение вторых степеней поперечных координат при аппроксимации полей смещений) позволяет существенно уточнить структуру напряженно-деформированного состояния у торца и добиться лучшего соответствия с численным решением (рис. 3).

Для относительно коротких ($\varepsilon = 0.5$) образцов наблюдается снижение описательной способности модели, погранслой занимает большую часть длины образца.

Из данных, представленных на рис. 3, видно, что перемещения $u_2$ для задачи В качественно повторяют закономерности, выявленные в задаче А, несмотря на более сложную структуру корней характеристического уравнения, обусловленную поперечной ориентацией

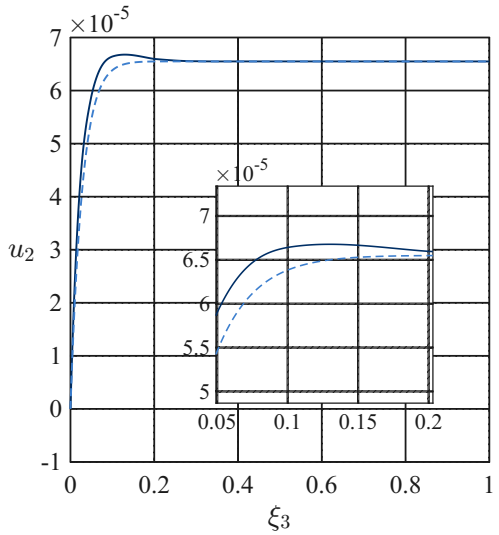


Рис. 3. Перемещения $u_2(0, \varepsilon/2, \xi_3)$ при $\varepsilon = 0.2$ для задачи B, полученные с помощью МКЭ (сплошная линия) и формул (9) при $J_1 = J_2$ (пунктир)

Fig. 3. Displacements $u_2(0, \varepsilon/2, \xi_3)$ with $\varepsilon = 0.2$ for problem B obtained using FEM (solid line) and the formulas (9) considering $J_1 = J_2$ (dotted line)

образца. Перемещения $u_1$ в задачах A и B идентичны в удаленной от защемленного торца зоне.

Перемещения $u_3$ в задачах A и B близки к линейным, ошибка, по сравнению с КЭ-расчетами, не превышает 0.9%.

Таким образом, предложенные аналитические модели адекватно описывают деформирование длинных ($\varepsilon \leqslant 0.2$) призматических образцов и могут служить основой для решения обратных задач идентификации упругих постоянных по данным о перемещениях в наборе точек боковой поверхности.

## 6. Обратная задача

Рассмотрим призматический образец квадратного поперечного сечения с относительной толщиной $\varepsilon = 0.2$, изготовленный из трансверсально-изотропного материала. Проводятся два вычислительных эксперимента на одноосное сжатие: в первом ось упругой симметрии образца совпадает с продольной координатой $\xi_3$ (задача A), во втором — с поперечной координатой $\xi_1$ (задача B). В каждом эксперименте известны: геометрия образца ($F$, $J$), величина приложенной нагрузки $q_0$, а также измеренные в наборе точек боковой поверхности образца перемещения $u_1$, $u_2$, $u_3$. Требуется определить пять упругих постоянных материала $(c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}, c_{44})$.

При удалении от закрепленного торца ($\xi_3 \geqslant 0.3$) функции погранслоя экспоненциально затухают, и поперечные перемещения становятся практически линейными по координатам. Используем аналитические решения (7), (9), выбирая точку измерения $\xi_3 = \xi_3^* \in [0.3, 1]$ на боковой поверхности вне зоны влияния погранслоя. Тогда, пренебрегая погранслойными слагаемыми, получим

$$\begin{gathered} -\frac{u_3^A(\varepsilon/2, 0, \xi_3^*)}{q_0 \xi_3^*} = \frac{c_{11} + c_{12}}{\gamma_0} = M_1, \quad \frac{2u_1^A(\varepsilon/2, 0, \xi_3^*)}{q_0 \varepsilon} = \frac{c_{13}}{\gamma_0} = M_2, \\ -\frac{u_3^B(0, \varepsilon/2, \xi_3^*)}{q_0 \xi_3^*} = \frac{c_{13}}{\gamma_0}\gamma_1 = M_3, \quad \frac{2u_2^B(0, \varepsilon/2, \xi_3^*)}{q_0 \varepsilon} = \frac{c_{13}}{\gamma_0}\gamma_2 = M_4, \end{gathered} \tag{11}$$

где $u_i^A$ — перемещения в задаче A, $u_i^B$ — перемещения в задаче B. Решение системы (11) относительно $c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}$ имеет вид

$$\gamma_0 = \frac{1}{M_1(M_3 - M_4) - 2M_2^2}, \quad c_{33} = \gamma_0 (M_3 - M_4), \quad c_{13} = \gamma_0 M_2,$$
$$c_{11} = \frac{1}{2}\left(\gamma_0 M_1 + \frac{1}{M_3 + M_4}\right), \quad c_{12} = \frac{1}{2}\left(\gamma_0 M_1 - \frac{1}{M_3 + M_4}\right).$$

Из аналитического решения (7) видно, что модуль $c_{44}$ входит только в показатель $\lambda_1$, поэтому его определение по данным из зоны, удаленной от торца, невозможно. Информация о $c_{44}$ содержится в структуре тангенциального перемещения $u_1$ вблизи защемленного торца. Для извлечения этой информации можно минимизировать функционал невязки между экспериментальными и теоретическими значениями перемещений. Однако в рамках предложенной модели первого порядка (1) такой подход будет малоэффективен.

Отметим, что для определения $c_{44}$ можно воспользоваться приближенным соотношением Сен-Венана [27], которое с учетом введенных обозначений примет вид

$$c_{44} = \frac{\gamma_0}{c_{11} + c_{12} + c_{13}(\gamma_1 + 2)}. \tag{12}$$

Использование соотношения (12) позволяет уменьшить число независимых упругих постоянных до четырех, однако неизбежно приводит к ошибкам [28] в оценке упругих постоянных для материалов с сильной анизотропией.

Эффективность предложенного подхода проверена численно на двух наборах упругих постоянных. Прямая задача решалась с помощью МКЭ в пакете FlexPDE. Результаты реконструкции представлены в табл. 2. Здесь $\delta$ — относительная погрешность реконструкции в процентах.

*Table 2*

Результаты реконструкции упругих постоянных
Reconstruction results for elastic constants

| Параметр, ГПа | Параметры костной ткани [22] | | | Параметры сланца [23] | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Исходные | Восстановленные | $\delta$, % | Исходные | Восстановленные | $\delta$, % |
| $c_{11}$ | 24.4 | 24.92 | 2.13 | 32.2 | 32.68 | 1.49 |
| $c_{12}$ | 13.6 | 14.06 | 3.38 | 14.9 | 15.29 | 2.62 |
| $c_{13}$ | 14.7 | 15.20 | 3.40 | 14.5 | 14.87 | 2.55 |
| $c_{33}$ | 33.5 | 34.17 | 2.00 | 27.2 | 27.62 | 1.54 |
| $c_{44}$ | 6.9 | 6.88 | 0.29 | 6.9 | 7.55 | 9.42 |

Анализ данных табл. 2 показывает, что для костной ткани относительная погрешность восстановления констант $c_{11}, c_{12}, c_{13}$ и $c_{33}$ не превышает 3.5%. При этом реконструкция модуля $c_{44}$ через (12) демонстрирует высокую точность (относительная погрешность менее 0.5%). Для сланца, характеризующегося иным соотношением модулей, относительная погрешность идентификации основных констант находится в пределах 1.5–2.6%. Наибольшее отклонение наблюдается для модуля $c_{44}$ (около 9.4%). Полученные данные свидетельствуют о приемлемой точности предложенного подхода, позволяющего восстанавливать упругие параметры материала по результатам измерения перемещений боковой поверхности призматического образца.

## Заключение

Предложена упрощенная модель сжатия призмы из трансверсально-изотропного материала, построенная на базе метода Канторовича в рамках вариационного принципа Лагранжа. Полученные аналитические решения позволили детально исследовать структуру пограничных слоев, возникающих вблизи жестко защемленного торца. Решена обратная задача реконструкции пяти упругих постоянных, основанная на двух экспериментах на одноосное сжатие. Полученные результаты подтверждают возможность использования построенной модели при идентификации упругих свойств трансверсально-изотропных материалов.

### Список литературы

1. *Christensen R. M.* Mechanics of composite materials. Mineola ; New York : Dover Publications, 2005. 384 p.
2. Bone mechanics handbook / ed. by S. C. Cowin. 2nd ed. Boca Raton : CRC Press, 2001. 980 p. DOI: https://doi.org/10.1201/b14263
3. *Li S., Demirci E., Silberschmidt V. V.* Variability and anisotropy of mechanical behavior of cortical bone in tension and compression // Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials. 2013. Vol. 21. P. 109–120. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2013.02.021

4. *Ашкенази Е. К.* Анизотропия древесины и древесных материалов. Москва : Лесная промышленность, 1978. 224 с.
5. *Amadei B.* Rock anisotropy and the theory of stress measurements. Berlin : Springer, 1983. 482 p. (Lecture Notes in Engineering, vol. 2). DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-82040-3
6. *Winkler M. B., Frühwirt T., Marcher T.* Elastic behavior of transversely isotropic cylindrical rock samples under uniaxial compression considering ideal and frictional boundary conditions // Applied Sciences. 2024. Vol. 14, iss. 1. Art. 17. DOI: https://doi.org/10.3390/app14010017
7. *Pagano N. J., Halpin J. C.* Influence of end constraint in the testing of anisotropic bodies // Journal of Composite Materials. 1968. Vol. 2, iss. 1. P. 18–31. DOI: https://doi.org/10.1177/002199836800200102
8. *Horgan C. O., Carlsson L. A.* 7.3 Saint-Venant end effects for anisotropic materials // Comprehensive Composite Materials II / eds. P. W. R. Beaumont, C. H. Zweben. Oxford : Elsevier, 2018. Vol. 7. P. 38–55. DOI: https://doi.org/10.1016/B978-0-12-803581-8.10172-9
9. *Nejati M., Dambly M. L. T., Saar M. O.* A methodology to determine the elastic properties of anisotropic rocks from a single uniaxial compression test // Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering. 2019. Vol. 11, iss. 6. P. 1166–1183. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jrmge.2019.04.004
10. *Lee Y.-K., Pietruszczak S.* Identification of elastic constants of transversely isotropic rocks using strain measurements from a single inclined specimen // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. 2026. Vol. 199. Art. 106399. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2026.106399
11. *Chou Y.-C., Chen C.-S.* Determining elastic constants of transversely isotropic rocks using Brazilian test and iterative procedure // International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. 2008. Vol. 32, iss. 3. P. 219–234. DOI: https://doi.org/10.1002/nag.619
12. *Hong S., Lee Y., Yim J., Min K.-B.* Application of digital image correlation and strain inversion to determine the five elastic constants of transversely isotropic rock from a single rock core by a strip load // Rock Mechanics and Rock Engineering. 2026. DOI: https://doi.org/10.1007/s00603-026-05372-8
13. *Keaveny T. M., Pinilla T. P., Crawford R. P., Kopperdahl D. L., Lou A.* Systematic and random errors in compression testing of trabecular bone // Journal of Orthopaedic Research. 1997. Vol. 15, iss. 1. P. 101–110. DOI: https://doi.org/10.1002/jor.1100150115
14. *Wei X. X., Chau K. T.* Finite and transversely isotropic elastic cylinders under compression with end constraint induced by friction // International Journal of Solids and Structures. 2009. Vol. 46, iss. 9. P. 1953–1965. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2009.01.007
15. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. Москва : Наука, 1977. 416 с.
16. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. Москва : Наука, 1970. 512 с.
17. *Kapuria S., Kumari P.* Extended Kantorovich method for three-dimensional elasticity solution of laminated composite structures in cylindrical bending // Journal of Applied Mechanics. 2011. Vol. 78, iss. 6. Art. 061004. DOI: https://doi.org/10.1115/1.4003779
18. *Лурье А. И.* Теория упругости. Москва : Наука, 1970. 940 с.
19. *Ватульян А. О., Юров В. О., Гусаков И. В.* О прикладной теории растяжения прямоугольника // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2025. № 6. С. 114–127. DOI: https://doi.org/10.7868/S3034543X25060074, EDN: WATLVW
20. *Ватульян А. О., Узлов М. Н.* О прикладной теории сжатия цилиндра // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 1. С. 46–55. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-46-55, EDN: MCCEEH
21. *Ватульян А. О., Гусаков И. В.* О влиянии трения на сжатие вытянутых призматических образцов // Российский журнал биомеханики. 2026. Т. 30, № 1. С. 38–47. DOI: https://doi.org/10.15593/RZhBiomeh/2026.1.03
22. *Cai X., Brenner R., Peralta L., Olivier C., Gouttenoire P.-J., Chappard C., Peyrin F., Cassereau D., Laugier P., Grimal Q.* Homogenization of cortical bone reveals that the organization and shape of pores marginally affect elasticity // Journal of the Royal Society Interface. 2019. Vol. 16, iss. 151. Art. 20180911. DOI: https://doi.org/10.1098/rsif.2018.0911
23. *Wang Z.* Seismic anisotropy in sedimentary rocks, part 2: Laboratory data // Geophysics. 2002. Vol. 67, iss. 5. P. 1423–1440. DOI: https://doi.org/10.1190/1.1512743
24. *Togashi Y., Kikumoto M., Tani K.* Determining anisotropic elastic parameters of transversely isotropic rocks through single torsional shear test and theoretical analysis // Journal of Petroleum

Science and Engineering. 2018. Vol. 169. P. 184–199. DOI: https://doi.org/10.1016/j.petrol.2018.05.051

25. *Zhang G., Jia X., Li Z., Wang Q., Gu H., Liu Y., Bai Z., Mao H.* Comprehensively characterizing heterogeneous and transversely isotropic properties of femur cortical bones // Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials. 2024. Vol. 151. Art. 106387. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2024.106387
26. *Паршина И. Ф., Иванов Д. В., Доль А. В., Виндокуров И. В., Бессонов Л. В., Ташкинов М. А.* К вопросу об изучении структурных и механических характеристик губчатой костной ткани крупного рогатого скота // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 231–245. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-231-245, EDN: QLRACF
27. *Saint-Venant B.* Sur la distribution des élasticités autour de chaque point d'un solide ou d'un milieu de contexture quelconque, particulièrement lorsqu'il est amorphe sans être isotrope // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. 1863. Vol. 8. P. 353–430.
28. *Cho J.-W., Kim H., Jeon S., Min K.-B.* Deformation and strength anisotropy of Asan gneiss, Boryeong shale, and Yeoncheon schist // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. 2012. Vol. 50. P. 158–169. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2011.12.004

## References

1. Christensen R. M. *Mechanics of composite materials.* Mineola, New York, Dover Publications, 2005. 384 p.
2. Cowin S. C. (ed.) *Bone mechanics handbook.* 2nd ed. Boca Raton : CRC Press, 2001. 980 p. DOI: https://doi.org/10.1201/b14263
3. Li S., Demirci E., Silberschmidt V. V. Variability and anisotropy of mechanical behavior of cortical bone in tension and compression. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 2013, vol. 21, pp. 109–120. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2013.02.021
4. Ashkenazi E. K. *Anizotropiya drevesiny i drevesnykh materialov* [Anisotropy of wood and wood materials]. Moscow, Lesnaya promyshlennost', 1978. 224 p. (in Russian).
5. Amadei B. *Rock anisotropy and the theory of stress measurements.* Lecture Notes in Engineering, vol. 2. Berlin, Springer, 1983. 482 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-82040-3
6. Winkler M. B., Frühwirt T., Marcher T. Elastic behavior of transversely isotropic cylindrical rock samples under uniaxial compression considering ideal and frictional boundary conditions. *Applied Sciences*, 2024, vol. 14, iss. 1, art. 17. DOI: https://doi.org/10.3390/app14010017
7. Pagano N. J., Halpin J. C. Influence of end constraint in the testing of anisotropic bodies. *Journal of Composite Materials*, 1968, vol. 2, iss. 1, pp. 18–31. DOI: https://doi.org/10.1177/002199836800200102
8. Horgan C. O., Carlsson L. A. 7.3 Saint-Venant end effects for anisotropic materials. In: Beaumont P. W. R., Zweben C. H. (eds.) *Comprehensive Composite Materials II.* Oxford, Elsiver, 2018, vol. 7, pp. 38–55. DOI: https://doi.org/10.1016/B978-0-12-803581-8.10172-9
9. Nejati M., Dambly M. L. T., Saar M. O. A methodology to determine the elastic properties of anisotropic rocks from a single uniaxial compression test. *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*, 2019, vol. 11, iss. 6, pp. 1166–1183. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jrmge.2019.04.004
10. Lee Y.-K., Pietruszczak S. Identification of elastic constants of transversely isotropic rocks using strain measurements from a single inclined specimen. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2026, vol. 199, art. 106399. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2026.106399
11. Chou Y.-C., Chen C.-S. Determining elastic constants of transversely isotropic rocks using brazilian test and iterative procedure. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2008, vol. 32, iss. 3, pp. 219–234. DOI: https://doi.org/10.1002/nag.619
12. Hong S., Lee Y., Yim J., Min K.-B. Application of digital image correlation and strain inversion to determine the five elastic constants of transversely isotropic rock from a single rock core by a strip load. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 2026. DOI: https://doi.org/10.1007/s00603-026-05372-8
13. Keaveny T. M., Pinilla T. P., Crawford R. P., Kopperdahl D. L., Lou A. Systematic and random errors in compression testing of trabecular bone. *Journal of Orthopaedic Research*, 1997, vol. 15, iss. 1, pp. 101–110. DOI: https://doi.org/10.1002/jor.1100150115
14. Wei X. X., Chau K. T. Finite and transversely isotropic elastic cylinders under compression with

end constraint induced by friction. *International Journal of Solids and Structures*, 2009, vol. 46, iss. 9, pp. 1953–1965. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2009.01.007

15. Lekhnitskii S. G. *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela* [Theory of elasticity of an anisotropic body]. Moscow, Nauka, 1977. 416 p. (in Russian).
16. Mikhlin S. G. *Variatsionnye metody v matematicheskoy fizike* [Variational methods in mathematical physics]. Moscow, Nauka, 1970. 512 p. (in Russian).
17. Kapuria S., Kumari P. Extended Kantorovich method for three-dimensional elasticity solution of laminated composite structures in cylindrical bending. *Journal of Applied Mechanics*, 2011, vol. 78, iss. 6, art. 061004. DOI: https://doi.org/10.1115/1.4003779
18. Lurie A. I. *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Moscow, Nauka, 1970. 940 p. (in Russian).
19. Vatulyan A. O., Yurov V. O., Gusakov I. V. On the applied theory of rectangle stretching. *Mechanics of Solids*, 2025, vol. 60, iss. 6, pp. 4424–4433. DOI: https://doi.org/10.1134/S0025654425603052
20. Vatulyan A. O., Uzlov M. N. On the applied theory of compression of an elastic cylinder. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 1, pp. 46–55 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-46-55, EDN: MCCEEH
21. Vatulyan A. O., Gusakov I. V. On the influence of friction in compression of elongated prism specimens. *Russian Journal of Biomechanics*, 2026, vol. 30, iss. 1, pp. 38–47 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.15593/RZhBiomeh/2026.1.03
22. Cai X., Brenner R., Peralta L., Olivier C., Gouttenoire P.-J., Chappard C., Peyrin F., Cassereau D., Laugier P., Grimal Q. Homogenization of cortical bone reveals that the organization and shape of pores marginally affect elasticity. *Journal of the Royal Society Interface*, 2019, vol. 16, iss. 151, art. 20180911. DOI: https://doi.org/10.1098/rsif.2018.0911
23. Wang Z. Seismic anisotropy in sedimentary rocks, part 2: Laboratory data. *Geophysics*, 2002, vol. 67, iss. 5, pp. 1423–1440. DOI: https://doi.org/10.1190/1.1512743
24. Togashi Y., Kikumoto M., Tani K. Determining anisotropic elastic parameters of transversely isotropic rocks through single torsional shear test and theoretical analysis. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 2018, vol. 169, pp. 184–199. DOI: https://doi.org/10.1016/j.petrol.2018.05.051
25. Zhang G., Jia X., Li Z., Wang Q., Gu H., Liu Y., Bai Z., Mao H. Comprehensively characterizing heterogeneous and transversely isotropic properties of femur cortical bones. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 2024, vol. 151, art. 106387. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2024.106387
26. Parshina I. F., Ivanov D. V., Dol A. V., Vindokurov I. V., Bessonov L. V., Tashkinov M. A. On the issue of studying the structural and mechanical characteristics of bovine cancellous bone. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 2, pp. 231–245 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-231-245, EDN: QLRACF
27. Saint-Venant B. Sur la distribution des élasticités autour de chaque point d'un solide ou d'un milieu de contexture quelconque, particulièrement lorsqu'il est amorphe sans être isotrope. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 1863, vol. 8, pp. 353–430 (in French).
28. Cho J.-W., Kim H., Jeon S., Min K.-B. Deformation and strength anisotropy of Asan gneiss, Boryeong shale, and Yeoncheon schist. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2012, vol. 50, pp. 158–169. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2011.12.004

Поступила в редакцию / Received 15.04.2026
Принята к публикации / Accepted 30.04.2026
Опубликована / Published 31.08.2026