Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 3. С. 437–447
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2026, vol. 26, iss. 3, pp. 437–447
https://mmi.sgu.ru DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-3-437-447
EDN: https://elibrary.ru/VRWSFK

Научная статья
УДК 539.3

Гиперболический погранслой в окрестностях фронтов волн расширения и сдвига в оболочках вращения произвольной формы

И. В. Кириллова✉, **Л. Ю. Коссович**

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Кириллова Ирина Васильевна, доктор физико-математических наук, доцент кафедры математической теории упругости и биомеханики, iv@info.sgu.ru, https:// orcid.org/0000-0001-8053-3680, SPIN: 3935-1990, AuthorID: 179980

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математической теории упругости и биомеханики, https://orcid.org/0000-0002-4775-7348, SPIN: 5861-3637, AuthorID: 2935

Аннотация. Статья посвящена завершению разработки асимптотического метода решения краевых задач гиперболического погранслоя в упругих оболочках вращения произвольной формы при несамоуравновешенных торцевых ударных воздействиях трёх типов: продольных тангенциального и изгибного видов, нормального вида. Гиперболический погранслой является составляющей схемы декомпозиции нестационарного напряжённо-деформированного состояния тонких оболочек, расположенной в окрестностях передних фронтов волн расширения и сдвига. Предложенный асимптотический метод решения краевых задач для всех трёх типов напряженно-деформированного состояния базируется на получении точного решения для изображения по Лапласу методом интегрального преобразования в случае цилиндрических оболочек. Полученное при этом решение в форме разложения по модам колебаний, являющихся асимптотическим представлением мод колебаний плоского слоя, описываемых дисперсионным уравнением Рэлея – Лэмба, обобщается на случай оболочек вращения произвольного профиля с помощью метода экспоненциальных представлений. Оригиналы изображений показаны в форме рядов по функциям Бесселя. Исследования гиперболических погранслоёв проведены в специальных прифронтовых системах координат, связанных с геометрической формой передних волновых фронтов, асимптотическая модель которых образуется повёрнутыми нормалями к срединной поверхности.

Ключевые слова: гиперболический погранслой, асимптотическая теория, напряжённо-деформированное состояние, фронт волны, оболочка вращения

Для цитирования: *Кириллова И. В., Коссович Л. Ю.* Гиперболический погранслой в окрестностях фронтов волн расширения и сдвига в оболочках вращения произвольной формы // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 3. С. 437–447. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-3-437-447, EDN: VRWSFK

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Hyperbolic boundary layer in the vicinity of dilatational and shear wave fronts in shells of revolution of arbitrary shape

I. V. Kirillova✉, **L. Yu. Kossovich**

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

© *Кириллова И. В., Коссович Л. Ю., 2026*

Irina V. Kirillova, iv@info.sgu.ru, https://orcid.org/0000-0001-8053-3680, SPIN: 3935-1990, AuthorID: 179980
Leonid Yu. Kossovich, https://orcid.org/0000-0002-4775-7348, SPIN: 5861-3637, AuthorID: 2935

Abstract. The presented paper is devoted to completing the development of an asymptotic method for solving boundary value problems of the hyperbolic boundary layer in elastic shells of revolution of arbitrary shape under three types of non-self-balanced end shock loading: longitudinal tangential, bending, and normal. The hyperbolic boundary layer is a component of the decomposition scheme for the non-stationary stress-strain state of thin shells localized in the vicinity of the leading fronts of dilatation and shear waves. The proposed asymptotic method for solving boundary value problems for all three types of stress strain state is based on obtaining an exact solution for the Laplace transforms using the integral transformation method in the case of cylindrical shells. The solution thus obtained, in the form of an expansion in vibration modes, which are an asymptotic representation of the vibration modes for a plane layer described by the Rayleigh−Lamb dispersion equation, is generalized to the case of shells of revolution of arbitrary form using the method of exponential representations. The originals of the transforms are presented in the form of series in Bessel functions. The studies of hyperbolic boundary layers are carried out in special near-front coordinate systems associated with the wave-front geometry, whose asymptotic model is defined by normals rotated to the middle surface.

Keywords: hyperbolic boundary layer, asymptotic theory, stress strain state, wave front, shell of revolution

For citation: Kirillova I. V., Kossovich L. Yu. Hyperbolic boundary layer in the vicinity of dilatational and shear wave fronts in shells of revolution of arbitrary shape. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 3, pp. 437–447 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-3-437-447, EDN: VRWSFK

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

В работах [1,2] В. В. Новожилов и Л. И. Слепян сформулировали основы работы принципа Сен-Венана в нестационарной динамике тонкостенных конструкций, согласно которому ударные воздействия на торцы не только влияют на напряжённо-деформированное состояние в их малых окрестностях, но и создают скачки напряжеий в узких окрестностях передних фронтов волн расширения и сдвига. Причём расположение таких разрывных скачков зависит от типа торцевых ударных воздействий, классификация которых проведена в работе У. К. Нигула [3].

Гиперболические погранслои являются одной из составляющих нестационарного напряжённо-деформированного состояния в оболочках при использовании схем его декомпозиции на составляющие с различными показателями изменяемости и динамичности. Такая декомпозиция использует принципы асимптотического построения компонент напряжённо-деформированного состояния из точных трёхмерных уравнений теории упругости, разработанные для задач статики тонких упругих оболочек А. Л. Гольденвейзером [4]. Основы такой декомпозиции нестационарного напряжённо-деформированного состояния были заложены в работах [5,6]. Все компоненты декомпозиции, включая гиперболические погранслои, представлены для разных типов ударных воздействий в работах [7–9]. Там же рассмотрена полнота описания разных видов нестационарного напряжённо-деформированного состояния представленными компонентами декомпозиции через определение областей согласования соседних компонент, где разрешающие асимптотические уравнения этих составляющих совпадают с заданной асимптотической погрешностью.

Вывод асимптотически оптимальных уравнений гиперболических погранслоёв был произведён с учётом определения геометрических форм передних фронтов волн расширения и сдвига: разработаны их асимптотические модели, представляющие собой поверхности, образованные повёрнутыми нормалями к срединной поверхности оболочки. Разрешающие

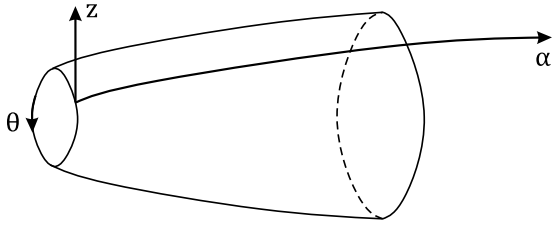
уравнения погранслоёв были выведены методом асимптотического интегрирования исходных трёхмерных уравнений теории упругости с помощью символического метода Лурье в новых координатах, учитывающих отклонение от истинных передних волновых фронтов.

Разработка решений краевых задач для гиперболических погранслоёв проведена в работах [7, 8] для пологих оболочек вращения. Сначала строились решения базовых задач для цилиндрических оболочек при несамоуравновешенных ударных торцевых воздействиях: использовались двойные интегральные преобразования Лапласа по времени и Фурье по продольной координате. Обратные преобразования выполнялись сначала для преобразования Фурье с помощью разложений в ряды по полюсам подынтегральных функций. Обращение полученных изображений по Лапласу выполнялось с помощью варианта метода прифронтовой асимптотики, основанного на их специальном разложении по отрицательным степеням параметра преобразования, когда искомые оригиналы решений представляются в виде рядов по функциям Бесселя. Далее разработанный подход решения базовых задач для цилиндрических оболочек применялся в случае краевых задач для пологих оболочек вращения: искомые решения для изображений по Лапласу искались также в виде рядов, обобщающих соответствующие ряды для цилиндрических оболочек, когда члены ряда — моды колебаний — выводятся с помощью асимптотического метода экспоненциальных представлений.

Настоящая работа посвящена обобщению разработанных методов решения краевых задач для всех типов гиперболического погранслоя в пологих оболочках вращения на общий случай оболочек вращения произвольной формы при действии осесимметричных несамоуравновешенных торцевых ударных нагрузок.

1. Постановка задачи

Рассмотрим полубесконечную оболочку вращения произвольной формы. Привяжем координатную систему (α, θ, z) к её срединной поверхности, как показано на рисунке, где α — длина дуги вдоль образующей срединной поверхности, θ — угловая координата, z — координата внешней нормали.



Координаты оболочки вращения
Figure. Revolution shell coordinates

В рассматриваемом осесимметричном случае динамического напряжённо-деформированного состояния уравнения движения и уравнения состояния запишутся в виде [5] относительно напряжений σ_{ij} $(i, j = 1, 3)$ и перемещений v_i $(i = 1, 3)$ следующим образом:

$$H_2\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\alpha} + H_1H_2\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial z} + \frac{B'H_1}{B}\Big(\sigma_{11} - \sigma_{22}\Big) + \Big(2\frac{H_2}{R_1} + \frac{H_1}{R_2}\Big)\sigma_{13} - \rho H_1H_2\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = 0,$$

$$H_2\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial\alpha} + H_1H_2\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial z} - \frac{H_2}{R_1}\sigma_{11} - \frac{H_1}{R_2}\sigma_{22} + \Big(\frac{H_1}{R_2} + \frac{H_2}{R_1}\Big)\sigma_{33} + \\ + \frac{B'H_1}{B}\sigma_{13} - \rho H_1H_2\frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} = 0,$$

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1+\nu}\Big[\frac{k_2}{H_1}\frac{\partial v_1}{\partial\alpha} + k_1\Big(\frac{\partial v_3}{\partial z} + \frac{B'}{BH_2}v_1\Big) + \Big(\frac{k_2}{H_1R_1} + \frac{k_1}{H_2R_2}\Big)v_3\Big],$$

$$\sigma_{33} = \frac{E}{1+\nu}\Big[k_1\Big(\frac{1}{H_1}\frac{\partial v_1}{\partial\alpha} + \frac{B'}{BH_2}v_1\Big) + k_2\frac{\partial v_3}{\partial z} + k_1\Big(\frac{1}{H_1R_1} + \frac{1}{H_2R_2}\Big)v_3\Big],$$

$$\sigma_{13} = \frac{E}{2(1+\nu)}\Big[\frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{1}{H_1}\frac{\partial v_3}{\partial\alpha} - \frac{1}{H_1R_1}v_1\Big],$$

где t — время; E, ν, ρ — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала обо-

лочки; $B(\alpha)$ — расстояние от оси вращения оболочки до её срединной поверхности; R_i $(i = 1, 2)$ — главные радиусы кривизны срединной поверхности; $H_i = 1 + z/R_i$ $(i = 1, 2)$; $k_1 = \nu/(1-2\nu)$, $k_2 = (1-\nu)/(1-2\nu)$.

Поскольку мы рассматриваем нестационарное напряжённо-деформированное состояние как распространение нестационарных волн, вызванных ударными торцевыми воздействиями, то лицевые поверхности рассматриваем как свободные от напряжений:

$$\sigma_{13} = \sigma_{33} = 0, \quad z = \pm h,$$

где h — полутолщина оболочки, а начальные условия рассматриваем как начальные условия покоя:

$$v_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} = 0 \quad (i = 1, 3), \quad t = 0.$$

Как показано в [3], принципиально разные типы нестационарного напряжённо-деформированного состояния оболочек возникают при трёх типах торцевых ударных воздействий: продольном воздействии тангенциального типа (LT-воздействие), продольном воздействии изгибающего типа (LM-воздействие) и нормального типа (NW-воздействие). Конкретизируем виды воздействий. Рассмотрим воздействие вида LT в форме

$$\sigma_{11} = IH(t), \quad v_3 = 0, \quad \alpha = 0,$$

где $H(t)$ — ступенчатая функция Хевисайда, I — амплитуда нагрузки; воздействие вида LM в форме

$$\sigma_{11} = IzH(t), \quad v_3 = 0, \quad \alpha = 0,$$

и воздействие вида NW в форме

$$\sigma_{13} = IH(t), \quad v_1 = 0, \quad \alpha = 0.$$

Как указывалось во Введении, асимптотически оптимальные уравнения гиперболических погранслоёв выведены в работах [7–9]. При этом была разработана асимптотическая модель геометрической формы поверхностей передних волновых фронтов, формируемых повёрнутыми нормалями к срединной поверхности, задаваемыми следующим образом:

$$\alpha = \alpha_0\Big[1 + \varepsilon\frac{\zeta}{\xi_0}F(\xi_0) + O(\varepsilon^2)\Big], \quad F(\xi_0) = \int_0^{\xi_0}\frac{d\xi_0}{R_1^*}, \tag{1}$$

где $\zeta = z/h$, $\xi_0 = \alpha/R$, $\alpha_0 = c_i t_0$ $(i = 1, 2)$, $R_1^* = R_1/R$ (звёздочку в дальнейшем опускаем), $\varepsilon = h/R$, t_0 — текущий момент времени, R — характерное значение радиусов кривизны, ε — малый параметр тонкостенности оболочки. В соответствии с асимптотической моделью (1) вводятся новые координаты α_F, z_F:

$$\alpha_F = \alpha - zF(\xi_0), \quad z_F = z\sqrt{1 + F^2(\xi_0)}.$$

В случае LT-воздействия асимптотически главными являются перемещение v_1 и напряжения σ_{11}, σ_{33}. Краевая задача для симметричного по координате z_F гиперболического погранслоя строится в малой окрестности фронта волны расширения и записывается следующим образом [7]:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha_F^2} + \Big(1 + F^2\Big)\frac{\partial^2 v_1}{\partial z_F^2} - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \frac{2z_F F}{R_1(1+F^2)}\frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha_F \partial z_F} + \frac{B'}{B}\frac{\partial v_1}{\partial \alpha_F} = 0, \\
\sigma_{11} = \frac{E}{2(1+\nu)\varkappa^2}\frac{\partial v_1}{\partial \alpha_F}, \quad \sigma_{33} = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}\frac{\partial v_1}{\partial \alpha_F}, \\
\sigma_{11} = IH(t), \quad \alpha_F = 0; \qquad \sigma_{33} = 0, \quad z_F = \pm h\sqrt{1+F^2}; \qquad v_1 = \frac{\partial v_1}{\partial t} = 0, \quad t = 0.
\end{gathered} \tag{2}$$

В случае LM-воздействия асимптотически главными являются, так же как и в случае LT-воздействия, перемещение v_1 и напряжения σ_{11}, σ_{33}. Но гиперболический погранслой является уже антисимметричным по координате z_F, хотя и строится также в малой окрестности фронта волны расширения. Разрешающее уравнение движения, выражения для напряжений, граничные условия на лицевых поверхностях и однородные начальные условия сохраняют форму аналогично (2), а торцевое граничное условие запишется в форме

$$\sigma_{11} = Iz_F H(t), \quad \alpha_F = 0. \tag{3}$$

В случае NW-воздействия асимптотически главными являются нормальное перемещение v_3 и касательное напряжение σ_{13}. Краевая задача для антисимметричного по нормальной координате гиперболического погранслоя строится в малой окрестности фронта волны сдвига и записывается следующим образом [9]:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha_F^2} + \left(1+F^2\right)\frac{\partial^2 v_3}{\partial z_F^2} - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} + \frac{2z_F F}{R_1(1+F^2)}\frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha_F \partial z_F} + \frac{B'}{B}\frac{\partial v_3}{\partial \alpha_F} = 0, \\
\sigma_{13} = \frac{E}{2(1+\nu)}\sqrt{1+F^2}\,\frac{\partial v_3}{\partial \alpha_F}, \\
\sigma_{13} = IH(t), \quad \alpha_F = 0; \quad \sigma_{13} = 0, \quad z_F = \pm h\sqrt{1+F^2}, \quad v_3 = \frac{\partial v_3}{\partial t} = 0, \quad t = 0.
\end{gathered} \tag{4}$$

2. Симметричный гиперболический погранслой в окрестности фронта волны расширения

Как было указано во Введении, асимптотическое решение краевой задачи для общего случая оболочек вращения должно основываться на базовом решении соответствующей краевой задачи для цилиндрической оболочки. Такая краевая задача, описанная в [7], решается с помощью двукратных интегральных преобразований: Лапласа по времени и Фурье по продольной переменной. При этом получается найти точное решение для двукратного изображения, обращение которого по Фурье даёт точное решение для изображения по Лапласу в виде разложения по модам колебаний, являющихся асимптотическим представлением мод колебаний плоского слоя [5]. Такое точное решение для изображения по Лапласу записывается в следующем виде [7]:

$$\begin{gathered}
v_1^L = \frac{4\varkappa^2(1+\nu)I}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n cos\Big[(n-1/2)\pi\zeta\Big]}{(n-1/2)^2\Big[1+\frac{(n-1/2)^2\pi^2}{s^2}\Big]^{1/2}}\times \\
\times\frac{1}{s^2}\exp\left\{-s\Big[1+\frac{(n-1/2)^2\pi^2}{s^2}\Big]^{1/2}\xi\right\}, \quad \xi = \alpha/h,
\end{gathered} \tag{5}$$

где индекс L обозначает изображение, а преобразование Лапласа проводится по переменной $\tau = c_1 t/h$.

Искомый гиперболический погранслой строится в малой окрестности фронта волны расширения с показателями изменяемости и динамичности, равными двум. Соответственно, переходим в нашем общем случае оболочек вращения к новой форме прифронтовых координат (с учётом изменяемости и динамичности):

$$\xi_F = \frac{\xi_{F0}}{\varepsilon^2}, \quad \zeta_F = \frac{z_F}{h}, \quad \tau_F = \frac{\tau_{F0}}{\varepsilon^2}, \quad \xi_{F0} = \frac{\alpha_F}{R}, \quad \tau_{F0} = \frac{c_1 t}{R}. \tag{6}$$

Тогда система (2) преобразуется следующим образом:

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi_F^2} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial \tau_F^2} + \varepsilon^2\Big[\Big(1+F^2\Big)\frac{\partial^2 v_1}{\partial \zeta_F^2} + \frac{2\zeta_F F}{(1+F^2)R_1}\frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi_F \partial \zeta_F} + \frac{B'}{B}\frac{\partial v_1}{\partial \xi_F}\Big] = 0,$$
$$\sigma_{11} = \frac{E}{2(1+\nu)\varkappa^2\varepsilon h}\frac{\partial v_1}{\partial \xi_F}, \quad \sigma_{33} = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)\varepsilon h}\frac{\partial v_1}{\partial \xi_F}, \tag{7}$$
$$\sigma_{11} = IH(\tau_F), \xi_F = 0; \quad \sigma_{33} = 0, \zeta_F = \pm\sqrt{1+F^2}; \quad v_1 = \frac{\partial v_1}{\partial \tau_F} = 0, \tau_F = 0.$$

Для построения асимптотического решения задачи (7) проведём сначала анализ изображения решения для перемещения (5). Оно представлено здесь в форме бесконечного ряда, члены которого удовлетворяют и уравнениям движения, и однородным граничным условиям на лицевых поверхностях. Эти частные решения соответствуют модам — частным решениям системы уравнений движения для симметричных колебаний пластины, когда соотношения между частотами колебаний и длинами волн описываются дисперсионными уравнениями Рэлея–Лэмба [10].

Применим к разрешающей системе (7) интегральное преобразование Лапласа по временной переменной τ_F:

$$\frac{\partial^2 v_1^L}{\partial \xi_F^2} - s^2 v_1^L + \varepsilon^2\Big[\Big(1+F^2\Big)\frac{\partial^2 v_1}{\partial \zeta_F^2} + \frac{2\zeta_F F}{(1+F^2)R_1}\frac{\partial^2 v_1^L}{\partial \xi_F \partial \zeta_F} + \frac{B'}{B}\frac{\partial v_1^L}{\partial \xi_F}\Big] = 0,$$
$$\sigma_{11}^L = \frac{E}{2(1+\nu)\varkappa^2\varepsilon h}\frac{\partial v_1^L}{\partial \xi_F}, \quad \sigma_{33}^L = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)\varepsilon h}\frac{\partial v_1^L}{\partial \xi_F}, \tag{8}$$
$$\sigma_{11}^L = \frac{I}{s}, \xi_F = 0; \quad \sigma_{33}^L = 0, \zeta_F = \pm\sqrt{1+F^2}.$$

Поскольку асимптотически главная часть системы (8), определяющая асимптотически главные составляющие решения в узкой прифронтовой зоне, полностью совпадает с соответствующими уравнениями для цилиндрической оболочки, представим изображение для v_1^L в рассматриваемом общем случае также разложением по модам колебаний, где моды ищутся асимптотическим методом. Представим решение для мод $v_{1,n}^L$ в виде

$$v_{1,n}^L = \exp\Big[-\frac{s\xi_{F0}}{\varepsilon^2} + \psi(\xi_{F0}) + i\lambda(\xi_{F0})\zeta_F\Big], \tag{9}$$

где ψ и λ являются медленно изменяющимися функциями от ξ_0, i — мнимая единица. Подставим это представление решения в уравнение движения (8). Для начального приближения функций ψ и λ, обеспечивающего погрешность для моды $v_{1,n}^L$ порядка $O(\varepsilon)$, получим следующее уравнение:

$$2s\psi' + (1+F^2)\lambda^2 + s\frac{B'}{B} + i\zeta_F\Big(2s\lambda' + \frac{2sF\lambda}{(1+F^2)R_1}\Big) = 0. \tag{10}$$

Приравнивая нулю в полученном уравнении (10) составляющие при нулевой и первой степени ζ_F, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно искомых функций:

$$\lambda' + \frac{F}{(1+F^2)R_1}\lambda = 0,$$
$$2s\psi' + (1+F^2)\lambda^2 + s\frac{B'}{B} = 0. \tag{11}$$

Учитывая выражения для F (1), получаем из (11) явные выражения для функций ψ' и λ:

$$\lambda = \frac{C}{\sqrt{1+F^2}}, \quad \psi' = -\frac{C^2}{2s^2} - \frac{B'}{2B},$$

где C — некоторая постоянная. Следовательно, выражение (9) может быть записано в следующем виде:

$$v_{1,n}^L = \exp\Big[-\varepsilon^{-2}\xi_{F0}s - \frac{C^2}{2}\xi_{F0}\frac{1}{s} + ln\frac{1}{\sqrt{B}} + i\frac{C\zeta_F}{\sqrt{1+F^2}}\Big]. \tag{12}$$

Перепишем выражение (12) в форме

$$v_{1,n}^L = \frac{1}{\sqrt{B}}\exp\Big(i\frac{C\zeta_F}{\sqrt{1+F^2}}\Big)\exp\Big[-\varepsilon^{-2}\xi_{F0}s - C^2\xi_{F0}\frac{1}{s}\Big]. \tag{13}$$

Для того, чтобы функции (13) были модами колебаний для симметричного случая погранслоя, они должны удовлетворять условиям свободных лицевых поверхностей. Поэтому выбираем следующее выражение для постоянной C: $C = (n-1/2)\pi$, $n = 1, 2, ...$ Тогда выражение (13) в своей действительной части определяет окончательное выражение для искомых мод:

$$v_{1,n}^L = \frac{1}{\sqrt{B}}\cos\Big[\frac{(n-1/2)\pi\zeta_F}{\sqrt{1+F^2}}\Big]\exp\Big[-\varepsilon^{-2}s\xi_{F0} - \frac{1}{2}(n-1/2)^2\pi^2\zeta_{F0}\frac{1}{s}\Big], \tag{14}$$

которое полностью соответствует решению для $v_{1,n}^L$ в случае цилиндрической оболочки, получаемому из точного решения в преобразованиях Лапласа методом прифронтовой асимптотики.

Имея представление для мод (14), получим искомые решения для изображений v_1^L, σ_{11}^L, подставляя их в базовые разложения — решения соответствующей задачи для цилиндрической оболочки:

$$v_1^L = \frac{4\varkappa^2(1+\nu)I}{\pi}\sqrt{\frac{B(0)}{B}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\Big[\frac{(n-1/2)\pi}{\sqrt{1+F^2}}\zeta_F\Big]}{(n-1/2)s^2}\exp\Big[-\varepsilon^{-2}s\xi_{F0} - \frac{1}{2}(n-1/2)^2\pi^2\xi_{F0}\frac{1}{s}\Big],$$

$$\sigma_{11}^L = \frac{2I}{\pi}\sqrt{\frac{B(0)}{B}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos\Big[\frac{(n-1/2)\pi}{\sqrt{1+F^2}}\zeta_F\Big]}{(n-1/2)s}\exp\Big[-\varepsilon^{-2}s\xi_{F0} - \frac{1}{2}(n-1/2)^2\pi^2\xi_{F0}\frac{1}{s}\Big].$$

Применяя преобразование

$$\int_0^{\infty}\exp\Big(-st\Big)\Big(\frac{t}{g}\Big)^{\frac{k}{2}}J_k\Big(2\sqrt{gt}\Big)dt = \frac{1}{s^{k+1}}\exp\Big(-\frac{g}{s}\Big), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{15}$$

где $J_k(\ldots)$ — функции Бесселя порядка k, получаем следующие выражения для искомых оригиналов:

$$v_1 = \frac{2^{5/2}\varkappa^2(1+\nu)I}{\pi}\sqrt{\frac{B(0)}{B}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(\tau_{F0}-\xi_{F0})^{1/2}\cos\Big[\frac{(n-1/2)\pi\zeta_F}{\sqrt{1+F^2}}\Big]}{(n-1/2)\xi_{F0}^{1/2}}\times$$
$$\times J_1\Big[2^{1/2}(n-1/2)\pi\sqrt{\xi_{F0}(\tau_{F0}-\xi_{F0})}/\varepsilon\Big]H(\tau_{F0}-\xi_{F0}),$$
$$\sigma_{11} = \frac{2I}{\pi}\sqrt{\frac{B(0)}{B}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}cos\Big[\frac{(n-1/2)\pi\zeta_F}{\sqrt{1+F^2}}\Big]}{n-1/2}\times$$
$$\times J_0\Big[2^{1/2}(n-1/2)\pi\sqrt{\xi_{F0}(\tau_{F0}-\xi_{F0})}/\varepsilon\Big]H(\tau_{F0}-\xi_{F0}).$$

3. Антисимметричный гиперболический погранслой в окрестности фронта волны расширения

Перейдём к гиперболическому погранслою в случае LM-воздействия. Базовым в рассматриваемом случае оболочек вращения является решение для цилиндрической оболочки, полученное в [8]. При этом точное решение для изображения по Лапласу для перемещения записывается в следующем виде (все обозначения для переменных сохраняются), соответствующем граничному условию (3):

$$v_1^L = \frac{4\varkappa^2(1+\nu)I}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin(n\pi\zeta)}{n^2\left(1+\frac{n^2\pi^2}{s^2}\right)^{1/2}}\frac{1}{s^2}\exp\left[-s\left(1+\frac{n^2\pi^2}{s^2}\right)^{1/2}\xi\right]. \tag{16}$$

Как уже было указано в предшествующем разделе, такое разложение соответствует разложению по модам колебаний, являющихся в данном случае асимптотическим представлением антисимметричных (по нормальной координате) мод колебаний плоского слоя.

Рассмотрим теперь гиперболический погранслой в общем случае оболочек вращения при тех же граничных условиях (3). Строим его, как и ранее, в малой окрестности фронта волны расширения с показателями изменяемости и динамичности, равными 2. В переменных ξ_F, τ_F, ζ_F, введённых по формулам (6), областью его действия будет также окрестность $\tau_{F0} - \xi_{F0} = O(\varepsilon^2)$, а система разрешающих уравнений будет совпадать с (7).

Анализ решения в изображениях для цилиндрической оболочки в форме (16) показывает, как и в случае гиперболического погранслоя при симметричном по нормальной координате торцевом воздействии (раздел 2), что члены ряда соответствуют модам колебаний пластины с комплексными значениями параметра s-аналогом частотного параметра. В данном случае моды колебаний пластины определяются дисперсионным уравнением Рэлея – Лэмба для антисимметричных по нормальной координате колебаний.

Как и прежде, обобщим полученные решения для гиперболического погранслоя в цилиндрической оболочке, представляя изображение для компонент напряжённо-деформированного состояния также разложением по модам с асимптотическим представлением решений для мод.

Представляем, как и ранее, решение для мод в виде (9) с аналогичными свойствами функций $\psi(\xi_{F0})$ и $\lambda(\xi_{F0})$. В конечном итоге получаем решения для этих функций в форме (13), которая позволяет записать выражение для искомых антисимметричных мод в следующем виде:

$$v_{1,n}^L = \frac{1}{\sqrt{B}}\sin\left(\frac{C\zeta_F}{\sqrt{1+F^2}}\right)\exp\left(-\frac{s\xi_{F0}}{\varepsilon^2}-\frac{C^2}{2}\frac{\xi_{F0}}{s}\right). \tag{17}$$

Для удовлетворения решения (17) однородным граничным условиям на лицевых поверхностях зададим значения для постоянной C в следующем виде: $C = n\pi, n = 1, 2, \ldots$. Тогда выражение (17) позволяет записать искомые асимптотические решения для изображений компонент v_1, σ_{11} в виде

$$v_1^L = \frac{4\varkappa^2(1+\nu)I}{\pi}\sqrt{\frac{B(0)}{B}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\left[\frac{n\pi\zeta_F}{\sqrt{1+F^2}}\right]}{ns^2}\exp\left[-\varepsilon^{-2}\xi_{F0}s-\frac{1}{2}n^2\pi^2\xi_{F0}\frac{1}{s}\right],$$

$$\sigma_{11}^L = \frac{2I}{\pi}\sqrt{\frac{B(0)}{B}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin\left[\frac{n\pi\zeta_F}{\sqrt{1+F^2}}\right]}{ns}\exp\left[-\varepsilon^{-2}\xi_{F0}s-\frac{1}{2}n^2\pi^2\xi_{F0}\frac{1}{s}\right].$$

Применяя далее преобразование (15), получаем выражения для искомых оригиналов:

$$v_1 = \frac{2^{5/2}\varkappa^2(1+\nu)I}{\pi}\sqrt{\frac{B(0)}{B}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\tau_{F0}-\xi_{F0}\right)^{1/2}\sin\left[\frac{n\pi\zeta_F}{\sqrt{1+F^2}}\right]}{n\zeta_{F0}^{1/2}}\times$$
$$\times J_1\left[2^{1/2}n\pi\sqrt{\xi_{F0}(\tau_{F0}-\xi_{F0})}/\varepsilon\right]H(\tau_{F0}-\xi_{F0}), \qquad (18)$$
$$\sigma_{11} = \frac{2I}{\pi}\sqrt{\frac{B(0)}{B}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin\left[\frac{n\pi\zeta_F}{\sqrt{1+F^2}}\right]}{n}J_0\left[2^{1/2}n\pi\sqrt{\xi_{F0}(\tau_{F0}-\xi_{F0})}/\varepsilon\right]H(\tau_{F0}-\xi_{F0}).$$

Как и в случае решения задачи для симметричного гиперболического погранслоя, асимптотическое решение (18) удовлетворяет граничным условиям на торце и лицевых поверхностях и асимптотически удовлетворяет разрешающим уравнениям. При этом сходимость рядов определяется сходимостью соответствующих рядов в решениях для цилиндрической оболочки.

4. Антисимметричный гиперболический погранслой в окрестности фронта волны сдвига

Получим решение для гиперболического погранслоя в случае NW-воздействия, определяемого уравнениями (4). В соответствии с передним фронтом волны сдвига используем следующие прифронтовые координаты:

$$\xi_F = \frac{\xi_{F0}}{\varepsilon^2}, \quad \zeta_F = \frac{z_F}{h}, \quad \tau_F = \frac{\tau_{F0}}{\varepsilon^2}, \quad \xi_{F0} = \frac{\alpha_F}{R}, \quad \tau_{F0} = \frac{c_2 t}{R},$$

где безразмерная переменная ζ_F определяет уже повёрнутое положение прямолинейного фронта волны сдвига, а безразмерные временные переменные отнесены к скорости волны сдвига c_2.

Следует отметить, что уравнение движения относительно перемещения v_3 из (4) формально совпадает с разрешающим уравнением из (2) относительно перемещения v_1 (имея в виду, что скорости распространения волновых фронтов при этом разные и переменные τ_F в этих уравнениях отнесены к разным скоростям волн сдвига и расширения). Граничные условия в уравнениях (4) также формально совпадают с граничными условиями в (2) с точностью до множителя $\varkappa^2$. Также с точностью до множителя $\varkappa^2$ совпадают выражения для σ_{13} и σ_{11}. Поэтому выражения для искомых решений v_3 и σ_{13} с точностью до множителя $\varkappa^2$ совпадут с выражениями для v_1 и σ_{11} и будут записываться в форме

$$v_3 = \frac{2^{5/2}(1+\nu)I}{\pi^2}\sqrt{\frac{B(0)}{B}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\tau_{F0}-\xi_{F0}\right)^{1/2}\cos\left[\frac{(n-1/2)\pi}{\sqrt{1+F^2}}\zeta_F\right]}{(n-1/2)^2\xi_{F0}^{1/2}}\times$$
$$\times J_1\left[2^{1/2}(n-1/2)\pi\sqrt{\xi_{F0}(\tau_{F0}-\xi_{F0})}/\varepsilon\right]H(\tau_{F0}-\xi_{F0}),$$
$$\sigma_{13} = \frac{2I}{\pi}\sqrt{\frac{B(0)}{B}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\left[\frac{(n-1/2)\pi}{\sqrt{1+F^2}}\zeta_F\right]}{n-1/2}J_0\left[2^{1/2}(n-1/2)\pi\sqrt{\xi_{F0}(\tau_{F0}-\xi_{F0})}/\varepsilon\right]H(\tau_{F0}-\xi_{F0}).$$

Вывод

Универсальность представленного в настоящей работе асимптотического метода решения краевых задач для гиперболического погранслоя определяет возможность получения достаточно простого аналитического решения не только для рассмотренных типов граничных условий, определяющих заданный класс ударных воздействий на торцы оболочек вращения произвольного профиля. Анализ показывает, что представленный метод обобщается

на общие случаи самоуравновешенных и несамоуравновешенных по нормальной координате торцевых нагрузок. Рассмотренный асимптотический метод основан на разнице в изменяемости напряжённо-деформированного состояния гиперболических погранслоёв, имеющих место в очень узких прифронтовых областях, и геометрии оболочечных конструкций.

Список литературы

1. *Новожилов В. В., Слепян Л. И.* О принципе Сен-Венана в динамике стержней // Прикладная математика и механика. 1965. Т. 29, № 2. С. 261–281.
2. *Слепян Л. И.* Нестационарные упругие волны. Ленинград : Судостроение, 1972. 374 с.
3. *Нигул У. К.* Сопоставление результатов анализа переходных волновых процессов в оболочках и пластинах по теории упругости и приближенным теориям // Прикладная математика и механика. 1969. Т. 33, вып. 2. С. 308–322.
4. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. Москва : Наука, 1976. 512 с.
5. *Коссович Л. Ю.* Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек. Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 1986. 176 с. EDN: VIOSWL
6. *Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Nolde E. V.* Dynamics of thin walled elastic bodies. San Diego : Academic Press, 1998. 226 p.
7. *Kirillova I. V., Kossovich L. Yu.* An asymptotic model for the nonstationary waves in the shells of revolution initiated by the longitudinal, tangential type edge shock loading // Current Developments in Solid Mechanics and Their Applications / ed. by H. Altenbach. Cham : Springer, 2025. P. 309–336. (Advanced Structured Materials, vol. 223). DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-90022-8_22
8. *Кириллова И. В.* Асимптотическая теория нестационарных упругих волн в оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях изгибающего типа // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 1. С. 80–90. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-80-90, EDN: SUWSYV
9. *Кириллова И. В.* Гиперболический погранслой в окрестности фронта волны сдвига в оболочках вращения // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 3. С. 394–401. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-394-401, EDN: JMEGQP
10. *Айнола Л. Я., Нигул У. К.* Волновые процессы деформации упругих плит и оболочек // Известия Академии наук Эстонской ССР. Серия физико-математических и технических наук. 1965. Т. 14, № 1. С. 3–63. DOI: https://doi.org/10.3176/phys.math.tech.1965.1.01

References

1. Novozhilov V. V., Slepian L. I. On Saint-Venant's principle in the dynamics of beams. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1965, vol. 29, iss. 2, pp. 293–315. https://doi.org/10.1016/0021-8928(65)90032-8
2. Slepian L. I. *Nestatsionarnye uprugie volny* [Unsteady elastic waves]. Leningrad, Sudostroenie, 1972. 374 p. (in Russian).
3. Nigul U. K. Comparison of the results of the analysis of transient wave processes in shells and plates according to the theory of elasticity and approximate theories. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1969, vol. 33, iss. 2, pp. 308–322 (in Russian).
4. Goldenveizer A. L. *Theory of elastic thin shells*. Oxford, Pergamon Press, 1961. 658 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1976. 512 p.).
5. Kossovich L. Yu. *Nestatsionarnye zadachi teorii uprugikh tonkikh obolochek* [Non-stationary problems of the theory of elastic thin shells]. Saratov, Saratov State University Publ., 1986. 176 p. (in Russian). EDN: VIOSWL
6. Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Nolde E. V. *Dynamics of thin walled elastic bodies*. San Diego, Academic Press, 1998. 226 p.
7. Kirillova I. V., Kossovich L. Y. An asymptotic model for the nonstationary waves in the shells of revolution initiated by the longitudinal, tangential type edge shock loading. In: Altenbach H. (ed.) *Current Developments in Solid Mechanics and Their Applications*. Advanced Structured Materials, vol. 223. Springer, Cham, 2025, pp. 309–336. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-90022-8_22
8. Kirillova I. V. Asymptotic theory of the transient waves in shells of revolution at shock edge loading of the bending type. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025,

vol. 25, iss. 1, pp. 80–90 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-80-90, EDN: SUWSYV

9. Kirillova I. V. Hyperbolic boundary layer in the vicinity of the shear wave front in shells of revolution. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 3, pp. 394–401 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-394-401, EDN: JMEGQP
10. Ainola L., Nigul U. K. Wave processes of deformation of elastic plates and shells. *Eesti NSV Teaduste Akadeemia Toimetised. Füüsika-, Matemaatika- ja Tehnikateaduste Seeria*, 1965, vol. 14, iss. 1, pp. 3–63 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.3176/phys.math.tech.1965.1.01

Поступила в редакцию / Received 15.04.2026
Принята к публикации / Accepted 11.06.2026
Опубликована / Published 31.08.2026