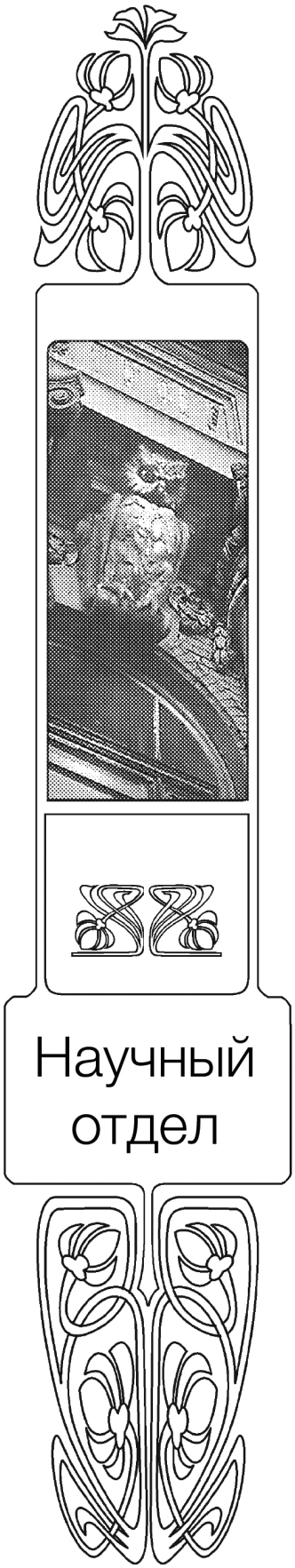

ИНФОРМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 3. С. 448–458
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2026, vol. 26, iss. 3, pp. 448–458
https://mmi.sgu.ru
DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-3-448-458
EDN: https://elibrary.ru/XUBEEY

Научная статья
УДК 519.872

Вычисление временных характеристик ациклической сети массового обслуживания с делением и слиянием требований

О. С. Постнова✉, **И. Е. Тананко**, **Е. С. Рогачко**

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Постнова Оксана Сергеевна, ассистент кафедры системного анализа и автоматического управления, popova.np0062@gmail.com, https://orcid.org/0009-0002-3189-6236, SPIN: 3764-8807, AuthorID: 1175985

Тананко Игорь Евстафьевич, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой системного анализа и автоматического управления, TanankoIE@info.sgu.ru, https://orcid.org/0000-0001-8960-9709, SPIN: 8132-3706, AuthorID: 447915

Рогачко Екатерина Сергеевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры системного анализа и автоматического управления, RogachkoES@info.sgu.ru, https://orcid.org/0000-0001-7815-2846, SPIN: 7768-5855, AuthorID: 683783

Аннотация. Рассматривается открытая ациклическая сеть массового обслуживания с делением и слиянием требований. При поступлении требования из источника в сеть оно делится на заданное постоянное число родственных фрагментов. Фрагменты переходят между системами сети независимо и друг от друга, и от фрагментов других требований. Покидая сеть обслуживания, все фрагменты поступают в систему, называемую системой сборки, в которой производится сборка требований из родственных фрагментов. Предлагается метод вычисления математического ожидания длительности сборки требований из фрагментов и математического ожидания длительности пребывания требований в сети. Для случая так называемого равномерного распределения нагрузки в сети массового обслуживания описывается вычисление математического ожидания длительности пребывания требований в сети. Равномерное распределение нагрузки определяется одинаковыми длинами маршрутов фрагментов требований в сети обслуживания, равными вероятностями этих маршрутов, а также одинаковыми интенсивностями об-

© Постнова О. С., Тананко И. Е., Рогачко Е. С., 2026

служивания в системах сети, пропорциональными числу родственных фрагментов требований. Представлено сравнение численных результатов, полученных в ходе вычислительных экспериментов с использованием аналитической и имитационной моделей сети массового обслуживания с делением и слиянием требований. Результаты данной работы могут использоваться для оценки временных характеристик функционирования многопроцессорных систем, систем облачных вычислений и других стохастических систем, моделируемых сетями массового обслуживания с делением и слиянием требований.

Ключевые слова: сеть массового обслуживания с делением и слиянием требований, ациклическая сеть массового обслуживания, обслуживание фрагментов требований, длительность сборки требований, длительность пребывания требований в сети массового обслуживания

Для цитирования: *Постнова О. С., Тананко И. Е., Рогачко Е. С.* Вычисление временных характеристик ациклической сети массового обслуживания с делением и слиянием требований // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 3. С. 448–458. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-3-448-458, EDN: XUBEEY

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Calculation of time characteristics for acyclic fork-join queueing network

O. S. Postnova✉**, I. E. Tananko, E. S. Rogachko**

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Oksana S. Postnova, popova.np0062@gmail.com, https://orcid.org/0009-0002-3189-6236, SPIN: 3764-8807, AuthorID: 1175985

Igor E. Tananko, TanankoIE@info.sgu.ru, https://orcid.org/0000-0001-8960-9709, SPIN: 8132-3706, AuthorID: 447915

Ekaterina S. Rogachko, RogachkoES@info.sgu.ru, https://orcid.org/0000-0001-7815-2846, SPIN: 7768-5855, AuthorID: 683783

Abstract. An open acyclic fork-join queueing network is considered. When a job arrives from a source into the network, it is split to be serviced into a given constant number of associated tasks. The tasks are routed between service-nodes independently of each other and independently of tasks associated with other jobs. Upon leaving the queuing network, all tasks enter a node called the join-node, where associated tasks join into a job. A method is proposed for calculating the mean time spent by a task in the join-node and the mean response time in the fork-join queueing network. For the case of so-called uniform workload distribution in the queueing network, the calculation of the mean response time in the queueing network is described. Uniform workload distribution is determined by equal route lengths of tasks in the queuing network, equal probabilities of these routes, as well as equal service rates in the service-nodes, proportional to the number of tasks associated with jobs. A comparison of numerical results obtained in computational experiments using analytical and simulation models of a fork-join queueing network is presented. The results can be used to evaluate the time characteristics of the operation of multiprocessor systems, cloud computing systems and other stochastic systems modeled by fork-join queueing networks.

Keywords: fork-join queueing network, acyclic queueing network, task service, time spent by task in join-node, response time in queueing network

For citation: Postnova O. S., Tananko I. E., Rogachko E. S. Calculation of time characteristics for acyclic fork-join queueing network. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 3, pp. 448–458 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-3-448-458, EDN: XUBEEY

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Сети массового обслуживания с делением и слиянием требований (сети fork-join) [1–3] находят применение в качестве математических моделей вычислительных систем с параллельной обработкой информации, систем планирования и контроля производства, систем управления бизнес-процессами, систем управления цепочками поставок.

Особенность функционирования сети fork-join, состоящей из параллельных систем обслуживания, заключается в мгновенном разделении требований при поступлении из источника в сеть на определенное число родственных фрагментов с последующим обслуживанием этих фрагментов приборами систем. После завершения обслуживания последнего из родственных фрагментов все эти фрагменты объединяются в исходное требование, которое мгновенно покидает сеть.

Наиболее простая сеть fork-join состоит из двух параллельных экспоненциальных систем обслуживания. Каждое требование, поступающее из источника в соответствии с пуассоновским законом распределения, разделяется на два фрагмента. Для этой модели использован метод производящих функций и получено стационарное распределение вероятностей состояний [4], а также предельное совместное распределение числа фрагментов в системах обслуживания [5].

Для параллельных сетей fork-join с числом систем обслуживания и с числом фрагментов, на которые делится требование, больше двух не существует точного аналитического решения, поэтому можно получить характеристики только приближенно. Например, приближенные значения математического ожидания (м.о.) длительности пребывания требований в сети систем типа $M/M/s$ и $G/M/1$ получены в работах [6, 7], а в сети систем типа $M/G/1$ — в работе [8]. Исследованию зависимости между длительностями пребывания фрагментов в системах сети посвящена работа [9].

Для открытой сети fork-join с ограниченным пространством состояний получены нижняя и верхняя оценки математического ожидания длительности пребывания требований в сети [10]. В работе [11] рассмотрена сеть массового обслуживания, включающая подсети произвольной топологии и подсети типа fork-join, аналогичные определенным в работе [10]. При предположении независимости функционирования подсетей получены характеристики сети. Метод определения верхней и нижней границ м.о. длительности пребывания требований в сети fork-join, состоящей из нескольких систем типа $GI/GI/1$, можно найти в работе [12]. Доказано [13], что длительность пребывания требований в этой сети есть нормально распределенная случайная величина при числе систем обслуживания, стремящемся к бесконечности.

В работах [14–16] исследуются сети обслуживания произвольной топологии, в которых содержатся одна или несколько подсетей, представляющих собой сети fork-join. В частности, в [16] получены необходимые и достаточные условия существования стационарного режима в ациклических сетях fork-join.

Актуальной задачей изучения сетей fork-join является разработка методов анализа сетей с ограниченным числом мест ожидания в очередях систем обслуживания [17–21] в связи с моделированием, в частности, производственных систем. Например, в работе [21] рассматривается экспоненциальная сеть массового обслуживания, состоящая из параллельных систем обслуживания с конечным числом мест для ожидания в очереди и механизмом повторных вызовов. Для этой сети обслуживания с использованием матричных методов получены основные стационарные характеристики.

Особое место среди задач исследований сетей fork-join занимают задачи оптимизации и управления. Решение задач оптимизации сетей fork-join во многом связано с изучением свойств функции пропускной способности, например, при различных механизмах блокирования [18] или при увеличении числа систем обслуживания [19]. Среди задач управления можно выделить задачи оптимального распределения сетевых ресурсов [22, 23].

В данной работе рассматривается открытая ациклическая сеть массового обслуживания,

состоящая из одноприборных систем обслуживания. Требование, поступая из источника, мгновенно разделяется на заданное постоянное число родственных фрагментов, которые независимо друг от друга переходят между системами сети обслуживания. Покидая сеть обслуживания, все фрагменты поступают в систему, в которой производится сборка требований из родственных фрагментов. После этого требования покидают систему сборки и возвращаются в источник. Описанная сеть массового обслуживания рассматривалась в работе [24], но при предположении деления требований только на два фрагмента, и для нее был представлен приближенный метод анализа длительности сборки требований и длительности пребывания требований в сети. В данной работе предлагается метод вычисления соответствующих временных характеристик рассматриваемой сети для случая деления требований на произвольное заданное число фрагментов.

1. Описание модели

Рассматривается открытая сеть массового обслуживания N^f с делением и слиянием требований. Сеть N^f включает L систем обслуживания S_i типа $M/M/1/\infty$ с интенсивностями обслуживания μ_i, $\quad i = 1, \ldots, L$, и выделенную систему S_{L+1}, называемую системой сборки [24]. Из источника S_0 в сеть обслуживания с интенсивностью λ_0 поступает пуассоновский поток требований одного класса. В момент поступления требования в сеть это требование разделяется на K фрагментов, $K \geqslant 2$, называемых родственными, и фрагменты независимо друг от друга поступают в одну из систем S_i, с которыми связан источник, с вероятностями θ_{0i}, $i = 1, \ldots, L$.

Фрагменты одного требования независимо друг от друга и независимо от фрагментов других требований переходят между системами сети S_i, $i = 1, \ldots, L$, до тех пор, пока не завершится их обслуживание в сети. После этого фрагменты требований поступают в систему сборки S_{L+1}. Родственные фрагменты, ранее принадлежавшие одному требованию, собираются в единое требование, которое покидает систему сборки и сеть N^f. Переходы фрагментов между системами обслуживания сети, источником и системой сборки осуществляются в соответствии с маршрутной матрицей $\mathbf{\Theta} = (\theta_{ij})$, $i, j = 0, 1, \ldots, L+1$, где θ_{ij} — вероятность того, что после пребывания в системе S_i фрагмент перейдет в S_j.

Сеть массового обслуживания с введенными ранее параметрами систем, в которой обслуживаются фрагменты требований, без системы сборки обозначим через N. Предполагается, что сеть N — ациклическая, т. е. структура сети представляется ориентированным ациклическим графом. Элементы маршрутной матрицы $\bar{\mathbf{\Theta}} = (\bar{\theta}_{ij})$, $i, j = 0, 1, \ldots, L$, сети N определяются как $\bar{\theta}_{ij} = \theta_{ij}$, и $\bar{\theta}_{i,0} = \theta_{i,L+1}$. Назовем смежными для S_i системы, в которые возможен переход фрагментов из S_i, $i = 0, 1, \ldots, L$. Предполагается, что в сети N число смежных для S_i систем S_j больше K (кроме S_i, для которых $\bar{\theta}_{i,0} = 1$), и ненулевые вероятности $\bar{\theta}_{ij} > 0$, $i, j = 0, 1, \ldots, L$, близки по значению (имеют один порядок).

Обозначим через λ_i, $i = 1, \ldots, L$, интенсивности потоков фрагментов требований в системы сети N; $\lambda_i = K\lambda_0\omega_i/\omega_0$, где вектор $\boldsymbol{\omega} = (\omega_i)$, $i = 0, 1, \ldots, L$, находится как решение уравнения $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}\bar{\mathbf{\Theta}}$ с условием $\sum \omega_i = 1$. Необходимым условием существования стационарного режима сети N является выполнение неравенств $\lambda_i < \mu_i$, $i = 1, \ldots, L$, или

$$\lambda_0 < \frac{\omega_0}{K} \min_{i=1,\ldots,L} \frac{\mu_i}{\omega_i} = a. \tag{1}$$

2. Вычисление математического ожидания длительности сборки требований

Будем называть «первым» фрагментом требования первый из K поступающих в систему сборки родственных фрагментов. В момент поступления «последнего» из K родственных фрагментов происходит мгновенное объединение фрагментов в единое требование, которое покидает систему сборки. Таким образом, длительность сборки требования из родственных

фрагментов определяется как длительность интервала времени между моментами выхода первого и последнего родственных фрагментов из сети N.

Обозначим $\bar{r} = (r_1, \ldots, r_K)$ — маршрут требования в сети N; r_k, $k = 1, \ldots, K$, — маршрут k-го фрагмента требования в ациклическом ориентированном графе, представляющем структуру сети N; $\bar{r} \in R$, R — конечное множество всех маршрутов требований. Длительность маршрута r_k, определяемая как длительность интервала времени, в течение которого k-й фрагмент требования пребывает в сети N, является случайной величиной Y_k, $k = 1, \ldots, K$. Очевидно, что r_k и Y_k, $k = 1, \ldots, K$, зависят от фиксированного $\bar{r} \in R$. Далее эта зависимость будет подразумеваться, но для сокращения записи не будет указываться в явном виде.

Математическое ожидание $E\tau^s$ длительности сборки требований определяется выражением

$$E\tau^s = \sum_{\bar{r} \in R} E_{\bar{r}}[\max\{Y_1, \ldots, Y_K\} - \min\{Y_1, \ldots, Y_K\}]P(\bar{r}), \tag{2}$$

где $E_{\bar{r}}[\ldots]$ — математическое ожидание соответствующей случайной величины, относящейся к маршруту $\bar{r}$ требования, $P(\bar{r})$ — вероятность маршрута $\bar{r}$ требования, $\sum_{\bar{r} \in R} P(\bar{r}) = 1$. Так как маршруты фрагментов требований независимы друг от друга, то $P(\bar{r}) = \prod_{k=1}^{K} P(r_k)$, $P(r_k)$ — вероятность маршрута r_k фрагмента требования.

Предположим, что длина маршрута r_k равна m_k, $k = 1, \ldots, K$, и $r_k = (i_1, \ldots, i_{m_k})$ представляет собой последовательность номеров систем обслуживания, соответствующую маршруту r_k. Тогда

$$P(r_k) = \bar{\theta}_{0,i_1} \bar{\theta}_{i_1,i_2} \ldots \bar{\theta}_{i_{m_k-1},i_{m_k}}.$$

Случайные величины Y_k, $k = 1, \ldots, K$, имеют обобщенное распределение Эрланга порядка m_k с различными параметрами $\gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_{m_k}}$. Параметры определяются выражением $\gamma_l = \mu_l - \lambda_l$, $l = i_1, \ldots, i_{m_k}$. Для удобства записи при фиксированном r_k положим $\alpha_1 = \gamma_{i_1}, \ldots, \alpha_m = \gamma_{i_{m_k}}$. Тогда плотность распределения и функция распределения вероятностей случайной величины Y_k имеют вид соответственно [25]:

$$f_k(y) = (-1)^{m-1} \prod_{i=1}^{m} \alpha_i \sum_{j=1}^{m} \frac{e^{-\alpha_j y}}{\prod_{\substack{l=1,\\ l \neq j}}^{m} (\alpha_j - \alpha_l)},$$

$$F_k(y) = (-1)^{m-1} \prod_{i=1}^{m} \alpha_i \sum_{j=1}^{m} \frac{1 - e^{-\alpha_j y}}{\alpha_j \prod_{\substack{l=1,\\ l \neq j}}^{m} (\alpha_j - \alpha_l)}, \quad y > 0.$$

Если $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = \alpha$, то получим распределение Эрланга порядка m с параметром α, для которого

$$f_k(y) = \frac{\alpha(\alpha y)^{m-1} e^{-\alpha y}}{(m-1)!}, \quad F_k(y) = 1 - \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(\alpha y)^l}{l!} e^{-\alpha y}, \quad y > 0.$$

Распределение Эрланга порядка m с параметром α является фазовым распределением (PH–распределением) и задается парой $(\boldsymbol{\beta}, T)$, называемой PH-представлением порядка m, где $\boldsymbol{\beta}$ — вектор-строка порядка m, T — матрица размерности $m \times m$, определяемые следующим образом:

$$\boldsymbol{\beta} = (0, \ldots, 0, 1), \quad T = \begin{pmatrix} -\alpha & & & \\ \alpha & -\alpha & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \alpha & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Здесь и далее отсутствующие в матрице элементы равны 0.

Обобщенное распределение Эрланга порядка m с параметрами $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ также является фазовым распределением и имеет PH-представление $(\boldsymbol{\beta}, T)$ порядка m, где

$$\boldsymbol{\beta} = (0, \ldots, 0, 1), \quad T = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & & & \\ \alpha_2 & -\alpha_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \alpha_m & -\alpha_m \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай $K = 2$, для которого Y_1, Y_2 — независимые случайные величины с фазовым распределением, имеющие PH-представления $(\boldsymbol{\beta}_1, T_1)$ порядка m_1 и $(\boldsymbol{\beta}_2, T_2)$ порядка m_2 соответственно. Известно [26], что случайные величины $\min\{Y_1, Y_2\}$ и $\max\{Y_1, Y_2\}$ имеют фазовые распределения с PH-представлениями $(\boldsymbol{\beta}_{\min,2}, T_{\min,2})$ и $(\boldsymbol{\beta}_{\max,2}, T_{\max,2})$ соответственно,

$$\boldsymbol{\beta}_{\min,2} = \boldsymbol{\beta}_1 \otimes \boldsymbol{\beta}_2, \quad T_{\min,2} = T_1 \otimes I + I \otimes T_2, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\beta}_{\max,2} = (\boldsymbol{\beta}_1 \otimes \boldsymbol{\beta}_2, (1 - \boldsymbol{\beta}_1 \boldsymbol{e})\boldsymbol{\beta}_2, (1 - \boldsymbol{\beta}_2 \boldsymbol{e})\boldsymbol{\beta}_1),$$
$$T_{\max,2} = \begin{pmatrix} T_1 \otimes I + I \otimes T_2 & T_1^0 \otimes I & I \otimes T_2^0 \\ 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & T_1 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где I — единичная матрица, $\boldsymbol{e}$ — вектор-столбец из единиц (I и $\boldsymbol{e}$ имеют размерности, необходимые для выполнения указанных действий); $T_k^0 = -T_k \boldsymbol{e}$, $k = 1, 2$; символ $\otimes$ обозначает произведение Кронекера.

Для определения PH-представления случайной величины $\min\{Y_1, \ldots, Y_K\}$ при $K > 2$ используется рекурсивный алгоритм, согласно которому если $(\boldsymbol{\beta}_{\min,k}, T_{\min,k})$ — PH-представление для $\min\{Y_1, \ldots, Y_k\}$, $k = 2, \ldots, K-1$, а $(\boldsymbol{\beta}_{k+1}, T_{k+1})$ — PH-представление для Y_{k+1}, то $(\boldsymbol{\beta}_{\min,k+1}, T_{\min,k+1})$ может быть найдено по формулам (3).

Аналогичный алгоритм применяется для определения PH-представления случайной величины $\max\{Y_1, \ldots, Y_K\}$ при $K > 2$, при этом формулы (3) заменяются на формулы (4).

Математические ожидания случайных величин $\min\{Y_1, \ldots, Y_K\}$ и $\max\{Y_1, \ldots, Y_K\}$ вычисляются по формулам [26]:

$$E[\min\{Y_1, \ldots, Y_K\}] = -\boldsymbol{\beta}_{\min,K} (T_{\min,K})^{-1} \boldsymbol{e},$$
$$E[\max\{Y_1, \ldots, Y_K\}] = -\boldsymbol{\beta}_{\max,K} (T_{\max,K})^{-1} \boldsymbol{e}.$$

3. Вычисление математического ожидания длительности пребывания требований в сети. Случай равномерного распределения нагрузки в сети

Математическое ожидание $E\tau^f$ длительности пребывания требований в сети N^f определяется выражением

$$E\tau^f = \sum_{\bar{r} \in R} E_{\bar{r}}[\max\{Y_1, \ldots, Y_K\}] P(\bar{r}). \tag{5}$$

Рассмотрим случай, когда все $m_k = m$, $k = 1, \ldots, K$; $\mu_i = \text{const} = K\tilde{\mu}$, $i = 1, \ldots, L$, $\tilde{\mu}$ — интенсивность обслуживания требований в системах сети, когда требования не делятся на фрагменты (т. е. если бы $K = 1$); $\omega_i = \text{const}$, $i = 1, \ldots, L$. Такой случай будем называть равномерным распределением нагрузки в сети N^f. Тогда все $P(\bar{r})$, $\bar{r} \in R$, одинаковые и равны $1/|R|$, $\lambda_i = \text{const} = K\tilde{\lambda}$, $i = 1, \ldots, L$, а $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = \alpha$, где $\alpha = K(\tilde{\mu} - \tilde{\lambda}) = K\tilde{\alpha}$.

Математическое ожидание длительности пребывания требований в сети N^f с равномерным распределением нагрузки вычисляется как

$$E\tau^f(K) = E[\max\{Y, \ldots, Y\}]. \tag{6}$$

Так как случайная величина Y имеет распределение Эрланга порядка m с параметром α (гамма-распределение с параметрами m и α), то с использованием результатов теории экстремальных значений [27] получим

$$E\tau^f(K) \approx (E[Z]c_K + d_K)/\alpha, \tag{7}$$

где $E[Z]$ — математическое ожидание случайной величины Z с распределением Гумбеля, $E[Z] = 0.5772$ (константа Эйлера – Маскерони),

$$c_K = 1 + \frac{m-1}{F^{-1}(1-1/K)}, \quad d_K = F^{-1}(1-1/K),$$

$F^{-1}(\cdot)$ — обратная (квантильная) функция распределения Эрланга порядка m с параметром, равным 1. Точность формулы (7) увеличивается при $K \to \infty$.

4. Численные результаты

Рассмотрим сеть N^f с параметрами: $L = 30$, $K = 3$; $\bar{\theta}_{0i} = \bar{\theta}_{ij} = 1/15$, $\bar{\theta}_{j0} = 1$, $i = 1, \ldots, 15$, $j = 16, \ldots, 30$. Приведем результаты вычислительных экспериментов при двух вариантах векторов интенсивностей обслуживания в системах сети N: вектор одинаковых интенсивностей обслуживания $\mu^1 = (\mu_i^1)$, $\mu_i^1 = 4$, $i = 1, \ldots, 30$; вектор различных интенсивностей обслуживания $\mu^2 = (\mu_i^2)$, $\mu_i^2 = 4 + 0.1(i-1)$, $i = 1, \ldots, 30$. При таких параметрах сети N согласно условию (1) $a = 20$.

В табл. 1, 2 приводятся значения математического ожидания $E\tau^s$ длительности сборки и математического ожидания $E\tau^f$ длительности пребывания требований в сети, вычисленные аналитически (АМ) по формулам (2), (5) соответственно и с помощью имитационной модели (ИМ) [28] при различных значениях λ_0. Результаты имитационного моделирования получены с доверительной вероятностью 0.95 и шириной доверительного интервала 0.01.

Таблица 1 / Table 1

Математическое ожидание длительности сборки требований
The mean time spent by a task in the join-node

λ_0		0.1	1.0	3.0	7.0	11.0	15.0	19.0
μ^1	$E\tau^s$ (АМ)	0.565	0.592	0.662	0.865	1.250	2.250	11.250
	$E\tau^s$ (ИМ)	0.580	0.605	0.673	0.871	1.248	2.239	10.898
μ^2	$E\tau^s$ (АМ)	0.430	0.446	0.486	0.596	0.775	1.146	2.861
	$E\tau^s$ (ИМ)	0.441	0.458	0.498	0.602	0.777	1.138	2.917

Таблица 2 / Table 2

Математическое ожидание длительности пребывания требований в сети
The mean response time in the queueing network

λ_0		0.1	1.0	3.0	7.0	11.0	15.0	19.0
μ^1	$E\tau^f$ (АМ)	0.807	0.846	0.945	1.236	1.785	3.213	16.065
	$E\tau^f$ (ИМ)	0.838	0.875	0.976	1.269	1.829	3.295	16.167
μ^2	$E\tau^f$ (АМ)	0.611	0.633	0.689	0.841	1.087	1.577	3.605
	$E\tau^f$ (ИМ)	0.633	0.657	0.714	0.865	1.114	1.607	3.735

Из данных, представленных в табл. 1, 2, видно, что результаты аналитического вычисления и имитационного моделирования различаются не более чем на 4%.

Рассмотрим пример сети с равномерным распределением нагрузки. В табл. 3 приводятся результаты вычислений $E\tau^f(K)$ для сети N^f при $L = 30$, $m = 2$, $\tilde{\mu} = 1.333$, $\tilde{\lambda} = 0.2$, $K = 2, \ldots, 9$.

Таблица 3 / Table 3

Математическое ожидание длительности пребывания требований в сети с равномерным распределением нагрузки
The mean response time in the queueing network under uniform workload distribution

K	2	3	4	5	6	7	8	9
$E\tau^f(K)$ (АМ)	1.214	0.945	0.783	0.672	0.592	0.530	0.481	0.441
$E\tau^f(K)$ (АП)	1.147	0.918	0.769	0.664	0.587	0.527	0.479	0.440

Вычисления производились по точной формуле (6) (АМ) и по приближенной формуле (7) (АП). Для сравнения в сети, в которой требования не делятся на фрагменты, $E\tau = 1.765$. При $K = 3$ значение (АМ) совпадает с результатом, приведенным в табл. 2 при $\lambda_0 = 3.0$ и векторе μ^1.

Из данных, представленных в табл. 3, видно, что результаты вычисления по приближенной и точной формулам отличаются не более чем на 6% (при $K = 2$), и различие уменьшается при увеличении K.

Заключение

В работе для сети массового обслуживания с делением и слиянием требований предложен метод вычисления временных характеристик, таких как математическое ожидание длительности сборки требований и математическое ожидание длительности пребывания требований в сети. Также для частного случая равномерного распределения нагрузки в сети массового обслуживания описывается приближенный метод вычисления математического ожидания длительности пребывания требований в сети. Равномерное распределение нагрузки характеризуется одинаковыми длинами и равными вероятностями маршрутов фрагментов требований в сети, а также одинаковыми интенсивностями обслуживания в системах сети, пропорциональными числу родственных фрагментов требований. Предложенный метод нахождения временных характеристик сети, основанный на вычислении PH-представлений соответствующих случайных величин, является вычислительно затратным и применим только для сетей массового обслуживания небольшой размерности, поэтому в дальнейшем представляет интерес разработка более эффективного в вычислительном отношении метода нахождения рассмотренных характеристик.

Список литературы

1. *Thomasian A.* Analysis of fork/join and related queueing systems // ACM Computing Surveys (CSUR). 2014. Vol. 47, iss. 2. Art. 17. P. 1–71. DOI: https://doi.org/10.1145/2628913
2. *Горбунова А. В., Зарядов И. С., Самуйлов К. Е., Сопин Э. С.* Обзор систем параллельной обработки заявок // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика. 2017. Т. 25, № 4. С. 350–362. DOI: https://doi.org/10.22363/2312-9735-2017-25-4-350-362, EDN: ZVFIPZ
3. *Enganti P., Rosenkrantz T., Sun L., Wang Z., Che H., Jiang H.* ForkMV: Mean-and-variance estimation of fork-join queuing networks for datacenter applications // IEEE International Conference on Networking, Architecture and Storage. 2022. P. 1–8. DOI: https://doi.org/10.1109/NAS55553.2022.9925531
4. *Flatto L., Hahn S.* Two parallel queues created by arrivals with two demands I // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1984. Vol. 44, iss. 5. P. 1041–1053. DOI: https://doi.org/10.1137/0144074
5. *Flatto L.* Two parallel queues created by arrivals with two demands II // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1985. Vol. 45, iss. 5. P. 861–878. DOI: https://doi.org/10.1137/0145052
6. *Ko S.-S., Serfozo R. F.* Response times in $M/M/s$ fork-join networks // Advances in Applied Probability. 2004. Vol. 36, iss. 3. P. 854–871. DOI: https://doi.org/10.1239/aap/1093962238
7. *Ko S.-S., Serfozo R. F.* Sojourn times in $G/M/1$ fork-join networks // Naval Research Logistics. 2008. Vol. 55, iss. 5. P. 432–443. DOI: https://doi.org/10.1002/nav.20294
8. *Thomasian A., Tantawi A. N.* Approximate solutions for $M/G/1$ fork/join synchronization //

Proceedings of Winter Simulation Conference. 1994. P. 361–368. DOI: https://doi.org/10.1109/WSC.1994.717194

9. *Gorbunova A. V., Lebedev A. V.* Correlations of the sojourn times of subtasks in fork-join queueing systems with $M/M/1$-type subsystems // Advances in Systems Science and Applications. 2024. Vol. 24, iss. 2. P. 1–18.
10. *Balsamo S., Donatiello L., van Dijk N. M.* Bound performance models of heterogeneous parallel processing systems // IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems. 1998. Vol. 9, iss. 10. P. 1041–1056. DOI: https://doi.org/10.1109/71.730531
11. *Arns M.* A tool for the analysis of hierarchical service-oriented extended open fork/join queueing networks // 1st International ICST Workshop on Tools for Solving Structured Markov Chains. 2010. P. 1–9. DOI: https://doi.org/10.4108/smctools.2007.1910
12. *Baccelli F., Makowski A.* Simple computable bounds for the fork-join queue // Proceedings of Information Science and Systems Conference. 1985. P. 436–441.
13. *Schol D., Vlasiou M., Zwart B.* Extreme values for the waiting time in large fork-join queues // Queueing Systems. 2025. Vol. 109. Art. 9. DOI: https://doi.org/10.1007/s11134-025-09937-2
14. *Осипов О. А., Тананко И. Е.* Сети массового обслуживания произвольной топологии с делением и слиянием требований: случай бесконечноприборных систем обслуживания // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. 2017. № 4. С. 43–58. DOI: https://doi.org/10.26456/vtpmk188, EDN: ZXRLIF
15. *Baynat B., Dallery Y.* An approximation method for general closed queuing networks with fork-join mechanisms // Journal of the Operational Research Society. 2000. Vol. 51, iss. 2. P. 198–208. DOI: https://doi.org/10.1057/palgrave.jors.2600885
16. *Baccelli F., Massey W., Towsley D.* Acyclic fork-join queuing networks // Journal of the ACM. 1989. Vol. 36, iss. 3. P. 615–642. DOI: https://doi.org/10.1145/65950.65957
17. *Tancrez J.-S., Chevalie P., Sema P.* A tight bound on the throughput of queueing networks with blocking // Analytical and Stochastic Modeling Techniques and Applications (ASMTA 2013) / eds. A. Dudin, K. de Turck. Berlin ; Heidelberg : Springer, 2013. P. 396–415. (Lecture Notes in Computer Science, vol. 7984). DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-39408-9_28
18. *Dallery Y., Towsley D., Liu Z.* Properties of fork/join queueing networks with blocking under various operating mechanisms // IEEE Transactions on Robotics and Automation. 1997. Vol. 13, iss. 4. P. 503–518. DOI: https://doi.org/10.1109/70.611303
19. *Xia C. H., Liu Z., Towsley D., Lelarge M.* Scalability of fork/join queueing networks with blocking // ACM SIGMETRICS Performance Evaluation Review. 2007. Vol. 35, iss. 1. P. 133–144. DOI: https://doi.org/10.1145/1269899.1254898
20. *Yannopoulos E., Alfa A. S.* A simple and quick approximation algorithm for tandem, split and merge queueing networks with blocking // INFOR: Information Systems and Operational Research. 1994. Vol. 32, iss. 4. P. 288–308. DOI: https://doi.org/10.1080/03155986.1994.11732258
21. *Осипов О. А.* Анализ RQ-сети массового обслуживания с делением и слиянием требований // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2018. № 43. С. 49–55. DOI: https://doi.org/10.17223/19988605/43/6, EDN: XQWQHJ
22. *Marin A., Rossi S., Sottana M.* Dynamic resource allocation in fork-join queues // ACM Transactions on Modeling and Performance Evaluation of Computing Systems. 2020. Vol. 5, iss. 1. P. 1–28. DOI: https://doi.org/10.1145/3372376
23. *Özkan E.* Control of fork-join processing networks with multiple job types and parallel shared resources // Mathematics of Operations Research. 2021. Vol. 47, iss. 2. P. 1310–1334. DOI: https://doi.org/10.1287/moor.2021.1170
24. *Постнова О. С., Тананко И. Е., Рогачко Е. С.* Приближенный анализ длительности пребывания требований в сети массового обслуживания с делением и слиянием требований // Управление большими системами. 2025. № 115. С. 33–51. EDN: HVKWYL
25. *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* Теория вероятностей и ее инженерные приложения. Москва : Наука, 1988. 480 с.
26. *He Q.-M.* Fundamentals of matrix-analytic methods. New York : Springer Science+Business Media, 2014. 363 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7330-5
27. *Embrechts P., Klüppelberg C., Mikosch T.* Modelling extremal events for insurance and finance. Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 1997. 648 p. (Stochastic Modelling and Applied Probability (SMAP, vol. 33)). DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-33483-2
28. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2025660299 Российская

Федерация. Имитационная модель сетей массового обслуживания с делением и слиянием требований : № 2025619213 : заявл. 22.04.2025 : опубл. 22.04.2025 / О. С. Постнова, И. Е. Тананко ; заявитель федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского». EDN: KQEPPO

References

1. Thomasian A. Analysis of fork/join and related queueing systems. *ACM Computing Surveys*, 2014, vol. 47, iss. 2, art. 17, pp. 1–71. DOI: https://doi.org/10.1145/2628913
2. Gorbunova A. V., Zaryadov I. S., Samouylov K. E., Sopin E. S. A survey on queuing systems with parallel serving of customers. *RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics*, 2017, vol. 25, iss. 4, pp. 350–362 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.22363/2312-9735-2017-25-4-350-362, EDN: ZVFIPZ
3. Enganti P., Rosenkrantz T., Sun L., Wang Z., Che H., Jiang H. ForkMV: Mean-and-variance estimation of fork-join queuing networks for datacenter applications. *IEEE International Conference on Networking, Architecture and Storage*, 2022, pp. 1–8. DOI: https://doi.org/10.1109/NAS55553.2022.9925531
4. Flatto L., Hahn S. Two parallel queues created by arrivals with two demands I. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1984, vol. 44, iss. 5, pp. 1041–1053. DOI: https://doi.org/10.1137/0144074
5. Flatto L. Two parallel queues created by arrivals with two demands II. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1985, vol. 45, iss. 5, pp. 861–878. DOI: https://doi.org/10.1137/0145052
6. Ko S.-S., Serfozo R. F. Response times in $M/M/s$ fork–join networks. *Advances in Applied Probability*, 2004, vol. 36, iss. 3, pp. 854–871. DOI: https://doi.org/10.1239/aap/1093962238
7. Ko S.-S., Serfozo R. F. Sojourn times in $G/M/1$ fork-join networks. *Naval Research Logistics*, 2008, vol. 55, iss. 5, pp. 432–443. DOI: https://doi.org/10.1002/nav.20294
8. Thomasian A., Tantawi A. N. Approximate solutions for $M/G/1$ fork/join synchronization. *Proceedings of Winter Simulation Conference*, 1994, pp. 361–368. DOI: https://doi.org/10.1109/WSC.1994.717194
9. Gorbunova A. V., Lebedev A. V. Correlations of the sojourn times of subtasks in fork-join queueing systems with $M/M/1$-type subsystems // *Advances in Systems Science and Applications*, 2024, vol. 24, iss. 2, pp. 1–18.
10. Balsamo S., Donatiello L., van Dijk N. M. Bound performance models of heterogeneous parallel processing systems. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 1998, vol. 9, iss. 10, pp. 1041–1056. DOI: https://doi.org/10.1109/71.730531
11. Arns M. A tool for the analysis of hierarchical service-oriented extended open fork/join queueing networks. *1st International ICST Workshop on Tools for Solving Structured Markov Chains*, 2010, pp. 1–9. DOI: https://doi.org/10.4108/smctools.2007.1910
12. Baccelli F., Makowski A. Simple computable bounds for the fork-join queue. *Proceedings of Information Science and Systems Conference*, 1985, pp. 436–441.
13. Schol D., Vlasiou M., Zwart B. Extreme values for the waiting time in large fork-join queues. *Queueing Systems*, 2025, vol. 109, art. 9. DOI: https://doi.org/10.1007/s11134-025-09937-2
14. Osipov O. A., Tananko I. E. Fork-join queueing networks with an arbitrary topology: The infinite server case. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2017, iss. 4, pp. 43–58 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.26456/vtpmk188, EDN: ZXRLIF
15. Baynat B., Dallery Y. An approximation method for general closed queuing networks with fork-join mechanisms. *Journal of the Operational Research Society*, 2000, vol. 51, iss. 2, pp. 198–208. DOI: https://doi.org/10.1057/palgrave.jors.2600885
16. Baccelli F., Massey W., Towsley D. Acyclic fork-join queuing networks. *Journal of the ACM*, 1989, vol. 36, iss. 3, pp. 615–642. DOI: https://doi.org/10.1145/65950.65957
17. Tancrez J.-S., Chevalie P., Sema P. A tight bound on the throughput of queueing networks with blocking. In: Dudin A., de Turck K. (eds.) *Analytical and Stochastic Modeling Techniques and Applications (ASMTA 2013)*. Lecture Notes in Computer Science, vol. 7984. Springer, Berlin, Heidelberg, 2013, pp. 396–415. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-39408-9_28
18. Dallery Y., Towsley D., Liu Z. Properties of fork/join queueing networks with blocking under various operating mechanisms. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1997, vol. 13, iss. 4, pp. 503–518. DOI: https://doi.org/10.1109/70.611303

19. Xia C. H., Liu Z., Towsley D., Lelarge M. Scalability of fork/join queueing networks with blocking. *ACM SIGMETRICS Performance Evaluation Review*, 2007, vol. 35, iss. 1, pp. 133–144. DOI: https://doi.org/10.1145/1269899.1254898
20. Yannopoulos E., Alfa A. S. A simple and quick approximation algorithm for tandem, split and merge queueing networks with blocking. *INFOR: Information Systems and Operational Research*, 1994, vol. 32, iss. 4, pp. 288–308. DOI: https://doi.org/10.1080/03155986.1994.11732258
21. Osipov O. A. Analysis of fork/join queueing networks with retrials. *Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2018, iss. 43, pp. 49–55 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.17223/19988605/43/6, EDN: XQWQHJ
22. Marin A., Rossi S., Sottana M. Dynamic resource allocation in fork-join queues. *ACM Transactions on Modeling and Performance Evaluation of Computing Systems*, 2020, vol. 5, iss. 1, pp. 1–28. DOI: https://doi.org/10.1145/3372376
23. Özkan E. Control of fork-join processing networks with multiple job types and parallel shared resources. *Mathematics of Operations Research*, 2021, vol. 47, iss. 2, pp. 1310–1334. DOI: https://doi.org/10.1287/moor.2021.1170
24. Postnova O. S., Tananko I. E., Rogachko E. S. An approximation for the response time in fork-join queueing networks. *Large-Scale Systems Control*, 2025, iss. 115, pp. 33–51 (in Russian). EDN: HVKWYL
25. Ventsel' E. S., Ovcharov L. A. *Teoriya veroyatnostey i yeye inzhenernye prilozheniya* [Probability theory and its engineering applications]. Moscow, Nauka, 1988. 480 p. (in Russian).
26. He Q.-M. *Fundamentals of matrix-analytic methods*. New York, Springer Science+Business Media, 2014. 363 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7330-5
27. Embrechts P., Klüppelberg C., Mikosch T. *Modelling extremal events for insurance and finance*. Stochastic Modelling and Applied Probability (SMAP, vol. 33). Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1997. 648 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-33483-2
28. Postnova O. S., Tananko I. E. *Imitatsionnaya model' setey massovogo obsluzhivania s deleniem i sliyaniem trebovaniy* [Simulation model of fork-join queueing networks]. Certificate of state registration of a computer program RU 2025660299. EDN: KQEPPO

Поступила в редакцию / Received 06.05.2026
Принята к публикации / Accepted 11.06.2026
Опубликована / Published 31.08.2026